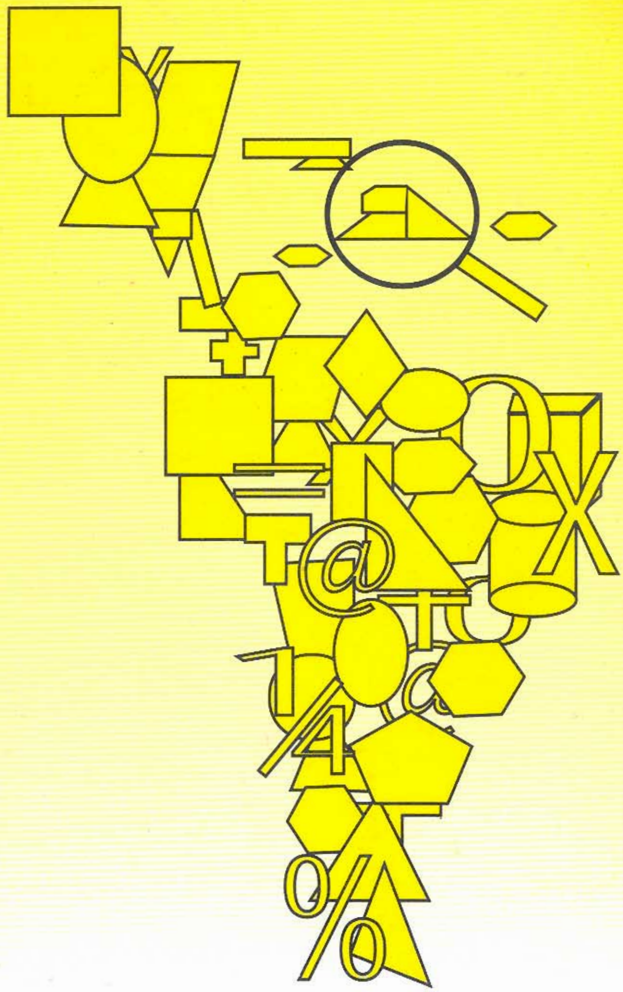


Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 13, año 2000

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Presidente

Ricardo Cantoral
México

Directores Ejecutivos

Patricia Fogliatti
Argentina

Jorge Fiallo
Colombia

Evangelina Díaz
Costa Rica

Luis Campistrous
Cuba

Germán Beitía
Panamá

Joaquín Padovani
Puerto Rico

Comité Internacional de RELME

Cecilia Crespo
Argentina

Jorge Fiallo
Colombia

Crisólogo Dolores
México

Guadalupe Tejada de Castillo
Panamá

Carmen Evarista Matías
República Dominicana

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Comité Nacional Organizador RELME 13

Evarista Matias
Coordinadfora General

Amado Reyes
Comisión Académica

Juan Payero
Comisión de Comunicaciones

Fernando Rodríguez
Comisión de Relaciones Públicas

Angela Tavares y Rosa Batista
Comisión de Publicaciones

Daniel Michel
Comisión de Apoyo Logístico

María del Pilar Domingo
Comisión Cultural

Edith Paulino
Comisión de Registro

Liduvina Cornelio
Recursos Audiovisuales

Oscar Rosario
Comisión de Transporte

Francisco Vegazo
Comisión Administrativa y Financiera

Vidalia González
Comisión de Evaluación

Alma de la Rosa
Comisión de Programas

Lidia Carbonell
Comisión de Recepción y Protocolo

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Volumen 13

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana De Matemática Educativa, Vol. 13

Editoras:
Rosa María Farfán, Carmen E. Matias, Daysi Sánchez y Ángela Tavarez

Diseño y cuidado de la edición:
Apolo Castañeda Alonso

Diseño de portada:
Enrique Oaxaca

Primera edición: mayo de 2000

ISBN 979-625-227-4

Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.
Nebraska 199. Col. Nápoles
C. P. 03810 México, D. F.
Teléfono: 5 23 09 94. Fax: 5 43 11 73
e-mail: geimex@mpsnet.com.mx.
info@engrupo.com.mx
www.engrupo.com.mx
Reg. CANIEM 1382

Impreso en México/*Printed in Mexico*

La *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* es el resultado de trece años de esfuerzo que hoy la constituye como el foro más importante en su campo en el ámbito latinoamericano. Todos los asistentes, en exhaustivas sesiones intercambian sus experiencias, comunican sus ideas y presentan sus resultados rigurosamente, con la intención deliberada de consolidar nuestra disciplina, la **Matemática Educativa**, siempre con el ánimo de favorecer el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de los sistemas educativos de nuestro continente. En esta publicación se agrupan las ***Actas de Relme 13.***

Historia y objetivos del CLAME

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa se constituyó en la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa que se celebró en Puerto Rico en agosto de 1996. En dicha reunión se acordó también, modificar el nombre a Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa y continuar la numeración. Al mismo tiempo y con fin de atender organizadamente las demandas de la comunidad, se forma el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, junto con los proyectos académicos que perfilan y consolidan el proceso de fortalecimiento de la disciplina de América Latina. Bajo la premisa de conservar la pluralidad de los acercamientos existentes y el respecto a las tradiciones educativas propias de cada uno de los países miembros. Los proyectos que de inicio impulsa el Clame son los siguientes:

- La creación de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (**Relime**). Órgano de publicación oficial con tres números al año. El objetivo de esta iniciativa es el de promover y fomentar la escritura de artículos de investigación de alta calidad en esta región, sin la restricción de espacio y de tiempo que la Relme establece.

- La instauración del ***Premio"Simón Bolivar"*** a la mejor tesis de posgrado en Matemática Educativa" cuyo objetivo es el estimular a los recién graduados y fomentar entre los jóvenes el estudio de la disciplina. Los ganadores del Premio se dan a conocer en la Relme, junto con los miembros del Jurado en una sesión solemne "Cátedra Simón Bolivar" y ofrecen una conferencia de su trabajo de investigación.

- La generación de un "Directorio Latinoamericano de Especialistas en Matemática Educativa" que al conocer los datos de nuestros colegas y de sus áreas de especialización, nos permita establecer una red eficiente de comunicación entre países.

- La formación de un programa editorial necesario en nuestros países con varias series: Libros especializados, libros de texto y materiales de docencia, entro otros. Con la publicación de las tesis ganadoras del Premio "Simón Bolivar", iniciamos la serie de "Investigaciones en Matemática Educativa", algunos colegas de los grupos de trabajo de Relme han presentado propuestas para la elaboración de diversos "Estados de Arte..." que será otra serie. Hacemos una cordial invitación a presentar propuestas para las diversas series que conformarán nuestra biblioteca de Matemática Educativa en Latinoamérica.

- La última de las iniciativas del Clame se ha visto coronada con un éxito. Se ha fundado el Cimate – Centro de Investigación en Matemática Educativa y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Desde ahí, se podrá continuar la publicación del Relime y ofertar un programa de doctorado a distancia con cobertura continental.

Organización de la publicación

Presentamos en esta publicación el extenso de las diversas participaciones en Relme 13 que fueron presentadas por los autores en la Reunión y aprobadas para su publicación después del proceso de evaluación ya usual en nuestro evento y que sustenta sus dictámenes con base en la calidad del trabajo en comparación de los niveles internacionales de exigencia que suelen pedirse para eventos académicos de esta índole. Las líneas en las que hemos clasificado los artículos, incluyen una sección para la publicación de los extensos de los carteles ganadores:

- Pensamiento Matemático Avanzado
- Pensamiento Numérico
- Pensamiento Algebraico
- Pensamiento Geométrico
- Pensamiento de Probabilidad y Estadística
- Uso de Tecnología
- Incorporación de distintas perspectivas
- Formación de profesores
- Desarrollo de curriculum
- Teoría y Metodología
- Documentos de los Grupos de trabajo y discusión
- Carteles

Agradecimientos

El principal reconocimiento va dirigido, naturalmente, a todos los colegas que dan vida a *Relme* haciendo posible nuestro encuentro: a todos los participantes. Empero deseamos expresar un especial reconocimiento a todos los árbitros y colaboradores editoriales que aportaron su conocimiento, tiempo, esfuerzo y sobretodo entusiasmo en beneficio de la calidad de esta publicación. Por supuesto a los miembros directivos y representantes de Clame en los distintos países por su colaboración.

Agradecemos a la Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana, por su apoyo profesional y su hospitalidad al albergarnos así como a todas las instituciones y empresas que nos apoyaron con recursos materiales y humanos.

Rosa María Farfán, Carmen E. Matias, Daysi Sánchez, Ángela Tavarez

Ciudad de México, Primavera de 2000

Contenido

D. Pensamiento Algebraico: Nivel Superior

E. Pensamiento Geométrico: Nivel Básico

F. Pensamiento Geométrico: Nivel Medio Superior

G. Pensamiento de Probabilidad y Estadística: Nivel Medio Superior

H. Pensamiento de Probabilidad y Estadística: Nivel Superior

I. Uso de Tecnología: Nivel Básico

J. Uso de Tecnología: Nivel Medio Superior

K. Uso de Tecnología: Nivel Superior

U. Documentos de los grupos de trabajo y discusión

V. Carteles Ganadores

Pensamiento Matemático Avanzado

La génesis de nociones básicas del Cálculo en textos de la Educación Básica

Gloria García O., Celly Serrano, Hernán Díaz
Universidad Pedagógica Nacional, Santafé de Bogotá
Colombia

Resumen

Este trabajo, basado en la propuesta de Sierpinska (1990) para identificar niveles y esquemas de pensamiento en el conocimiento, nos permite inferir implicaciones metodológicas relacionadas con el desarrollo en la Educación Básica Primaria de algunas nociones básicas del Cálculo como son: variación, aproximación y procesos infinitos, como base para el análisis de textos para este nivel.

Las variables que son analizadas en éstos son: temáticas, procesos que se proponen para la enseñanza y actividades de aprendizaje.

Nuestro interés se centra en identificar los esquemas de pensamiento que subyacen en los discursos didácticos de los textos, para tomar consciencia de ellos y poder rupturar la concepción vigente que afirma que el Cálculo es un conocimiento al cual sólo es posible acceder al término de los estudios de Secundaria o en los universitarios.

Introducción

La enseñanza del Cálculo en la Educación Básica, tradicionalmente se concibe como un conocimiento que cierra el ciclo de la formación en matemáticas en la Secundaria. Las definiciones formales de límite y derivada se realizan a través de uno o dos ejemplo de aproximaciones numéricas para el caso del límite y con el cálculo analítico de la variación de la función para el caso de la derivada. Con estas motivaciones se pretende preparar al estudiante para las presentaciones formales de las definiciones respectivas. Luego se garantiza la "comprensión" con la ejercitación de los algoritmos propios del límite y la derivada y sus propiedades. Sin embargo los aportes investigativos (Cornu, Sierpinska, Orton, Wildenberg,.....) sobre la comprensión de estos conceptos, permite concluir que ella está determinada por nociones complejas que fueron desarrolladas en un largo período de tiempo (19 siglos) por la comunidad matemática y que ellos generaron nuevos estilos de pensamiento matemático y nuevas formas de razonar.

Acogiendo los aportes investigativos citados, hemos propuesto en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, el proyecto de investigación: "*Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a las nociones básicas del Cálculo*". Asumimos el Cálculo como un campo conceptual, el cual esta formado por *nociones básicas* como son las nociones de aproximación sucesiva, procesos infinitos y variación, las cuales constituyen los mecanismos constructivos que dieron lugar a los conceptos de límite y derivada; por *objetos matemáticos* como los conceptos de límite y derivada, ya mencionados, y otros como por ejemplo la integral y por *formas específicas de razonamiento*. Fuera del campo, pero como requisitos necesarios e indispensables para el acceso a él, se encuentran nociones y conceptos como la dependencia, la función, el continuo numérico, la razón como operador y las razones de cambio promedio y de cambio instantáneo y sus relaciones con la pendiente.

También en este campo se encuentran las actividades cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos de construcción y uso de los objetos matemáticos, el campo de los fenómenos y situaciones que admiten ser analizados mediante los mismos y de los problemas que pueden ser abordados por ellos. (González. 1995)

Por tal razón, los conceptos de límite y derivada son complejos, la construcción cognitivamente efectiva que se realice de ellos, presenta necesariamente dificultades y es lenta, puesto que supone superar obstáculos para lograr el dominio y la integración de las nociones y métodos citados, con sus respectivas representaciones y símbolos, para que realmente sea integrado por los alumnos en la construcción con significado de los concepto mencionados.

Estas consideraciones precisan el objetivo del proyecto por cuanto su primer propósito es el de establecer vías de acceso didácticas, cognitivamente efectivas, a los conceptos de límite y derivada, explorando vías y estableciendo hilos conductores a través de la introducción de las nociones de aproximación, variación y procesos infinitos en la Educación Básica. La construcción didáctica se soporta en primera instancia en la revisión histórico-epistemológica de estudios realizados al respecto y el análisis de los curriculos y los textos. Este trabajo presenta el resultado del estudio realizado sobre los textos escolares.

Marco teórico

La revisión de los estudios histórico-epistemológicos tiene como referente la propuesta de Anna Sierpinska (1992) para distinguir en el conocimiento tres niveles. El primer nivel obedece a actitudes, creencias y convicciones, explícitas o implícitas, que tienen como justificación la autoridad, la tradición o el sentido común. El segundo nivel obedece esquemas de pensamiento, es un conocimiento explícito aprendido por la práctica o imitación en el transcurso de la socialización y la educación y determina formas de interpretar situaciones y de aproximarse a los problemas.

El tercer nivel corresponde al conocimiento técnico, este es validado por criterios racionales tales como la consistencia y la aplicación y por las relaciones establecidas con los sistemas de conocimiento socialmente calificado como científico, es un conocimiento explícito. Los tres niveles nos son independientes.

Las actitudes, las creencias y los esquemas de pensamiento inconscientes hacía la matemática pueden generar la selección de temas y tópicos para enseñar. De otra parte, la actividad en el nivel técnico cambia las creencias, crea puentes para tomar consciencia de esquemas de pensamiento y poder transformarlos. Pero las primeras pueden actuar a manera de obstáculos del pensamiento cuando se trabaja en el nivel técnico. Estos puede ser sobrepasados si se toma conciencia de las creencias.

El obstáculo se torna epistemológico cuando hace parte de una cultura, de una forma de pensar en una comunidad.

Estos aportes, se convierten en categorías de análisis para el estudio de los textos, en el sentido de aportar a la toma de consciencia de creencias y esquemas de pensamiento sobre la matemática, presentes en el discurso didáctico de los textos escolares. La consciencia de estos, permitirá comprender, a la comunidad de educadores en matemáticas de los últimos niveles de la Educación Básica, que el problema de la conceptualización de límite y derivada no reside en la explicación de la definición, o en la ejercitación de algoritmos relacionados. Consideramos que los obstáculos en los textos se toman epistemologicos, puesto que son compartidos por la comunidad de autores de textos.

Los esquemas de pensamiento subyacen a la presentación de la matemática en los textos escolares, estos son el resultado del conocimiento matemático aprendido y solidificado por procesos de socialización de las matemáticas escolares, que se hacen a través de los currículos tanto de formación de docentes como de la formación básica.

Su identificación, permitirá realizar la toma de consciencia necesaria para superar los obstáculos en que se convierten dichos esquemas de pensamiento.

Esquemas históricos de pensamiento

Con base en la revisión elaborada a los análisis histórico-epistemológicos, de los conceptos básicos del cálculo, identificamos a continuación los siguientes esquemas de pensamiento matemático. Cabe resaltar que la clasificación se ha realizado teniendo en cuenta el desarrollo, rechazo o tratamiento que la comunidad matemática, en distintas épocas, realizó en nociones y conceptos como: dicotomía discreto-continuo; el infinito potencial y el actual; procesos finitos e infinitos; medición, aproximación y estimación vs precisión, el estudio matemático del cambio. Consideramos que, principalmente, este último da lugar a un nuevo estilo de pensamiento y a la introducción y desarrollo sistemático del Cálculo.

La notación y la caracterización de los esquemas de pensamiento que acogemos integrados al estudio de las nociones básicas del Cálculo, son:

PD : esquema de pensamiento deductivo, relacionado con la búsqueda de la precisión, el criterio de organización deductivo, la dicotomía discreto-continuo. Este esquema está guiado por intereses teóricos.

PI : esquema de pensamiento inductivo, relacionado con criterios de organización inductiva, con argumentaciones justificadas por conocimiento procedimental con el fin de obtener leyes científicas; guiado por intereses prácticos; el foco de atención lo constituye el estudio del movimiento; en este esquema la dicotomía discreto-continuo se rompe a través de concepciones operativas de número.

PT : esquema de pensamiento técnico, relacionado con el estudio matemático del cambio; el criterio de organización sigue siendo el inductivo con la finalidad de generar métodos específicos y generalizables para obtener cambios relativos. El criterio de validez se fundamenta en la operatividad.

PF: esquema de pensamiento formal, relacionado con la construcción lógica de los conceptos propios del calculo y con los asociados (función, continuo numérico, infinito actual)

La clasificación de los esquemas descritos, es una herramienta metodológica para el análisis de los textos, en los cuales se analizarán variables como la selección de los temas, los tópicos que se proponen para ser enseñados y las actividades de aprendizaje que se proponen. Un esquema de pensamiento asociado al PD, por ejemplo, didácticamente orienta la presentación de la matemática en la Educación Primaria, diferenciando la Aritmética de la Geometría, los números que enfatiza por un largo período son los números naturales. La medición se inicia con el cálculo de medidas precisas como son las obtenidas por fórmulas geométricas. El contexto de las actividades de aprendizaje son casi siempre los contextos cuasi matemáticos, en el sentido de presentar escenarios propios del dominio aritmético o geométrico.

Por su parte un esquema de pensamiento correspondiente a PI, introduce como escenario de las actividades de aprendizaje cuestiones relacionadas con la actividad cultural. La variación y el cambio representados en pictogramas y gráficas es también motivo de estudio. La medición y en particular la estimación y el redondeo aparecen como necesidades prácticas en la solución y el cálculo de cuestiones prácticas. Números como los decimales aparecen en respuesta a necesidades de medición. El razonamiento inductivo se realiza en las posibilidades de construcción por parte de los estudiantes.

Análisis de los textos

Uno de los intereses que motivan este trabajo es el de observar el tratamiento que los textos escolares de la Educación Primaria, realizan respecto a la aproximación y construcción de las nociones básicas del Cálculo como la variación, los procesos infinitos, la aproximación y aún al acercamiento que hacen hacía el infinito actual. Consideramos que esta aproximación se puede realizar con el tratamiento que en este nivel se realice sobre dominios tradicionales como la división con resto, los decimales, la medición y el sentido estimativo de esta actividad, el estudio de la variación. Todas estos dominios pueden ser hoy dimensionados con herramientas tecnológicas como la calculadora numérica o software como Logo; con la integración al aula de la información cuantificada que aportan los medios de comunicación de los cambios que se dan en el mundo.

En consideración a este interés, se seleccionaron de tres colecciones de textos para la Básica Primaria, los correspondientes a los niveles tercero, cuarto y quinto de Primaria. La selección de la colecciones obedeció a que en el país circulan para este nivel dos tipos de texto: el correspondiente a las escuelas situadas en el campo, denominada Escuela Nueva (Cc), por las características que presenta y los textos usados en las ciudades. En estas últimas se encuentra también una división, escuela pública (CP) y privada (Cp). Esta última cuando esta dirigida a estratos sociales altos utiliza textos producidos en otros países. Nos parece que esta clasificación implícita que subyace en cuanto a los textos en Colombia, es necesaria de analizar, por cuanto el valor del texto como intermediario en el discurso didáctico no puede desconocerse.

Para la descripción de los esquemas de pensamiento presentes en los textos analizamos los temas y tópicos propuestos y el sentido de proponerlos como objetos de enseñanza; separación entre lo discreto y lo continuo y las actividades de aprendizaje. Las tablas que ha continuación se presentan describen los resultados de los análisis de cada colección:

Tabla 1

Cc - Niveles	Temas, tópicos, actividades de aprendizaje
Tercero	Separación entre lo discreto y lo continuo, énfasis en la medición exacta. Números naturales y sus propiedades. Conceptos geométricos Presentación de actividades cuasi matemáticas
Cuarto	Enfasis en las propiedades de los Números naturales. Ampliación de números al sistema de los fraccionarios, división con resto. Separación entre lo discreto y lo continuo. Ampliación de conceptos geométricos y su relación con la medición exacta. Presentación de actividades de aprendizaje cuasi matemáticas
Quinto	Ampliación de propiedades y operaciones en los naturales, potenciación, radicación. Ampliación de números a los fraccionarios decimales. Sistema Métrico Decimal. Separación entre lo discreto y lo continuo
Esquema de pensamiento	Deductivo

En esta colección, aunque dirigida a las escuelas del campo colombiano, no se incluyen escenarios asociados a fenómenos de la naturaleza. Se utilizan situaciones del campo de tipo verbal, pero de manera estática, se enfatiza las representaciones numéricas. Se podría concluir que el único objetivo de la enseñanza es la de aprender una aritmética "teórica". Resalta también el sentido con que se asume la construcción por parte de los estudiantes, pues el sentido de las preguntas con las que se quiere interactuar con los estudiantes es el de respuesta única.

Tabla 2

CP – Niveles	Temas, tópicos, actividades de aprendizaje
Tercero	Separación entre lo discreto y lo continuo, énfasis en la medición exacta. Números naturales y sus propiedades. Conceptos geométricos Presentación de actividades cuasi matemáticas
Cuarto	Separación entre lo discreto y lo continuo. Introducción de la representación decimal de los fraccionarios. Ampliación de conceptos geométricos
Quinto	Ampliación de propiedades y operaciones en los naturales, potenciación y radicación. Variación en el dominio de los geométrico. Introducción el infinito potencial a través de los procesos de división no exacta y en el dominio geométrico en el calculo de perímetro de la circunferencia y el área del círculo
Esquema de Pensamiento	Deductivo

Al igual que la colección descrita en primera instancia, ésta tiene el claro sentido de dirigir el aprendizaje exclusivamente al dominio de propiedades y hechos numéricos. La separación entre lo discreto y lo continuo se mantiene. Las dos series conservan el mismo estilo y las variaciones que puede encontrarse residen en los escenarios utilizados. En esta serie, no se incluyen situaciones referidas al campo, por ejemplo. Ambas series refuerzan la idea de satisfacer secciones de prerrequisitos para el curso siguiente, pero sin tener la prospectiva del desarrollo de hilos conductores que entrejen la red de campos conceptuales.

Tabla 3

Cp - niveles	Temas, tópicos, actividades de aprendizaje
Tercero	Relaciones entre número y magnitud Medición. Decimales. Estimación de resultados de operaciones y de mediciones Cálculo de divisiones con resto con ayuda de la calculadora.
Cuarto	Redondeo de números en la recta numérica ; redondeo a decenas y centenas. Estimación y aproximación a estimaciones. Decimales Estudio de variaciones representadas gráficamente Conteo en décimas, Encontrar decimales situados entre dos
Quinto	Comparar y ordenar decimales, Redondeo de decimales Estimación de números y de medidas. Lectura e interpretación de gráficas lineales. Redondeo en la estimación de productos Ubicación en la recta de puntos correspondientes a decimales y fracciones
Esquema de Pensamiento	Inductivo

En esta colección se puede rastrear hilos conductores que llevarían al desarrollo de las nociones básicas del Cálculo. Pues más que estar dirigida a la enseñanza de los fundamentos, coloca el acento en la paulatina construcción de atributos como el continuo, a través de tareas con y sobre los decimales. Resalta la introducción, aparentemente temprana de la variación, sus representaciones tabulares y gráficas y así mismo, la construcción de la aproximación propiciada a través de acciones como estimar, redondear, acerca al estudiante de este nivel a desarrollar ideas matemáticas partiendo de impulsar el desarrollo de intuiciones. Otro aspecto que sobresale en esta serie es el desarrollo de estos hilos conductores que se realizan a través de acciones , como visualizar en tablas y gráficas ; representar diagramas, tablas y gráficas, entre otras.

Conclusiones

Teniendo en cuenta que si bien el texto es un intermediario de gran valor entre el saber escolar y el saber aprendido, su análisis nos permite extraer consecuencias acerca de la enseñanza de las matemáticas. Entre las que se destacan las siguientes :

Los autores de las colecciones colombianas tienden a organizar secuencias de enseñanza más que de aprendizaje, orientadas desde esquemas de pensamiento deductivo, mezclando el sentido de la matemática griega con el periodo estructural. Se secuencia más en el términos de prerrequisitos, que del desarrollo de hilos conductores que subyacen en la estructuración de campos. Ello se debe a la transcripción de currículos orientados con tales fines. Aunque no hay evidencia suficiente, se puede inferir que se desconoce la sinuosa trayectoria histórica, aún de los saberes que presentan, de las matemáticas, pues aún en las tareas e interrogantes formulados no dan lugar al uso de descripciones y métodos informarles e imperfectos de solución. La precisión de las respuestas, se asocia con el rigor de la matemática.

Estas características propias de una matemática, la propia del estilo griego, no significa que son incompatible con el nuevo estilo que presupone el estudio del cambio. "Rigor y precisión son tan esenciales en la matemática como la experimentación lo es para las ciencias" afirma Ian Stewart (1998, p 1969), lo que se requiere es aceptar y desarrollar el nuevo estilo de matemáticas que presupone la matematización del cambio. Desde este punto de vista, sería necesario aceptar que tanto en su desarrollo histórico como en la actualidad, la matemática se desarrolla en estrecha conexión con sus aplicaciones en otras ciencias.

Bibliografía

BOYER,C. Historia de la Matemática. Alianza Universidad. 1986

CANTORAL, R. RESENDIZ, E. El significado y el sentido de las nociones de variable y variación en los textos. Memorias 10o.Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores y Matemática Educativa. 1996. Universidad de Puerto Rico. Universidad Interamericana de Puerto Rico. Recinto Ponce.

CORNU,B. Quelques obstacles a l´aprentissage de la notion de limite. Seminaire de Didactique et Pedagogie des Matematiques. Laboratoire de Matematiques Pures. No.34 Universite de Grenoble, 1982.

GARCÍA, G. ESPITIA,L.E. SERRANO,C. Un estudio de análisis de contenido de variación , dependencia y representación en textos escolares colombianos de la Educación Básica Secundaria. Memorias 10o.Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores y Matemática Educativa. 1996. Universidad de Puerto Rico. Universidad Interamericana de Puerto Rico. Recinto Ponce.

GARCÍA, G. ESPITIA,L.E. SERRANO,C. El concepto de función en textos escolares. Universidad Pedagógica Nacional. Colciencias. 1997

KLINE, M. El pensamiento matemático : De los antiguos hasta hoy. Alianza Universidad. 1992.

ORTON, T. Introducing calculus : ¿an accumulation of teaching ideas ? INT. J. MATH. EDUC. SCI. TECHNOL. Vol 17 No.6, 1986.

ROBINET, J . Une experience D´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol 4 No.3, 1983.

SIERPINSKA, A. Obstacles Epistemológicos relatifs a la notion de limite. Recherches en Didactiques de Matematiques. Vol 6, No. 1, 1985

.... On Understanding the Notion of Function. Dubinsky , Harel De. The concept of function . Aspects of Epistemology and Pedagogy. M.A.A.1990

Resolución de ecuaciones con Valor Absoluto. Una experiencia en nivel medio superior

Norma Rosa Cerizola, Nélida Haydée Pérez, Ruth Martínez, Dora Franzini
Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de San Luis
Argentina

Resumen

Este trabajo surge a partir de una experiencia realizada con alumnos del último año de nivel medio del sistema educativo argentino.

La temática: "resolución de ecuaciones con valor absoluto", fue elegida teniendo en cuenta la relevancia del concepto "valor absoluto" para el posterior desarrollo del Cálculo, como así también el manejo fluido de igualdades y desigualdades en donde este concepto está involucrado.

Se considera como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, privilegiándose en este caso el registro gráfico.

Utilizando la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación para guiar experimentaciones en clase, se explicita el análisis preliminar en sus componentes epistemológica, cognitiva y didáctica; el consecuente diseño de la ingeniería, el análisis de la experiencia y conclusiones.

Introducción

El valor absoluto de un número real es una noción fundamental en Cálculo. No sólo posee un valor intrínseco sino que en él se apoyan las definiciones de conceptos como distancia entre dos puntos, entorno y los sustanciales de límite y de continuidad.

La comprensión de estos dos últimos se convierte en un obstáculo epistemológico en el aprendizaje, tal como lo muestran numerosas investigaciones. [Cornu, B. 1983, Sierpinska, A. 1987, Cantoral, R y Farfán, M. 1989, Williams, S. 1991, Artigue, M. 1995].

Reflexionando sobre estos hechos, nos preguntamos ¿ no sería conveniente indagar si, una de las causas es la incomprensión de una noción básica como la de valor absoluto?. Nos parece tan simple que, en su enseñanza rara vez le otorgamos un tratamiento exhaustivo. Tampoco nos preguntamos si el enfoque es el adecuado, sobre todo teniendo en cuenta la necesidad de iniciar a los alumnos en el pensamiento variacional, necesario para captar la esencia del Cálculo.

Con respecto a lo señalado, hemos podido constatar que en la enseñanza del Precálculo no se pone suficiente énfasis en diseñar situaciones para que los alumnos comprendan este concepto. Sus propiedades son simplemente enumeradas y, sus primeras aplicaciones, como resolución de igualdades y desigualdades con valor absoluto se tratan muy someramente.

Por ello decidimos realizar una investigación, donde la población estuvo constituida por alumnos del último año de bachillerato con orientación en Ciencias Naturales, Salud y Ambiente, pertenecientes a un colegio de carácter público de la Ciudad de San Luis, Argentina. Adoptamos como enfoque cognitivo el basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de la matemática.

Este enfoque considera *que "la comprensión de un concepto matemático involucra la articulación coherente de los diferentes sistemas semióticos que entran en juego en la reso-*

lución de problemas" y, que "un conocimiento asociado a un concepto es estable en un individuo, si él puede articular las diferentes representaciones de un objeto sin contradicciones" [Guzmán, I. 1998. RELIME, México, Vol. I. Año 1, 5-21].

Desde este enfoque, el traslado de un registro a otro es una confrontación de representaciones de diferente naturaleza de un mismo objeto. Se realiza en forma natural cuando son semánticamente congruentes. Sin embargo es un obstáculo serio cuando no hay congruencia.

Una de las contradicciones suele aparecer, por ejemplo, en el caso de funciones de la forma f(x)=x+a. Muchos estudiantes, influenciados por la notación algebraica, interpretan el signo más del segundo miembro como una traslación de la gráfica de f(x)=x hacia la derecha, cuando lo correcto es trasladarla hacia la izquierda.

Además, este enfoque contempla la adquisición de estrategias de utilización de aquellos sistemas semióticos que facilitan la interpretación, la vía de solución y el control de resultados, de acuerdo a las características del problema. El objetivo de la experiencia fue, indagar y poner en evidencia los registros de representación que manejaban los alumnos y, cuáles priorizaban al resolver ecuaciones con valor absoluto.

Para su diseño, tomamos en consideración los fundamentos y metodología de la Ingeniería Didáctica como un instrumento eficaz para guiar experimentaciones en clase. Esta metodología de investigación, contempla aspectos cruciales que no se pueden ignorar para el posterior diseño de una ingeniería: el análisis preliminar en sus componentes didáctica, epistemológica y cognitiva, es decir *"el diagnóstico sobre el funcionamiento del sistema de enseñanza, de los efectos que produce en las concepciones de los estudiantes y en un aspecto sustancial: la naturaleza intrínseca del saber matemático que se pone en escena en la situación escolar".* [Farfán R.M.1987. *Antologías Nº 2, Cinvestav, México.55-119*].

Análisis Preliminar

Estudio Didáctico

En nuestro sistema educativo, la enseñanza del concepto: valor absoluto de un número real y de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, se imparte en el último curso del nivel medio superior, poniéndose más énfasis en los bachilleratos con orientación científica o técnica, ya que la currícula de los mismos contempla un tratamiento más profundo de temas de Precálculo.

La definición que generalmente se utiliza es la siguiente: *El valor absoluto de un número real x, que se denota* |x|, *es:*

$$(*) \qquad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

A partir de esta definición se deducen las siguientes propiedades, que luego se emplean para resolver ecuaciones e inecuaciones.

a. **|x| = a** *(con a>0), es equivalente a:* ***x =a ó x = -a***

b. **|x| < a** *(con a>0), es equivalente a:* ***x<a y x > -a**, es decir* ***-a < x < a***

c. **|x| > a** *es equivalente a:* ***x >a ó x <-a***

Dentro de este contexto, se proponen ejercicios como los siguientes:

Resolver, especificando el conjunto solución:

1. $|x+3|=6$; 2. $|1-4x|=13$; 3. $|2x-9|<1$; 4. $|5-2x|>3$

5. $|2x+1|=x-4$;6. $|2x+6|<4x-1$; 7. $|5x-3|\geq 1+3x$

Para su resolución, utilizando las propiedades antes mencionadas, se emplean procedimientos algebraicos y razonamientos basados en la lógica que, según sean las características de la ecuación o inecuación, adquieren distinta complejidad. Constituyen un buen ejercicio algorítmico y de razonamiento lógico, con el cual es posible lograr un virtuosismo en los cálculos y en el uso de conectivos. En la enseñanza se jerarquizan procedimientos que corresponden al registro algebraico, dejando de lado el registro gráfico. En particular, en el caso que nos ocupa, la "acción" de la función valor absoluto sobre números negativos, recurso visual muy útil para encontrar la solución, tanto de ecuaciones como de inecuaciones del tipo señalado.

Estudio epistemológico

Esta fase debe contemplar, en uno de sus aspectos, *el contenido matemático en juego, sus diversas formulaciones y su funcionamiento, tanto en el contexto teórico como áulico.*

A continuación realizamos un análisis de diferentes definiciones de valor absoluto y de las ventajas y desventajas de cada una de ellas, especialmente en lo relativo a su aplicación en la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

a) **La definición de valor absoluto (*)**

Esta definición acarrea dificultades a la hora de su comprensión. Un aspecto a tener en cuenta es que se trata de una definición funcional "por casos" o "por partes". A la mayoría de los alumnos le resulta difícil su interpretación y, por consiguiente su aplicación.

La notación algebraica se constituye en otro factor de incomprensión, especialmente en la segunda parte de la definición (*): **"-x, si x < 0"**. El signo menos delante de la **x** los induce a asumir que se trata de un número negativo, produciendo interpretaciones erróneas **al soslayar la condición x< 0.** Como consecuencia les resulta difícil entender que el valor absoluto de un número real es siempre mayor o igual a cero.

Esta incomprensión de la definición se manifiesta en situaciones más complejas, como las que aparecen al tratar valores absolutos de funciones arbitrarias.

Ejemplificamos uno de los errores más frecuentes:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) \text{ si } x\geq 0 \\ -f(x) \text{ si } x<0 \end{cases} \qquad \text{en un ejemplo} \qquad |2x-1|=\begin{cases} 2x-1 \text{ si } x\geq 0 \\ -(2x-1) \text{ si } x<0 \end{cases}$$

Aún superado este obstáculo, otra dificultad de esta definición por partes radica en que, es ineludible la aplicación del método de análisis de casos para la continuación del proceso de resolución, tanto de ecuaciones como de inecuaciones.

Por este método, en cada caso se debe encontrar una solución dentro de un campo determinado por las condiciones del mismo, y para la solución global es necesario considerar aquellas que satisfacen las condiciones según sean los conectivos lógicos involucrados. Por ejemplo para resolver ecuaciones como:

• $|2x+6|=x-1$; • $|x^2-x-6|=x+2$,

o inecuaciones como:

- $|2x+6| < x-1$; • $|x^2-x-6| \geq x+2$,

Hemos podido observar que, algunos estudiantes eligen acertadamente los casos a considerar, resolviendo en forma correcta las ecuaciones según las condiciones de cada caso particular. Sin embargo, no tienen en cuenta las condiciones globales y los consecuentes conectivos lógicos. Esto los conduce a dar una respuesta fragmentada, sin arribar al conjunto solución.

Otro aspecto digno de destacar es que, el método algebraico no aporta un modo de control en cuanto a la anticipación de las características de la solución y - en problemas más complejos - una vez determinada. Priva por lo tanto al alumno, de una herramienta eficaz a utilizar en el control de la solución.

b) **El valor absoluto de un número real como distancia**.

Considerando que los números reales se representan geométricamente como puntos de una recta, podemos pensar $|x|$ como distancia en sentido geométrico, es decir como la longitud del segmento que tiene como extremos **0** y **x.**

Del mismo modo $|x-a|$ es la distancia entre x y a, siendo x y a números reales arbitrarios.

Esta definición de valor absoluto en el contexto de distancia es muy útil para la resolución de ciertas ecuaciones e inecuaciones como las siguientes:

I) $|x-1|=3$

II) $|x-1| \leq 3$

ya que provee de economía a los procesos de resolución y permite una visualización que facilita la interpretación de la misma y el control de la solución. Si en cambio se quieren hallar, las soluciones de: $|x-3| < x+5$; $|3x-1|<|2x+7|$;| $|x|-1| =2$, puede comprobarse fácilmente que este punto de vista tiene serias limitaciones.

c) $|x| = \text{máx}\{x, -x\}$.

La utilidad de esta definición, para la resolución de ecuaciones e inecuaciones tiene las mismas desventajas de la definición funcional, pues es necesario utilizar consecuencias que se desprenden de ella, idénticas a las detalladas en el ítem a).

d) Tratamiento del valor absoluto utilizando la gráfica de f(x)=|x|

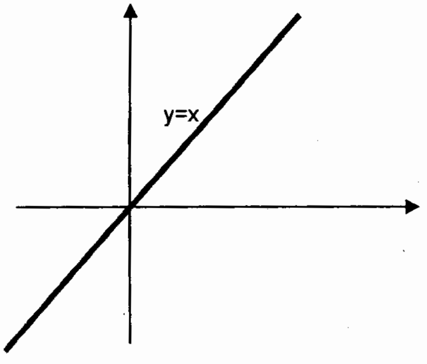
Otro modo de abordar estos problemas es utilizar como recurso las gráficas de funciones. Para el caso de ecuaciones e inecuaciones lineales, se recurrirá a los conocimientos de las funciones lineales: $y=ax+b$.

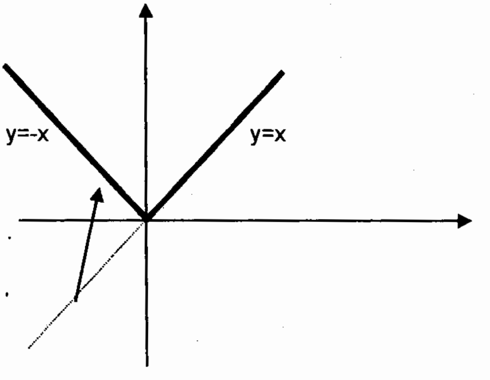
Así, para resolver: $x-1=3$ ó $x-1< 3$, utilizando las gráficas de $f(x)=x-1$ y de $f(x)=3$, bastará hallar las abscisas de los puntos de corte de ellas. En el segundo ejemplo, el conjunto solución está constituido por todos los números reales **x** tales que la recta $y=x-1$ "permanezca por debajo" de la recta $y=3$.

Este procedimiento establece una comparación entre gráficas de rectas, lo que permite una visualización clara del problema.

¿Cómo utilizar el registro gráfico para resolver ecuaciones del tipo $|x-1|=3$?. Debemos preguntarnos cuál es el "efecto gráfico" de la aplicación del valor absoluto a funciones lineales.

El valor absoluto es una función que asigna valores no negativos, por lo que, si el número es negativo, basta con multiplicarlo por –1. Este hecho, en el registro gráfico y para $g(x)=|f(x)|$, se traduce en una reflexión de las imágenes negativas de f(x), respecto del eje **x**, quedando fijas las imágenes positivas. Así, por ejemplo, la gráfica de $y=|x|$ se obtiene a partir de la gráfica de la función identidad y=x.





Por lo tanto, para resolver $|x-1|=3$, comenzamos graficando y=x-3, y aplicamos una reflexión con respecto del eje x de la parte negativa de la gráfica. Una vez obtenida la gráfica de $y=|x-3|$, procedemos a hallar la abscisa del punto de intersección de ella con la gráfica de y=3.

En ejemplos como el dado no se vislumbra la eficacia del método, si lo comparamos con el que provee la definición (*). Sin embargo debemos poner énfasis en el estudio de métodos de resoluciones gráficas de ecuaciones aún siendo sencillas, pues él constituye la base conceptual y procedimental para avanzar en el estudio de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto más complejas.

Es aquí donde la potencia del uso del registro gráfico se pone de manifiesto al resolver ecuaciones e inecuaciones como las siguientes:

• $||x|-1|-1|=5$; • $|x+2| < 3x+4$; • $|x^2-3x+2| > 4x+7$.

El análisis de la dimensión epistemológica, en cuanto a la construcción histórica de la matemática, es una componente fundamental de la metodología de la Ingeniería Didáctica, no sólo por el aporte de elementos importantes para el diseño o análisis a priori, sino que permite detectar obstáculos epistemológicos que se encuentran en la evolución de los conceptos mismos.

En cuanto al valor absoluto de un número real, en la obra de Cauchy: "*Curso de Análisis*" publicada en el año 1821, en lo que el autor llamó *Preliminares* (donde fijó el significado de los términos y notaciones), aparece ya el germen del concepto de valor absoluto al expresar:

"*.....el signo + o el signo – puesto frente a un número modificará su significado, de manera similar a como un adjetivo modifica el de un sustantivo...*"

Cuando Weierstrass (1841-1856), en su trabajo sobre rigorización del análisis, (que recién se conoció en 1859), establece la definición - hoy aceptada - de función continua en un punto, ya utiliza el concepto de valor absoluto. También lo hace Heine, quien en sus *Elemente* (1872), escritos bajo la influencia directa de las lecciones de Weierstrass, define límite de una función f(x) en x_0 de la manera siguiente:

"Si, dado cualquier ε , existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x \pm \eta)$-L es menor en valor absoluto que ε ,entonces se dice que L es el limite de f(x) para x= x_0*"* [Boyer, C B (1986) *"Historia de la matemática"*, Ed. Alianza, Madrid, pág. 345].

Es fácil reconocer aquí la definición de límite que aparece en los textos actuales, sólo que en ella se usa la notación de valor absoluto y la η ha sido reemplazada por otra letra griega, la δ.

Si analizamos la definición "por partes" de valor absoluto, reconocemos inmediatamente que la misma, es su definición funcional. La elaboración del concepto mismo de función y el establecimiento de propiedades como continuidad, derivabilidad e integrabilidad constituyó un largo proceso, con obstáculos que, sólo se salvaron al establecer los fundamentos lógicos de los números reales hacia fines del siglo XIX.

Este proceso comenzó en el siglo XIV, afianzándose el concepto en el siglo XVII, al integrarse el álgebra y la geometría con la invención de la geometría analítica. El concepto de función cobra verdadera importancia cuando Leonard Euler en su obra "*Introductio in Analysis Infinitorum*" (1748) organiza el análisis alrededor del mismo, como relación entre dos variables mediante una expresión algebraica.

Sin embargo, los matemáticos del siglo XVIII sustentaban la concepción de que una función debía tener la misma expresión analítica en todas partes. Durante la parte final del siglo, en gran medida como consecuencia de la controversia sobre el problema de la cuerda vibrante, Euler y Lagrange permitieron las funciones con diferentes expresiones analíticas en distintos dominios. Sin embargo consideraron **continuas** a estas funciones donde se mantenía la misma expresión y, **discontinuas** en puntos donde la expresión cambiaba de forma. Hoy aceptamos que, las funciones continuas pueden estar definidas por más de una expresión, tal es el caso de la función valor absoluto.

Lo expuesto pone en evidencia el obstáculo epistemológico que, a nivel teórico, constituyó para la Ciencia Matemática la construcción del concepto de función, aceptándose tardíamente funciones definidas por más de una expresión analítica.

Esta complejidad del concepto de función se refleja también en las concepciones sustentadas por los alumnos. Los obstáculos, al igual que en el devenir de la construcción de esta noción, son mayores cuando se trata de funciones definidas por partes como lo es la función valor absoluto.

Estudio cognitivo

Para tener un panorama del nivel cognitivo de los alumnos respecto a la noción de valor absoluto, y resolución de ecuaciones en una variable en donde interviene este concepto, se realizó con ellos una actividad de carácter exploratorio, consistente en:

Resolver en forma grupal, utilizando lápiz y papel, las siguientes ecuaciones:

a) $|2x+1| = 0$ b) $|2x+1| = 2$ c) $|2|x|+1| = 2$

y posteriormente *graficar*: y=x, y=x-1, y=x+2

Lo que surgió en primera instancia fue que, en la enseñanza recibida hasta el momento de la experiencia, el valor absoluto de un número se había introducido informalmente del siguiente modo: *"el valor absoluto de un número es: dicho número sin el signo".* Los alumnos, por lo tanto no estaban familiarizados con ninguna definición formal del concepto.

Sus conocimientos de gráficas de funciones lineales, estaban olvidados. Sin embargo, luego utilizaron tablas de valores, valiéndose de ellas para graficar. Recordaron haber estudiado rectas y parábolas en años anteriores, pero no las diferenciaban a partir de sus expresiones analíticas. Varias pueden ser las causas del estado de estos conocimientos. Sin embargo, nos animamos a inferir que en la enseñanza de la matemática impartida a este grupo de alumnos, no se ha puesto énfasis en un tratamiento formal de valor absoluto ni en reforzar el dominio del registro gráfico.

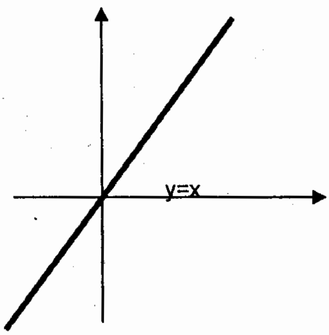
Diseño de la Ingeniería

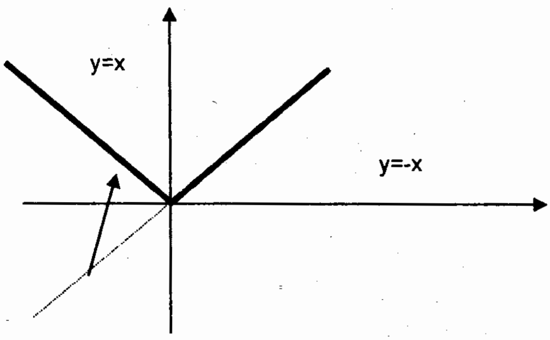
Sobre la base del esclarecimiento que logramos de la problemática, a través de los estudios didáctico, epistemológico y cognitivo, establecimos como objetivo indagar la posibilidad de que el grupo de alumnos utilizara el conocimiento de las gráficas de funciones lineales del tipo y=ax+b para resolver problemas de ecuaciones con valor absoluto, sin emplear el desdoblamiento por análisis de casos, y partiendo de problemas simples.

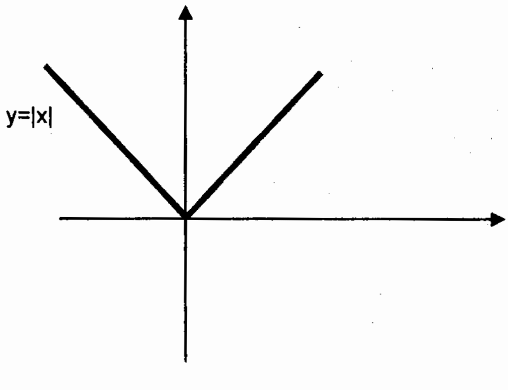
Transcribimos a continuación la ingeniería diseñada:

Actividad 1: ¿Cómo opera el valor absoluto sobre la función y=x?

Observa con detenimiento las siguientes gráficas:







¿Puedes obtener alguna conclusión?

El objetivo de esta actividad, claramente del tipo "mirar y ver", fue indagar sobre la capacidad de inferencia de los alumnos, a través de una secuencia en registro gráfico, relativa al "efecto" del valor absoluto sobre la gráfica de f(x)=x.

Actividad 2: Utilizando lo anterior, graficar $y=|x+1|$

Esta actividad tuvo como objetivo esclarecer si los estudiantes podían transferir los conocimientos adquiridos en la actividad anterior, a funciones lineales trasladadas.

Actividad 3: A partir del gráfico de la actividad (2) determinar la solución de:

a) $|x-1|=0$ b) $|x-1|=3$ c) $|x-1|=-5$

El objetivo de esta actividad fue explorar si los alumnos recurrían al método gráfico para solucionar ecuaciones sencillas con valor absoluto.

Actividad 4: Resolver:

e) $||x|-1|=1$ f) $||x|-1|=1|2$

Se incluyó esta actividad más compleja para indagar sobre la capacidad de abordaje de las mismas por parte de los estudiantes, a partir de las ya realizadas.

Ámbito de desarrollo de la experiencia

Quisimos crear un ámbito áulico tranquilo y cordial para favorecer las producciones de los alumnos tanto escritas como orales. Por ello, una de nosotras actuó como coordinadora durante el desarrollo de la experiencia.

Esto permitió que los alumnos se comportaran sin inhibiciones. A través de sus expresiones espontáneas pudimos develar concepciones y actitudes ante situaciones problemáticas nuevas para ellos, tanto por el tema abordado como por las características de su tratamiento.

Se logró un buen nivel de participación, mostraron interés en su mayoría. Sólo dos de los veinticinco alumnos permanecieron al margen durante todo el desarrollo de la experiencia.

Análisis de las producciones de los alumnos

En la primera actividad, fue notoria la actitud de casi todos los estudiantes ante una consigna de esta naturaleza. La obviaron sin tener en cuenta lo que se les pedía, pasando rápidamente a la siguiente. Se puso en evidencia la falta de entrenamiento en este tipo de actividades.

En la segunda actividad sólo ponderaron la orden "graficar", ignorando el sentido global de la consigna.

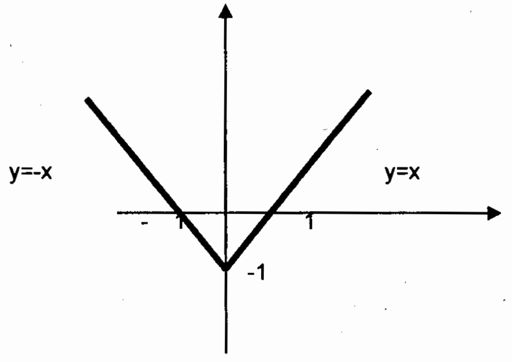
Algunas de las expresiones fueron: "Aquí no hay que hacer nada, vayamos a la otra actividad".

Sólo un grupo se detuvo en ella y, luego de unos minutos se les escuchó decir: "la gráfica rebota..."

Respecto a las siguientes actividades hemos clasificado los trabajos de los alumnos (tanto producciones escritas como discusiones grupales) según características similares para facilitar su descripción

Grupo 1

En la actividad 2, dibujaron la gráfica:



- La gráfica errónea los indujo a dar dos soluciones para el problema 3 a): x=1 y x=-1.
- Debido a la simetría de la gráfica, dieron como solución x=±4 para |x-1|=3
- No se percataron de la no existencia de solución para |x-1|=-5 y su respuesta fue x=±5.

Grupo 2

Graficaron de idéntico modo que los integrantes del Grupo 1. Sin embargo, no utilizaron la gráfica, recurriendo al registro algebraico. Volviendo a omitir el valor absoluto y dando en consecuencia una sola solución.

Es destacable cómo persistieron concepciones erróneas, pues en el ejercicio c), despejando, obtuvieron x = -4. Sin embargo respondieron: "no se puede, porque es valor absoluto".

Grupo 3

No intentaron dar soluciones a través de gráficas. Sus respuestas fueron solamente:

a) x=1.

b) x=-2, x=4.

c) no responden.

Grupo 4

A partir de una tabla de valores, graficaron correctamente y=|x-1|.Utilizando la gráfica, obtuvieron soluciones correctas para a), b) y c). Sin embargo, a partir de la justificación de c): "no tiene solución debido a que el valor absoluto actúa únicamente en los positivos", se pueden inferir dos cosas: Que, hay una concepción equivocada o que han utilizado la palabra "actúa" erróneamente, pero que el razonamiento es correcto.

Es el único grupo que resolvió los ítems d) y e). Graficaron bien y=||x|-1| y hallaron correctamente las soluciones.

Grupo 5

No escriben nada. Sin embargo se enfrascan en la discusión de cómo es la gráfica de y=x+1. Algunos opinan que, como y=x pasa por cero, al sumarle uno, la gráfica de y=x sube una unidad. Otros, en cambio dicen que la recta y=x se corre hacia la derecha. Uno de los alumnos expresa: "como la función toma el mismo valor para 1 y –1, se trata de una gráfica así", trazando en el aire una parábola. "Entonces las ecuaciones son de segundo grado porque tienen dos soluciones. Yo no las sé resolver, había que aplicar una fórmula y no la recuerdo".

Conclusiones y algunas recomendaciones

1. La introducción de la noción de valor absoluto de un número como: "es el número sin el signo", acarrea serios obstáculos, ya que el alumno debe cambiar sus esquemas ante la definición formal.

Es preferible introducirlo a través del concepto de distancia, poniendo énfasis en su significado recurriendo a la recta real, a fin de favorecer su comprensión. Posteriormente, en cursos más avanzados introducir su tratamiento como función, manteniéndose preferiblemente en el registro gráfico.

2. A partir del análisis de los trabajos grupales, especialmente en las actividades detalladas en el Estudio Cognitivo, podemos inferir *que la totalidad recurrió al registro algebraico para resolver las ecuaciones.*

Un 80% ignoró la notación de barras del valor absoluto y trabajó como si se tratasen de ecuaciones lineales. Es de destacar que algunos grupos interpretaron las barras como corchetes y otros como paréntesis. En la ecuación c) las barras fueron interpretadas como corchetes y paréntesis, de acuerdo a las convenciones de la notación algebraica. *Observamos que, ante ecuaciones totalmente desconocidas, intentaron igualmente resolverlas, tratando de asimilarlas a un campo conceptual conocido: resolución de ecuaciones lineales, adaptando incluso la notación propia del registro algebraico.*

Sólo el 20% utilizó el método de "ensayo y error", pero ignoraron las barras de valor absoluto obteniendo una única solución.

Sin embargo, este método fue cuestionado por otros alumnos expresando: "así no vale... eso no es matemático".

Probablemente esta concepción provenga de las prácticas docentes, pues en ellas frecuentemente se pone énfasis en un tratamiento puramente algebraico de las ecuaciones, aún en aquéllas tan simples que es posible dar la solución sin aplicar ningún procedimiento.

Aquí debemos destacar la importancia de promover el uso del método de ensayo y error. El mismo reafirma el concepto de solución de una ecuación y de control previo de ella, aspectos que con el tratamiento algebraico se diluyen. En la enseñanza de resolución de ecuaciones, es conveniente comenzar con ecuaciones sencillas, donde el estudiante use la prueba para hallar la solución. Luego se lo enfrentará a ecuaciones más complejas, donde el método de "ensayo y error" no resulte. A partir de allí se lo introducirá en los métodos algebraico y gráfico. De este modo hará significativos los nuevos conocimientos, percibiéndolos como instrumentos matemáticos útiles y poderosos.

3. En varios alumnos emergió y persistió la concepción errónea de que *"una ecuación con valor absoluto siempre tiene que tener solución no negativa, pues el valor absoluto de un número tiene esta propiedad".* Esta confusión posiblemente es atribuible a que no se ubican en el contexto de resolución de ecuaciones, primando en el pensamiento la característica primordial del valor absoluto.

Solamente, a partir de ser inducidos pudieron percatarse de la posibilidad de existencia de más de una solución. Ante este hecho algunos las asimilan al campo de las ecuaciones cuadráticas. *La aparición de dos soluciones, los lleva a obviar que la incógnita, en las ecuaciones tratadas, no está elevada al cuadrado. Evidentemente ha primado el hecho de existencia de más de una solución sobre la expresión algebraica que las diferencia. Este aspecto es remarcable, pues se da con frecuencia en el aprendizaje: recurrir a un campo conceptual más complejo y, como excusa no abordar el problema.*

4. Cuando la coordinadora, en una de sus intervenciones, indujo a graficar las rectas horizontales para encontrar los puntos de corte de la gráfica de una función con valor absoluto, para hallar las soluciones de la ecuación, varios alumnos lograron captar la "técnica del método gráfico", no así su "esencia".

No se percataron de los conceptos que dan fundamento a este método. Este hecho puso en evidencia la falta de conocimiento y adiestramiento en el registro gráfico, a pesar de que en años anteriores han estudiado sistemas lineales. *No se permiten cuestionamientos, sólo obedecen al docente.*

5. Se percibió claramente la dificultad que el enfoque semiótico remarca cuando no hay congruencia entre registros.

La confusión al tratar de graficar y=x+1 y la discusión sobre si la gráfica "subía o se trasladaba hacia la derecha" es una prueba de ello.

6. Los alumnos se sintieron atraídos ante una enseñanza no rutinaria de la matemática, asumiendo un papel activo, no siendo sólo meros espectadores. Rescatamos también el hecho significativo de que percibieron la utilidad de conceptos aprendidos en años anteriores en un contexto de uso posterior, por ejemplo: ecuación de la recta y su representación gráfica.

Recomendamos al respecto, presentar un concepto en distintos registros de representación, ya que la adquisición del mismo está profundamente ligada a la coordinación fluida entre los registros.

Debemos utilizar nuestro "poder" como docentes (en sentido benéfico) y "obligar" a nuestros alumnos a utilizar el registro más conveniente para la resolución de un problema, pues la mente persiste en remitirse a campos conceptuales conocidos que, a veces no proveen de las herramientas más efectivas para la resolución del mismo. Así, en el caso de resolución de ecuaciones e inecuaciones el registro gráfico es claramente superior.

Uno de los obstáculos, en lo que concierne a la apropiación del concepto central del Análisis: "función", es que éste debe considerarse como proceso *y como* objeto. *Aquí el registro gráfico se constituye en un instrumento muy útil para la asimilación y distinción de estos dos aspectos. Por un lado la gráfica pone de manifiesto la* variabilidad *– aspecto esencial involucrado – y, por otro permite percibir a la función* en forma completa, *como un objeto sobre el que se puede operar (por ejemplo derivar o integrar).*

Esto debe tenerse ya en cuenta y muy especialmente, en la enseñanza del Precálculo, donde es conveniente poner énfasis en el registro gráfico, ya que "... las habilidades algebraicas y lógicas que desarrolla la minoría (de los estudiantes) no contribuyen sustancialmente, a un posterior estudio del Cálculo" *[Farfán, R y Albert, A 1997, Cuadernos Didácticos, Vol. 3, pág. 1, México, Gr.Ed.Ib.]*

Recomendamos finalmente garantizar un espacio para que los alumnos puedan expresarse. El lenguaje natural y de discusión entre el profesor y los compañeros registrará la significación de lo que se estudie de una manera diferente.

Referencias Bibliográficas:

Cauchy, A. L. *"Curso de análisis"*. Selección y traducción de Jiménez, C. A. Colección MATHEMA (1994). UNAM. México.

Farfán R.M. (1997). *"Ingeniería Didáctica, un estudio de la variación y el cambio"*. México, Grupo Editorial Iberoamericana.

Farfán R.M. - Albert A. (1997). *"Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades"*. México, Grupo Editorial Iberoamericana.

Guzmán, I. (1998). *"Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes"*. RELIME, Vol. I. Año 1, 5-21. Publicación oficial del Clame, México.

Farfán R.M. (1987). *"Perspectivas y métodos de investigación en matemática educativa"*. Antologías N°2, Programa Editorial del Cinvestav, México. 55-119.

Azcárate, Carmen (1995). *"Sistemas de representación"*, UNO, Vol. 4, Año II, pp. 53-61. Barcelona, España. GRAÓ Educación.

Artigue, M *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos* (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. P. Gómez(Ed), pp 97-140, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Estudio didáctico de la resolución gráfica de Inecuaciones

María Amelia Mini, Héctor Oscar Paez

Resumen

El presente trabajo consiste en el diseño, ejecución y análisis de resultados de una serie de actividades encaminadas a que el estudiante ante la complejidad de arribar a una solución algebraica, frente a una inecuación, recurriera naturalmente a la utilización del método gráfico.

Las acciones inducidas a los estudiantes se desarrollan paso a paso, partiendo de conceptos ya conocidos y trabajados por ellos, como el de funciones y sus gráficas , resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

Se empleó a la "ingeniería didáctica" como metodología de investigación para guiar experimentaciones en clase. Teniendo en cuenta los trabajos de investigación que adhieren a esta concepción de aprendizaje, una de las rutas a seguir es el diseño de materiales *ad hoc* para observar el efecto que se produce en los alumnos.

Situación didáctica diseñada

En el diseño de la actividad se solicita a los estudiantes: la definición de valor absoluto. Se les pide que grafiquen "sin evaluar" una serie de funciones, hasta arribar a una gráfica donde aparece el valor absoluto. Finalmente se les pide que "resuelvan" dos inecuaciones donde está presente el valor absoluto. Todo esto, con la finalidad de inducir al estudiante de recurrir a lo "gráfico", cuando lo algebraico se torna dificultoso.

La intención ahora, es observar qué logros y que dificultades se presentan cuando los estudiantes abordan la resolución de inecuaciones con valor absoluto, haciendo uso de la situación didáctica diseñada. Para ello, diseñamos una secuencia didáctica en la que se le proponen ejercicios con la finalidad de que pueda emplear recursos gráficos para la resolución de inecuaciones.

La Secuencia

Objetivos

- Observar si naturalmente los alumnos utilizan el método gráfico para resolver inecuaciones o si es necesario inducirlos a ello.
- Apreciar la riqueza del método gráfico sobre el algebraico.

Presentación del diseño

El diseño se estructura en dos fases

Primera fase

Esta fase es de acción preparatoria, pues en ella se pretende que el alumno recuerde la definición de la función "valor absoluto" y su gráfica; que analice cómo lograría la gráfica de $y = |x|$ a partir de $y = x$, usando solamente recursos geométricos. Seguidamente se le pide que reactualice la habilidad de graficar "sin evaluar" funciones sencillas como $y = 3$, $y = x^2$; $y = x^2 - 4$, finalmente en esta secuencia, se le solicita que, haciendo uso de las conclusiones a las que arribó en las actividades precedentes, grafique aproximadamente $y = |x^2 - 4|$.

Comentarios

Seguidamente damos un análisis a priori de los pasos de la fase, explicitando lo que se espera que sea el desarrollo de la actividad y las posibles dificultades que deberá sortear el estudiante.

Las actividades propuestas en esta fase tienden a que los estudiantes entren en acción, dibujando las gráficas de las funciones propuestas utilizando propiedades geométricas como simetrías y traslaciones con respecto a los ejes de coordenadas, visualizando el efecto que se produce en la gráfica de la función, cuando su expresión analítica está afectada por el valor absoluto, como en el caso $y = |x^2 - 4|$.

Algunos estudiantes pueden enfrentarse con la dificultad de querer realizar "de memoria" la gráfica de algunas funciones por ellos conocidas, sin intentar algún tipo de cálculo o la confección de tablas.

Pueden también tener inconvenientes al interpretar: " como obtener la gráfica de $y = |x|$ a partir de la gráfica $y = x$", multiplicando por *(-1)* los valores negativos de x de esta última función.

Es posible que algunos alumnos al tener que graficar la función constante $y = 3$, tengan que recurrir a la confección de una tabla para cerciorarse de que adquiere el mismo valor para todo x.

Pueda que recurran a la confección de tablas cuando se les requiera que "grafiquen sin evaluar".

Es posible que al tener que graficar $y = x^2 - 4$ **(*)**, no trasladen sobre el eje de las ordenadas la gráfica de la función $y = x^2$, realizada en el paso anterior, sino que recurran a la confección de una tabla.

Es probable que al tener que graficar la función (*) encerrada entre las barras de valor absoluto, no reflejen la parte negativa de la gráfica por encima del eje de las abscisas.

Segunda fase

En esta fase se aplican los conocimientos y destrezas adquiridas en la fase anterior para resolver inecuaciones.

Comentarios

Puede existir la dificultad de que los estudiantes no perciban el ejercicio presentado como una aplicación de lo que venían realizando.

Puede ser que el "salto" que hay entre la primera fase (ejercicios del 1 al 5), a la segunda (ejercicio 6), sea demasiado grande para los alumnos, ya que en las inecuaciones planteadas no aparece la y.

Pueden tener especial dificultad en resolver los ejercicios usando el método gráfico, por cuanto han sido entrenados para resolver inecuaciones en forma analítica, no permitiéndose imaginar y ni siquiera aceptar que a partir de la gráfica de una, o varias funciones, se puede llegar a resolver una inecuación más o menos complicada.

Posiblemente, si logran una solución empleando recursos gráficos, consideren que la misma carece del "rigor matemático".

Puede suceder que los estudiantes tengan dificultad de hallar las ecuaciones de las rectas que determinan los intervalos solución del ejercicio $||2x+3|-1| \geq \frac{1}{2}$.

Al finalizar la segunda fase se procederá a la puesta en común y discusión de la actividad por parte de los integrantes de los diferentes grupos.

Escenario

Las dos fases se llevaron a cabo en una sola sesión de dos horas, una para el trabajo de los estudiantes sobre la actividad y otra para la discusión y puesta en común.

Se formaron cuatro grupos, tres de ellos integrados por tres alumnos y uno por dos, todos ellos acompañados por uno o dos observadores. Los estudiantes pertenecían al segundo semestre del primer año de la carrera Licenciatura en Ciencias de la Computación, de la Universidad Nacional de San Luis, habiendo cursado en el semestre anterior Cálculo.

Los observadores elaboraron notas sobre la acción de los alumnos. Al finalizar la resolución de la Actividad, se les pidió a los estudiantes que expusieran su trabajo voluntariamente, para observar la argumentación de sus respuestas y la defensa de las mismas. La mayor parte de la resolución del práctico, como la totalidad de la puesta en común obra en una filmación.

Actividad desarrollada por los estudiantes

Los alumnos trazan bien las gráficas de las funciones valor absoluto e identidad.

Algunos alumnos al graficar la función constante $y = 3$, recurren a la tabla para cerciorarse de que y adquiere igual valor para todo x.

Les cuesta interpretar cómo lograr la gráfica de $y = |x|$ a partir de la gráfica $y = x$. Tratan de interpretar una parte de la gráfica $y = |x|$ a través de una función que dé únicamente resultados positivos, por ejemplo la función $y = x^2$. En un primer momento no se percatan del hecho que la función cuadrática no es una función lineal, si bien para los valores negativos de x cumple la condición que es siempre positiva. En uno de los grupos, al tener que graficar $y = x^2 - 4$, lo piensan hacer desde $y = x^2$, sin embargo hacen la tabla de valores. Dos estudiantes lo realizan a mano alzada (sin calcular los puntos), pero esperan que la tercera integrante del grupo realice la tabla de valores , para comenzar a graficar, como una forma de corroborar los resultados. En este mismo grupo, dos de las estudiantes siguen resolviendo la Actividad pensando gráficamente, mientras que la otra no se aparta de las tablas, no tiene claro el concepto de valor absoluto.

Al tener que efectuar la gráfica de: $y = |x^2 - 4|$, se pudo observar que:

- Un alumno, integrante del grupo más activo, dice: *" la panza la subimos para arriba, eso fue un parcial de Cálculo "*, como una forma de reafirmar la validez de su razonamiento.
- Algunos estudiantes grafican, partiendo correctamente de $y = x^2 - 4$, pero se olvidan de graficar el tramo positivo de la parábola de la que partieron.

La mayoría de los estudiantes tratan de resolver analíticamente las inecuaciones, buscando valores de x que satisfacen la misma, para lo cual hacen uso de factoreo, aplican raíz cuadrada a ambos miembros, transposición de términos; y algunos se ayudan con la calculadora.

No logran percibir que en ambos miembros de la inecuación tienen una función, porque expresan *" ... pero aquí nos falta la y ... "*

Algunos estudiantes, a pesar de haber obtenido una gráfica correcta, ésta fue considerada como una cosa más , sin percibir que era realmente la clave para la resolución del problema. Presentan dificultades en expresar como intervalo las soluciones. Solamente un grupo trabaja con las gráficas en la resolución de las inecuaciones, interpretando el signo menor o igual, como lo que queda "por debajo de... "

Los estudiantes que resuelven correctamente $||2x + 3| - 1| \geq \frac{1}{2}$. llegan a la solución usando recursos, como simetría en las gráficas, pero no se convencen de la validez del método usado.

Actitudes de los alumnos

Fue notable el contraste en el desempeño de los grupos y dependió fundamentalmente de la capacidad de transferir a situaciones nuevas los saberes previos. Asimismo el compromiso mostrado por la totalidad de los estudiantes fue destacado, ya que actuaron libremente.

La primera fase de la Actividad fue completada por los cuatro grupos, no así la segunda, que fue resuelta exitosamente por solo un grupo. Los tres grupos restantes, aunque intentaron arribar a una solución no lo lograron.

La puesta en común fue muy rica, ya que se generó espontáneamente una discusión entre los integrantes de dos de los grupos, en donde expusieron y defendieron cada una de las argumentaciones. Además, en esta etapa se aclararon muchos conceptos y se apreció rotundamente la ventaja de la utilización del método gráfico sobre el algebraico para resolver inecuaciones.

Conclusiones

En base a las observaciones que se describen precedentemente la serie de actividades permitió a los estudiantes, apreciar la ventaja y conveniencia del método gráfico para resolver inecuaciones, ante el método "tradicional" algebraico. Los alumnos no lograron desprenderse del método de graficar "punto a punto" cuando se les requiere que lo hagan sin evaluar la función, ni mucho menos en utilizar naturalmente el método gráfico para resolver las inecuaciones, ante la complejidad del método algebraico.

No se cumplieron totalmente nuestras expectativas, pues pese a que los estudiantes visualizaron la eficacia del método gráfico, persistió la comcepción que resolver un problema matemático "matemáticamente" equivale a utilizar solamente recursos algebraicos.

Esto nos lleva a reflexionar sobre nuestra práctica docente en los distintos niveles del sistema educativo.

Bibliografía

Rosa M. Farfán - " Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio " Grupo Editorial Iberoamérica - México 1997

Rosa M. Farfán y Armando Albert - " Un acercamiento gráfico a la resolución de inecuaciones " - Grupo Editorial Iberoamérica - México 1997

Cecilia Parra y Otros - " Didáctica de Matemáticas: Aportes y Reflexiones " Editorial Paidós - Buenos Aires 1995

Estudio didáctico de la función 2^x

Rosa María Farfán
AES-Depto. de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Carlota Andrés, Silvia Castellanos, Luz M. Mingüer, Eva Rubio
Instituto Tecnológico de Oaxaca
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
México

Justificación

En los inicios del siglo XX surgen las matemáticas modernas con la introducción de la enseñanza del cálculo, la cual partió del principio expresado por (Poincaré en 1904): *"se enseñará cálculo adaptado a las capacidades cognitivas del estudiante"*[1]; siendo su objetivo dotar al alumno de las herramientas necesarias para incorporarse al trabajo productivo, buscando un equilibrio entre las exigencias del saber matemático y las exigencias que impone el funcionamiento cognitivo del estudiante.

Se sabe que la función es un elemento fundamental del cálculo. Sin embargo, se ha constatado que al paso del tiempo, el concepto de función se ha venido enseñando de manera algorítmica y por consiguiente, limitada, como se a mencionado anteriormente.

Dentro de la gama de funciones escolares, la función exponencial reviste gran importancia en el área de la ingeniería, debido a que su campo de aplicación es muy amplio, pues describe fenómenos tales como: crecimiento demográfico, crecimiento de bacterias, desintegración radioactiva (crecimiento negativo), el aumento monetario a un interés compuesto etc. En el desarrollo de nuestra labor docente como maestras de cálculo, se han identificado serios problemas relacionados con este concepto, debido a que de manera tradicional el maestro enseña la función exponencial, como viene desarrollada en los libros de cálculo. Primero definiéndola como: "si $a > 0$ y $a \neq 1$ entonces nos referiremos a $y = a^x$ como la función exponencial de base a"[2] y en seguida dando sus características: Dominio $(-\infty, +\infty)$, recorrido $(0, +\infty)$, intersección con el eje y en $(0, 1)$, siempre creciente, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ (asíntota horizontal), reflexión de $y = a^{-x}$ en el eje y. Y por último graficando la función solo para valores enteros de x, de tal forma que el estudiante concibe la función exponencial solo para estos valores, sin tomar en cuenta que, para valores fraccionarios de x tales como 1/2, 1/3, 1/4, 3/4, ... , la función a^x requiere de consideraciones especiales para poder ser calculada en algunos de sus puntos y por consiguiente su trazo en el plano no es tan sencillo.

Al respecto, (Vergnaud 1991) considera que *el significado de un objeto matemático no puede quedar reducido a su definición al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza*[3].

Por esta razón la aplicación de la secuencia 2^x es importante como una alternativa para los estudiantes del ITO, ya que a través de ella los alumnos ampliarán o modificarán el concepto que tienen de esta función a^x pues, en cursos más avanzados de matemáticas requerirán de estos conocimientos para llegar a realizar modelación matemática, aplicable en los diferentes campos de la ingeniería.

Así, la aplicación de esta secuencia didáctica estará encaminada al desarrollo de una situación que permita a los estudiantes del ITO manipular la función 2^x con valores de x enteros y fraccionarios mediante actividades que involucren una transformación de la noción de

[1] Poincaré, H (1904) *Les définitions en mathématiques. L' Enseignement M* 6, 255-283.

[2] Larson, R.; Hostetler, R., (1986). *Calculo y Geometria Analítica*: Las funciones exponencial y logaritmo.

[3] Vernaud, G.(1991). "*La théorie des champs conceptuels* : Recherches en Didactique des Mathématiques", 10 (2..3)

función exponencial, así como la interacción y confrontación de opiniones entre estudiantes, para que logren éstos acomodar en sus estructuras cognitivas, nuevos significados del objeto de aprendizaje, en este caso la función exponencial 2^x.

Al respecto (Pozo, 1987) propone: *que es necesario realizar una combinación de la transmisión de teorías y concepciones con la realización de actividades por descubrimiento, intentando que los estudiantes hagan conciencia de sus concepciones que les genere conflictos cognitivos, ya que estos les permitirá darse cuenta de las limitaciones que tienen. Es importante mencionar también que Pozo, al igual que Piaget, considera que el conflicto en el estudiante juega un papel fundamental para que éste acceda a una nueva forma de explicación. Es así que los cambios conceptuales deben entenderse como un objetivo a largo plazo en el aprendizaje de la ciencia, requiriendo ser provocados y construidos con:*

_*Un esfuerzo dirigido, que parta a su vez de la combinación adecuada de la guía del profesor.*

_*La autonomía por parte del alumno.*

_*La confrontación de opiniones, de las concepciones individuales entre iguales, de tal manera que esto le permita al estudiante generar y desarrollar un proceso para la construcción del conocimiento científico*[4].

Aspectos previos de la puesta en escena

Cultura Institucional

El Instituto Tecnológico de Oaxaca, perteneciente al Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos, es una Institución, cuyo principal objetivo es la formación de profesionistas que contribuyan al desarrollo socioeconómico del estado; formando ingenieros: industriales, eléctricos, electrónicos, químicos, civiles y mecánicos; así como licenciados en administración e informática; cuenta con 4000 estudiantes y una planta docente de 300 profesores.

El nivel socioeconómico de la mayoría de los estudiantes es bajo, y el origen socioprofesional de las familias es de: agricultores, obreros, empleados y/o pequeños comerciantes, en donde el grado máximo de estudios, de gran parte de los padres de familia, es apenas de educación primaria.

Esta Institución ubicada en la capital, recibe aproximadamente 40% de alumnos provenientes de todas las regiones del estado, conformando un mosaico de culturas que definen actitudes diferentes en este grupo de estudiantes, pues, el hecho de tener que salir de su lugar de origen con recursos muy limitados, genera una problemática especial que viven la mayoría de estos jóvenes.

Por otro lado se advierte un bajo nivel académico en los alumnos que ingresan, y más tarde a lo largo de su vida escolar en el ITO, altos índices de reprobación en materias como: física química, matemáticas. Esto tiene su origen en una serie de circunstancias entre las que destacan, el crecimiento acelerado de la población escolar, y el problema magisterial que se vive en el estado desde hace 10 años y que ha afectado de manera fundamental la calidad de la enseñanza en todos los niveles educativos.

Además nuestra Institución, está inmersa en la problemática que afecta a la educación superior y que toca varios aspectos, entre ellos:

[4] Pozo, J. (1987)11. *Aprendizaje de la ciencia y pensamiento causal* .Madrid : Aprendizaje visor.

a. El problema de la formación docente

Como toda Institución de educación superior, en el ITO contamos con una planta de catedráticos formada por profesionistas en las diferentes áreas del saber, que conocen ampliamente el tema de su formación, pero que carecen de una información pedagógica mínima necesaria para desempeñar una labor educativa, dificultándose la optimización del proceso enseñanza aprendizaje.

b. El problema del "estilo de enseñanza"

En nuestra Institución, identificamos un estilo "tradicional" (expositor-receptor) que refuerza la memorización y una actitud pasiva en el alumno, de tal manera que a este último, no se le enseña a analizar y reflexionar sobre los conceptos (contenido del programa), definiéndose claramente, para las materias de ciencias exactas, un gusto por la algoritmización, es decir, un estilo de "enseñar" basado en la resolución de problemas a través de la aplicación mecánica de fórmulas, sin llegar a la comprensión cabal del concepto. Este estilo conforma estudiantes no participativos, tímidos y poco creativos a los que se les dificulta: la exposición de algún tema frente a sus compañeros, el trabajo en equipo, la adaptación a métodos innovadores de enseñanza, la lectura y consulta de textos, la investigación sobre temas específicos, etc.

Selección de los estudiantes participantes en el estudio

La selección de los estudiantes para la puesta en escena de la secuencia didáctica 2^x, se realizó con los grupos de cálculo que tenemos a nuestro cargo. Haciéndoles una invitación a participar en una actividad matemática, la cual requeriría de dos sesiones de trabajo fuera del horario de clases. Una para dar a conocer el algoritmo geométrico y otra para el desarrollo de la secuencia didáctica.

Estos estudiantes fueron de las carreras de ingeniería civil e ingeniería industrial, así como de la licenciatura en informática. Los alumnos de ingeniería se encuentran repitiendo el curso de matemáticas I.

Puede decirse que los estudiantes que participaron en este trabajo lo hicieron por decisión propia, motivados por el interés de tener nuevas experiencias y profundizar en sus conocimientos de matemáticas.

Cuestionario exploratorio y su análisis

El cuestionario exploratorio fue aplicado con el objeto de conocer las ideas generales que los alumnos tienen alrededor de la función 2^x antes de participar en la puesta en escena de la secuencia didáctica 2^x.

Este cuestionario constó de 3 preguntas tales que, con ellas fuera posible encontrar evidencias que nos permitiera conocer la concepción o idea que el estudiante tiene acerca de la expresión 2^x. Estas fueron:

a) ¿que significa 2^x ?

b) calcula expresiones para: x = 2, 3, 4, 20, 0, -1, -2, -3, 1/2, 1/4, 3/4, -1/3.

c) ¿ puede representarse gráficamente la función 2^x ?

La aplicación de este cuestionario fue de gran utilidad, ya que permitió contrastar los resultados obtenidos, con los resultados arrojados después de la aplicación de la secuencia didáctica 2^x.

Análisis del cuestionario exploratorio

Las siguientes tablas muestran los resultados del análisis del cuestionario exploratorio, aplicado a los estudiantes.

Grupo de Ingeniería Civil

Alumno	**Que significa 2^x**	**Calcula expresiones para x=2,3,4,20,0,-1,-2,-3 1/2,1/4,3/4,-1/3.**	**¿Puede representarse gráficamente la expresión? explica ampliamente la respuesta**
Alumno 1	Identifica 2^x como una expresión algebraica	Calculó sólo para valores enteros positivos.	Esbozó la gráfica, sin dar explicaciones al respecto.
Alumno 2	Identifica 2^x como una expresión algebraica y también como una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Esbozó la gráfica, sin dar explicaciones al respecto.
Alumno 3	Identifica 2^x como una expresión algebraica	No calculó correctamente (No conoce las leyes de los exponentes, interpreta 2^3 = 2x3) .	No contestó a esta pregunta.
Alumno 4	Identifica 2^x como una expresión algebraica y también como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Tabuló sólo para valores enteros de x, graficó sin dar explicaciones.
Alumno 5	Identifica 2^x como una expresión algebraica y también como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Tabuló sólo para valores enteros de x, graficó y mencionó que 2^x es una función creciente.
Alumno 6	Identifica 2^x como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos.	Esbozó la gráfica , mencionando que 2^x es una función creciente.
Alumno 7	Identifica 2^x como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos.	Tabuló para valores enteros positivos y graficó sin dar explicaciones al respecto.

CONCLUSIONES: La mayoría de los estudiantes identifica 2^x como la función.
La mayoría de los estudiantes calcularon sólo para valores de x enteros positivos, algunos de ellos con valores negativos .
La mayoría de los estudiantes asocian 2^x con una representación gráfica.

Grupo de Licenciatura en Informática

Alumno	Que significa 2^x	Calcula expresiones para x=2,3,4,20,0,-1,-2,-3 1/2,1/4,3/4,-1/3.	¿Puede representarse gráficamente la expresión? explica ampliamente la respuesta
Alumno 1	Identifica 2^x como una expresión algebraica y también como una función	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos, para valores fraccionarios positivos y negativos los dejo expresados (aplicó la ley de los exponentes).	Esbozó la gráfica sin dar explicación al respecto.
Alumno 2	Identifica 2^x como una expresión algebraica.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios mencionó el uso de calculadora para obtener una aproximación.	Tabuló sólo para valores enteros de x, y graficó sin dar explicaciones al respecto.
Alumno 3	Identifica 2^x como una expresión algebraica.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos, ,para valores fraccionarios positivos y negativos los dejo expresados mencionando que son valores que no se pueden obtener (aplicó las leyes de los exponentes).	Tabuló sólo para valores enteros, graficó sin dar explicaciones al respecto,

CONCLUSIONES: Todo el grupo identifica 2^x como una expresión algebraica, sólo uno la identifica además como una función.

Todo el grupo calculó 2^x sólo para valores enteros positivos y negativos, conocen las leyes de los exponentes e identifican claramente un número irracional.

Todo el grupo asocia 2^x con una representación gráfica.

Grupo de Ingeniería Industrial

Alumno	Que significa 2^x	Calcula expresiones para x=2,3,4,20,0,-1,-2,-3 ½,1/4,3/4,-1/3.	¿Puede representarse gráficamente la expresión? explica ampliamente la respuesta
Alumno 1	Mencionó que 2^x es una expresión algebraica.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos los dejo expresados	Tabuló sólo para valores enteros positivos y negativos , graficó sin dar explicación.

Alumno 2	Mencionó que 2^x es una ecuación.	No calculó correctamente (No conoce las leyes de los exponentes, interpreta $2^2 = 2+2$	No graficó ni dio explicación..
Alumno 3	Mencionó que 2^x es una función exponencial.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes).	Tabuló para valores enteros positivos y negativos, graficó sin dar explicación.
Alumno 4	Mencionó que 2^x es una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Esbozo la gráfica, sin ninguna explicación.
Alumno 5	Mencionó que 2^x es una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos.	Esbozó la gráfica, sin ninguna explicación.
Alumno 6	Mencionó que 2^x es una expresión algebraica	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes)	Tabuló para valores enteros positivos y negativos, graficó sin dar explicación.
Alumno 7	Mencionó que 2^x es una función creciente.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos y negativos los dejo expresados	Tabuló para valores enteros positivos y negativos, graficó mencionando que es una función creciente.
Alumno 8	Mencionó que 2^x es una expresión algebraica y también una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos y negativos los dejo expresados mencionando el uso de calculadora.	Tabuló para valores enteros positivos y negativos, graficó sin dar explicación.
Alumno 9	Mencionó que 2^x es una ecuación y también una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos los dejo expresados mencionando el uso de calculadora.	Esbozó la gráfica, sin ninguna explicación.
Alumno 10	Mencionó que 2^x es una función.	Calculó sólo para valores enteros positivos y negativos (aplicó las leyes de los exponentes), para valores fraccionarios positivos y negativos, los dejo expresados mencionando ser valores que no se pueden calcular.	Esbozó la gráfica, sin ninguna explicación.

CONCLUSIONES :

La mayoría del grupo identifica 2^x como una expresión algebraica, algunos la identifican como una expresión algebraica y también como una función, y sólo unos cuantos como una función.

La mayoría del grupo calculó 2^x sólo para valores enteros positivos y negativos; para valores fraccionarios, algunos alumnos, sólo lo dejaron expresado al identificar los números irracionales.

Todo el grupo asocia 2^x a una representación gráfica.

Puesta en escena de la secuencia didáctica

Recursos materiales

Para la realización de la secuencia didáctica, se requirió del siguiente material:

- una aula con mesas para trabajo en equipo
- una grabadora por equipo de trabajo
- un juego de escuadras sin graduación y compás por equipo
- retroproyector
- acetatos, hojas blancas, lápices, plumones para acetato y pizarrón acrílico
- cámara de video
- secuencia didáctica 2^x impresa.

Método de observación

Se contó con dos guías de observación que son:

Una para el registro del desarrollo matemático de la situación, que atendió los siguientes aspectos:

Qué dificultades enfrenta el estudiante

Qué estrategias se emplean para superar las dificultades

Otra para el registro de carácter específico como son:

Observaciones de centración-desbloqueo (profesor participativo)

Observaciones de la dinámica del equipo

Observaciones de la dinámica del grupo

En cuanto a la observación - desbloqueo (profesor participativo) la interacción con los equipos y la discusión grupal será activa, se darán sugerencias y se harán preguntas, buscando romper posibles bloqueos en el trabajo de los estudiantes, se respetarán sus tiempos, ya que el propósito fundamental será lograr que los estudiantes concluyan las dos etapas por sí mismos.

Cada intervención del profesor será reportada.

Análisis A-priori

El análisis apriori lo definimos tomando como base los resultados del cuestionario exploratorio y los contenidos de la secuencia didáctica 2^x.

- Los estudiantes cambiarán la idea que tienen de que 2^x solo tiene sentido cuando x es entero.
- Los estudiantes identificarán la naturaleza creciente de la función .
- Los estudiantes identificarán la existencia de dificultades para realizar el trazo continuo de la gráfica de 2^x.
- Los estudiantes superarán una parte de las dificultades que existen para realizar el trazo continuo de 2^x, a partir del método geométrico para encontrar segmentos iguales con la raíz cuadrada de un número.

Desarrollo de la aplicación de la secuencia didáctica 2ˣ

La sesión de trabajo desarrollada en dos etapas se llevó a cabo en una sola sesión el día 9 de Mayo de 1998, de las 9.30 hrs. a las 14.30 hrs. bajo el siguiente orden:

9.30 - 10.00	hrs.	Presentación de la sesión de trabajo
10.00 - 11.00	"	Trabajo en equipo (etapa I)
11.00 - 12.00	hrs.	Discusión grupal (etapa I)
12.00 - 12.30	"	Receso
12.30 - 13.30	"	Trabajo en equipo (etapa II)
13.30 - 14.30	"	Discusión grupal (etapa II)
14.30 - 15.30	"	Reunión de los maestros participantes para comentar la actividad desarrollada.

Antes de empezar la sesión de trabajo, se les solicitó a los estudiantes formaran equipos de 3, dejando abierta la integración de los equipos, de esta forma se conformaron 4 equipos, con 3 estudiantes, acompañados de un monitor en cada mesa.

A continuación se les repartió el material de trabajo (grabadora, hojas blancas, compás, escuadras, plumones, acetatos).

Durante la presentación se les agradeció a los estudiantes su asistencia y participación, mencionándoles, que era de suma importancia el trabajo que ellos iban a realizar, ya que formaba parte de un trabajo de investigación encaminado, a mejorar el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se recordaron someramente los conocimientos geométricos para la obtención de raíces y productos de segmentos.

Así mismo se les dieron indicaciones generales, tales como la forma de trabajo, la entrega de sus reportes por equipo, así como expresar sus conclusiones en un acetato que les sirviera de apoyo en la discusión grupal, al final de cada etapa.

Los monitores llevaron registros escritos así como grabaciones de audio, sobre la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, la dinámica de trabajo en equipo, y la dinámica de trabajo del grupo.

Se filmaron, la presentación del equipo y las discusiones grupales de la primera y segunda etapa.

Las sesiones de trabajo de equipo fueron de una hora para la primera etapa y una hora para la segunda etapa.

Las discusiones grupales fueron de una hora para la primera etapa y de una hora para la segunda etapa.

Se concluyó la sesión de trabajo con los estudiantes a las 14.30 hrs.

Se finalizó la sesión a las 15.30 hrs. con una reunión de los maestros participantes, para comentar los aspectos más relevantes que se habían observado durante la sesión de trabajo. Concentrado de la guía de observación del desarrollo matemático de la secuencia.

ETAPA I

Observaciones	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
¿Se hizo la lectura de todo el documento antes de iniciar la actividad? ¿Se hicieron algún tipo de preguntas?	No	Si	Sólo del primer punto.	Sólo el primer punto.
¿Se identificaron los segmentos de magnitudes 2^0, 2^1, 2^2 en el plano?	2^0 no 2^1 y 2^2 si	Si	De principio no los identificaron, Consideraban que 2^0 es cero.	Al principio no. Después si.
¿Se marcaron los puntos $(0, 2^0)$, $(1, 2^1)$, $(2, 2^2)$ en el plano?	$(0, 2^0)$ se marco erróneamente. $(1,2^1)$ y $(2, 2^2)$ si se marco	Si	Se les tuvo que apoyar para que lo realizaran.	No, al principio.
¿Identificaron cuál era el problema de localizar pares ordenados en el plano?	No	Si	Si, después del bloqueo, identificaron los segmentos *y* luego el par ordenado (x, y).	No
¿Obtuvieron los segmentos de magnitudes $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, $2^{3/4}$, $2^{5/4}$ empleando los procedimientos geométricos indicados?	$2^{1/2}$ y $2^{1/4}$ si. $2^{3/4}$ y $2^{5/4}$ no los obtuvieron.	Si	Obtuvieron $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, $2^{3/4}$ empleando el procedimiento geométrico. $2^{5/4}$ no les dio tiempo.	Localizaron $2^{1/2}$ y después del desbloqueo $2^{1/4}$ únicamente.
¿Identificaron el segmento unidad y utilizaron siempre el mismo en la obtención de los otros segmentos?	Si	Si	Si	Si
¿Qué dificultades encontraron para obtener los segmentos $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, $2^{3/4}$, $2^{5/4}$, cómo las superaron?	El trabajar con exponentes fraccionarios	Un poco de discusión alrededor de $2^{3/4}$ para poder llegar a obtenerlo a través del producto.	Hubo necesidad de centrarlos y que retomaran el hecho de que $2^{1/4}$ es igual a $(2^{1/2})^{1/2}$	No manejan los exponentes.
¿Describieron cómo localizar el punto $(1/8, 2^{1/8})$, para ello se apoyaron en el procedimiento desarrollado para los otros segmentos?	No lo hicieron	Si	No les dio tiempo. Sólo llegaron a obtener el segmento y el punto $(3/4, 2^{3/4})$	No lo hicieron.
¿Identificaron que tipo de puntos podían localizar y cuáles no, dieron algún tipo de argumento?	No lo hicieron	Si, no dieron argumento.	No los pudieron identificar por falta de tiempo.	No lo hicieron

ETAPA II

Observaciones	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
¿Se hizo lectura de todo el documento antes de iniciar la actividad? ¿Se hicieron algún tipo de preguntas?	No	Si se hizo. No se hicieron preguntas todo pareció claro	No. Leyeron sólo la actividad No. 8 de manera individual y fueron obser-vando las co-lumnas. Se iban pasando el documento	No. Tampoco se hicieron ninguna pregunta
¿Se comprendió el ejemplo (tabla 1), que dificultades encontraron para comprenderlo?	No. Encon-traron las regularida-des	Si se com-prendió, sólo fue cuestión de repetir la lectura.	Cuando lo anali-zaron lo encon-traron de pronto muy sencillo.	Si . Se compren-dió
¿Qué dificultades tuvieron para el llenado de la tabla, cómo las supera-ron?	Con expo-nentes frac-cionarios. Hubo pro-blemas en cuanto a operar con fracciones.	Ninguna	Empezaron trabajando por pares y no en forma consecu-tiva; hasta que volvieron a analizar el ejemplo	No tuvieron nin-gún prroblema
¿Hicieron algún comentario en rela-ción al término razón de creci-miento?	No	No. Parece comprensible el término.	Si. Que parecía crecía a razón constante.	No
¿Pudieron identificar la razón de creci-miento para distin-tos incrementos de x, pudieron genera-lizar esta idea, escribieron distintos casos, o únicamente lo comentaron ver-balmente?	No lo hicie-ron	Si. Si pudieron generalizar por escrito.	Si observaron sus trabajos y concluyeron que la razón de crecimiento era de 2^x	Lo comentaron verbalmente.
¿Para el caso de la columna 5 pudieron generalizar la es-tructura, cómo lo justificaron?	No lo hicie-ron	Si	Después de varios intentos concluyeron que su estructura podría ser: $2^0(2^x-1)$ $2^x(2^x-1)$ $2^{2x}(2^x-1)$	No
¿Qué problemas identificaron en relación al trazo continuo de la fun-ción 2^x.?	No lo hicie-ron	Hay valores que no se pueden obte-ner por el método esta-blecido.	No hubo co-mentarios al respecto.	Pensaron que no habría ningún problema

¿Afirmaron que siempre se puede obtener 2^x, o establecieron alguna distinción entre los posibles valores de x?	No lo hicieron	Si establecieron alguna distinción.	No hubo comentarios al respecto.	Si. Tomaron puros valores enteros para x.

Papel del profesor en el avance del equipo

El papel del profesor, en cuanto al avance del equipo, para el desarrollo de la secuencia, fue de la siguiente manera:

1.- Establecer las reglas para el desarrollo de la secuencia.

2.- Establecer un clima de confianza en el equipo. Dándole especial atención a este punto, debido a que los alumnos no están habituados a trabajar en equipos.

3.- Ubicación de los equipos en los temas que se estaban tratando.

4.- Desbloquear situaciones en las que el equipo se encontraba detenido.

5.- Llamar la atención del equipo en cuanto a la administración del tiempo.

Conclusiones

Después del análisis que se realizó sobre las observaciones hechas a cada equipo de trabajo y en cada sesión grupal, se concluye que, en la primera y segunda etapa de la secuencia, la mayoría de los estudiantes:

- Se apropiaron del procedimiento geométrico para hallar segmentos cuyas magnitudes son iguales con la raíz cuadrada de un número.
- Al localizar los puntos de coordenadas (x, y) señalados en la secuencia, identificaron que 2^x es una función creciente.
- Al finalizar la primera etapa de la secuencia, identificaron a la función 2^x, como una función que acepta valores enteros y fraccionarios y que estos últimos pueden ser racionales e irracionales.
- Llegaron a establecer relaciones entre cada una de las columnas del ejercicio propuesto en la segunda etapa, hasta llegar a identificar que, cuando los valores de x están espaciados una cantidad cualquiera, su razón de crecimiento es 2^x.
- A través de las regularidades observadas, lograron obtener la siguiente estructura de la columna cinco para valores de x que están espaciados una cantidad cualquiera,

$$\begin{array}{ll} \mathbf{2^0} & \mathbf{(2^x-1)} \\ \mathbf{2^x} & \mathbf{(2^x-1)} \\ \mathbf{2^{2x}} & \mathbf{(2^x-1)} \\ \mathbf{2^{3x}} & \mathbf{(2^x-1)} \end{array}$$

comprendiendo con esto, que la función 2^x crece de acuerdo a una razón de crecimiento.

- El trabajo en equipo permitió la interacción entre los estudiantes, así como el enriquecimiento de los conceptos de cada uno de los integrantes, logrando un mejor aprovechamiento.
- El papel que el maestro jugó durante la secuencia, como monitor guía, con un tipo de intervención limitada únicamente a desbloquear las actividades de los equipos, a través de cuestionamientos sin llegar a sugerir de manera directa la solución, fomentó el desarrollo de ideas propias.

Referencias Bibliográficas

Farfán, R. 1995. *Ingeniería didáctica.* Programa editorial. Serie: Antologías. Número 1. Área de educación superior del DME – CINVESTAV – IPN. Méx.

Albert, A. 1996. *La convergencia de series en el nivel superior. Un acercamiento sistémico .* Tesis doctoral . Departamento de matemática educativa. CINVESTAV-IPN. Mex. (capítulo 1,2,3)

A.P. Youschkevitech, 1976. *The concept of function up to the middle of the 19th century*, Arch. Hist. Exact. Sci.No.16. pp. 37-85. Traducción: Dra. Rosa María Farfán.

Cantoral, R. 1990. *Matemática Educativa. Programa Editorial. Serie: Antologías. Número 1.* Area de educación superior del DME-CINVESTAV-IPN. Méx.

Donald W. Bushaw, Vera S. Pless, Nelvin Henriksen,1982. *"The concept of function",* aspects of epistemology and pedagogy. Edited by Guershon Harel & Dubinsky.

Steen, L. A. 1998. *"La enseñanza agradable de las matemáticas"* Colección de textos politecnicos, Limusa- IPN, México

Dubinsky, Harel (1992). *The concept of funtion Aspects of epistemology and pedagogy.* M. A. A. Notes and Reports Series.Editorial Studies Boord. Purdue University.

Collete, Jean Paul. (1986) *Historia de las Matemáticas*, Tomo II.Editorial Siglo XXI, México.

Academia de Ciencias de Cuba, Academia de Ciencias de la URSS. *Metodología del conocimiento científico.* Editorial Quinto Sol, S.A.México.

García, Gloria. (1997). *El concepto de función en textos escolares.* Universidad Pedagógica Nacional. Editorial Colciencias.

Zill, Denis G.(1987) *Cálculo con Geometría Analítica.* Editorial Iberoamericana. México.

Larson, R..; Hostetler, R., (1986). *Cálculo y Geometría Analítica*: Las funciones exponencial y logarítmica. Editorial McGraw - Hill.

El comportamiento variacional de la función lineal. Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato

Alfonso Catalán Adame, Crisólogo Dolores Flores
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
CIMATE / CONACYT
México

Resumen

Aunque los procesos de cambio se han venido estudiando desde los últimos dos grados de la primaria, los estudiantes del bachillerato no los usan en determinación de la ecuación de la recta a pesar de haber cursado Geometría Analítica. Por esta razón adoptamos como problema de investigación el escaso desarrollo de la habilidad de los estudiantes de bachillerato para obtener la ecuación de una recta a partir de su comportamiento variacional. En este artículo se describe una experiencia didáctica tendiente a desarrollar este tipo de pensamiento en situación escolar. Esta experiencia fue diseñada sobre la base de la formación por etapas de las acciones de Galperin.

El problema de investigación

Los proceso de cambio en la escuela elemental mexicana se estudian desde el cuarto de primaria, en especial se enfatiza la variación directamente proporcional. En la escuela secundaria se sigue estudiando este tema mediante tablas y por medio del plano cartesiano, se grafican funciones elementales del estilo: $y = mx + b$. En el bachillerato se aborda nuevamente este tema en el curso de Goemetría Analíticas con el nombre de ecuación de la recta, se incluye tópicos específicos como la ecuación de la recta dado un punto y su pendiente, la ecuación de la recta dados dos puntos, la ecuación de la recta con abscisa y ordenada al origen y la ecuación general de la recta. En realidad esta es una forma *estática* de estudiar un proceso de variación, pues hace énfasis en uno o dos puntos por donde pasa la recta y su pendiente. Sin embargo para comprender la esencia del lugar geométrico determinado por la ecuación: $y = mx + b$, es necesario enfocar la atención no sólo en los puntos y en su pendiente, sino en el comportamiento de los cambios que experimenta x y y en todo el dominio de`la función. Estos cambios están sintetizados precisamente en la pendiente m, $m = \Delta y/\Delta x$. Por ejemplo las gráficas de las funciones: $y = 2x + 1$ y $y = 2x + 10$, tienen exactamente el mismo comportamiento variacional: cuando x aumenta una unidad (de izquierda a derecha) y aumenta dos, o bien cuando x aumenta dos unidades, y aumenta 4, así la relación de proporcionalidad entre los cambio de y respecto de x se conserva, es pues una constante.

Sólo se diferencian una de la otra en que sus gráficas pasan por puntos distintos. El hecho de que tengan el mismo comportamiento variacional las hace paralelas. El comportamiento variacional de las recta no es sujeto de estudio sistemático tanto en los programas como en los textos usuales en la escuela.

Los resultados que hemos obtenido en el diagnóstico acerca de la obtención de la ecuación de una recta a partir de su comportamiento variacional, muestran un escaso dominio por parte de los estudiantes de bachillerato de esta habilidad. Este es precisamente nuestro problema de investigación.

El objetivo de la investigación

El objetivo principal de esta investigación consiste en desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar, especialmente el que se requiere para deducir la ecuación de la recta a partir del su comportamiento variacional y viceversa, es decir a partir de su comportamiento variacional deducir su ecuación.

La metodología utilizada

Para la realización de este trabajo adoptamos algunos elementos metodológicos de la Ingeniería Didáctica y de las Ciencias Pedagógicas. En términos generales nuestra investigación empieza por describir el estado en que se encuentran el concepto sujeto de estudio en los estudiantes de nuestra región. Después se diseñaron las actividades de aprendizaje y secuencias didáctica, se llevaron a la práctica y luego se analizaron los resultados. Las actividades que se proponen tienen el objetivo de desarrollar la habilidad del análisis visual del comportamiento de las gráficas de rectas en distintas posiciones, analizar el comportamiento de los cambios en el plano numérico mediante tablas y el análisis y deducción de la ecuación de la recta. Se diseñaron actividades en las que se necesitan realizar las siguientes acciones:

- Ubicar los puntos del plano por donde pasa la recta
- Visualizar los cambios de la variable independiente (Δx) y los de la variable dependiente (Δy) dada una gráfica en un plano cartesianos cuadriculado
- Calcular los cambio de las variables y descubrir su razón de proporcionalidad
- Predecir los cambios mediante tablas, gráficas o por medio de la ecuación de la recta
- Analizar el comportamiento variacional de la función lineal y deducir su ecuación
- Dada su ecuación obtener el comportamiento variacional y esbozar su gráfica
- Analizar el comportamiento variacional en el plano gráfico, numérico y analítico y desarrollar movilidad entre ellos

Elementos teóricos

En el plano psicológico la investigación se fundamenta en la Teoría de la Actividad de Vigotsky, Luria, Leontiev, Tallízina y otros. La acción es la piedra angular de toda actividad humana y surge de la relación entre el hombre y los objetos de su realidad. En el terreno de la enseñanza esta relación se establece entre los alumnos y el conocimiento y el profesor. No se tratan entonces de cualquier actividad, sino de la actividad cognoscitiva: la que tiene por objetivo la asimilación del conocimiento. En nuestro caso la asimilación del conocimiento matemático, el relativo a la matemática del la variación y el cambio.

La actividad en general, y la actividad cognoscitiva en particular, pasa por tres fases: la fase orientadora de la acción, la fase ejecutora y la fase de control o evaluación. En la primera juegan un papel importante los motivos por los que realiza la acción, ¿Para qué se realiza la acción? ¿Por qué se realiza la acción? La segunda fase, la de ejecución, es la forma de cómo se realiza la acción, cuanto más sistematización se adquiere en la realización de la acción se perfecciona el dominio sobre ella. En la tercera fase, la de control, se refiere a la calidad de la acción.

Estas tres fases no son consideradas de manera aislada ni suceden necesariamente en forma lineal, sino que forman una unidad dialéctica. Están íntimamente relacionadas en forma de sistema. Por eso la enseñanza de la matemática, en tanto una actividad orientada sistemáticamente al aprendizaje consciente de los conocimientos matemáticos en la escuela, puede lograr mejores resultados si es organizada y dirigida sobre estas base.

El aprendizaje es en esencia un proceso de desarrollo de acciones mentales, por tanto es necesario conocer las condiciones que deben crearse para configurar óptimamente este proceso. El aprendizaje comienza con el descubrimiento de las condiciones necesarias para el desarrollo de la acción mental. Tales condiciones son:

- El objeto de la acción. Que en el caso nuestro es la función lineal y su comportamiento variacional.
- Las propiedades del objeto de estudio. En el caso que nos ocupa: el comportamiento de los cambios las variables; la relación que guardan esos cambios, las relaciones entre cambios de las variables y el crecimiento, decrecimiento y estabilización de la función lineal.
- El objetivo de la acción. En nuestro trabajo pretendemos desarrollar pensamiento y lenguaje variacional.
- Los medios necesarios para alcanzar el objetivo. Conocimientos previos, medios didácticos y las actividades de aprendizaje diseñadas para desarrollar el pensamiento variacional.
- El desarrollo concreto de la acción. La realización de las actividades de aprendizaje diseñadas, en condiciones de enseñanza en el aula.

El contenido de la acción está constituido, por una parte, por la transformación real (orientada hacia el objetivo), de un objeto inicial o de una situación inicial en un producto deseado o en una situación deseada. A esa parte de la acción se le llama fase de realización de la acción La fase de realización de la acción se manifiesta en tres etapas:

1. Etapa de la acción material o materializada. En dicha etapa se da la manipulación de modelos, esquemas, dibujos, construcción de modelos, confección de dibujos. Par nuestro caso diseñamos esquemas de gráficos de rectas, en un sistema cartesiano cuadriculado y a escala, y tablas de valores. Teniendo como dato los cambios de *x, se trata de obtener (midiendo en el gráfico) los cambios de y,* las razones de cambio $\Delta y/\Delta x$, analizar y decidir si la función es creciente o decreciente, así como el comportamiento en general y su ecuación.

2. Etapa de la acción verbal. En esta etapa también conocida como etapa del lenguaje externo se da la solución comentada con eliminación gradual de materiales de orientación (comentarios de los pasos de la acción, su fundamentación y control): repetición en coro, exposición de un alumno, repaso de frases importantes. Para esta etapa se diseñaron actividades en las que se requiere utilizar el lenguaje numérico (sucesiones de valores, etc.), el lenguaje analítico (fórmula de las funciones lineales, desigualdades para denotar el signo de la función y para denotar crecimiento, decrecimiento, y estabilización de la variación). En esta parte el lenguaje tiene una función comunicativa pero también como un medio para reflejar la denominación de los conceptos.

3. Etapa de la acción mental. En esta etapa se da el trabajo independiente (solución independiente de ejercicios sin ayuda de ninguna indicación detallada, principalmente solo control del resultado). Formulación oral o escrita de respuestas a ejercicios y problemas sobre el comportamiento variacional de la función lineal. En esta fase los estudiantes deben ser capaces de deducir el comportamiento variacional de las función lineales con solo analizar la su ecuación; o bien dado el comportamiento variacional de la función obtener la ecuación.

Avances del trabajo

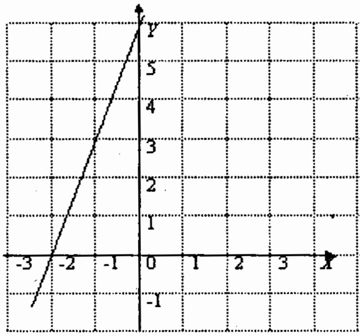
Sobre las actividades realizadas

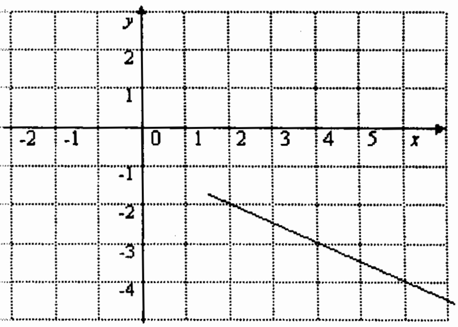
Una vez diseñadas las actividades de aprendizaje fueron llevadas al terreno de la enseñanza con un grupo de 24 estudiantes del Bachillerato en Computación en una institución de este nivel. Los participantes discutieron y resolvieron las actividades con las orientaciones del profesor, que este caso era el mismo investigador. Se utilizaron 7 sesiones de clase con una duración aproximada de 50 minutos cada una de ellas.

Al término de estas sesiones se aplicó un cuestionario con el objeto de medir algunos aspectos indicativos del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Este cuestionario incluye preguntas, problemas y ejercicios similares a los propuestos en las actividades de aprendizaje resueltos en clase. Las primeras dos preguntas están más cercanas a la primera etapa (acción materializada) pues se utilizan gráficas y tablas que brindan mucha información acerca de los cambios de las variables; las dos siguientes pueden ubicarse en la etapa verbal pues la interpretación el lenguaje simbólico (fórmulas) es el que mayor peso tiene en la realización de la actividad; y la última, la etapa mental propiamente dicha, pues para su realización no se dan descripciones detalladas del comportamiento variacional de la recta.

Cuestionario aplicado a los estudiantes

1. Analiza el comportamiento variacional de las siguientes rectas y deduce se ecuación:





(x, y)	Δx	Δy	m	Ecuación

(x, y)	Δx	Δy	m	Ecuación

2. En la tabla siguiente se muestran las temperaturas que experimenta un litro de agua en relación al tiempo. Analice los datos, obtenga los cambios, grafique y obtenga la ecuación de la recta a que dan lugar.

Tiempo (t) en seg.	0	5	10	15	20	25
Temperatura (T) en °C	95	90	85	80	75	70
¿Cuánto cambia t?						
¿Cuánto cambia T?						
$m = \dfrac{\Delta T}{\Delta t}$						
Ecuación						

3. Obtenga la ecuación de la recta que pase por el punto (-3, 2) y que se comporte de tal manera que siempre que: $\Delta x = 2$, $\Delta y = 3$.

4. Describa el comportamiento variacional de la recta: $y = -3x + 1$. Haga su gráfica.

5. Cuál es la ecuación de la familia de rectas que se comportan de manera que Δx y Δy, guardan la relación 3:2.

Los resultados obtenidos

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario anterior. **En la preguntas 1,** al analizar el comportamiento variacional de la primera y segunda recta, obtuvimos la siguiente resultados:

Acerca de la recta de la primera gráfica:

De 24 estudiantes a los cuales se les aplicó el cuestionario, un número considerable de ellos 15 ubicaron al punto (0, 6) como punto de la recta; un número menor de estudiantes 5, ubicaron también al punto (−1, 3) como otro punto de la recta; y un número más pequeño de ellos 2, ubicaron otro punto de la recta (− 2, 0). En las siguientes dos columnas al visualiza los cambios de la variable independiente (Δx) y los de la variable dependiente (Δy), solamente un estudiante contestó que cuando $\Delta x = 1$, $\Delta y = 3$, pero 7 contestaron que si $\Delta x = 2$, $\Delta y = 6$. Por los resultados obtenidos podemos deducir que a la mayor parte de los estudiantes se les dificultó la determinación visual de los cambios.

Respecto a las razones de proporcionalidad de los cambios, 10 estudiantes contestaron que $\Delta y/\Delta x = 3$ es decir que $m = 3$, aunque fue menor el número de estudiantes que visualizaron los cambios de las variables. Aunque fueron pocos los estudiantes que visualizaron los cambios de las variables, así como el haber descubierto la razón de proporcionalidad, 12 estudiantes contestaron correctamente que la ecuación de la recta analizada es: $y = 3x + 6$.

Acerca de la recta de la segunda gráfica:

En el análisis del comportamiento variacional de esta, al ubicar los puntos de la recta en el sistema de coordenadas cartesianas se obtuvieron los siguientes resultados: 7 estudiantes ubicaron al punto (2, − 2), 2 al punto (6, − 4), 6 al punto (4, − 3), y 3 al punto (0, 3), todos ellos como puntos de la recta. De lo anterior se deduce que, incluso para localizar puntos en el plano de coordenadas cartesianas, los estudiantes tienen dificultades. Respecto a las dos columnas, donde se pide obtener los cambios de las variable independiente (Δx) y de la variable dependiente (Δy), 11 estudiantes contestaron que si $\Delta x = 2$, $\Delta y = -1$; 3 contestaron que si $\Delta x = 4$, $\Delta y = -2$; esto indica que menos de la mitad de los participantes visualizaron correctamente los cambios de las variables. Respecto a las razón de proporcionalidad de los cambios, el 50% de los estudiantes contestaron que $\Delta y/\Delta x = -1/2$ es decir que $m = -1/2$. Casi la mitad dan respuestas aceptables sobre los cambios de las variables y sobre la razón de proporcionalidad de los cambios. Aunque hubo un buen trabajo en los procedimientos precedentes solo 2 estudiantes dieron como ecuación a: $y = -(1/2)x - 1$

En la actividad 2, al analizar los datos de la tabla, la totalidad de los estudiantes pudieron calcular los cambios de tiempo es decir $\Delta t = 5$, así mismo 22 contesta que los cambios de temperatura son de $\Delta T = -5$. Las dos respuestas anteriores se corresponden con los tiempos y temperaturas dadas como datos en la tabla. Respecto a la razón de cambio $\Delta T/\Delta t$, 19 estudiantes contestaron correctamente que $m = -1$. Sólo 3 estudiantes hicieron correctamente la gráfica, 6 determinaron correctamente a la ecuación de la recta, siendo esta la siguiente: $y = -x + 95$.

A la mayor parte de estudiantes se le facilitó el análisis del comportamiento variacional de los datos dados en de la tabla, pese a esto muy pocos hicieron la gráfica, y todavía menos estudiantes obtuvieron ecuación de la recta.

En la actividad 3, de acuerdo a la información aportada sólo 4 estudiantes obtuvieron la ecuación correcta de la recta, siendo esta la siguiente: $y = (3/2)x + 13/2$

En la actividad 4, la mayoría de estudiantes no hace la descripción del comportamiento variacional de la ecuación de la recta: $y = -3x + 1$. Un estudiante hace la descripción del comportamiento y da como respuesta: $\Delta x = 2$, $\Delta y = 6$; tres más hacen la descripción del comportamiento variacional de la recta a partir de su ecuación obteniendo que $\Delta x = 2$, si $\Delta y = -6$; esta respuesta corresponde con lo que se pide, pese a que no hace la gráfica.

En la actividad 5, la mayoría de los estudiantes contesta erróneamente acerca de la pendiente de la recta pues dicen que es de la forma: $m = \Delta x/\Delta y$, incluso escriben erróneamente los resultados que obtienen, por ejemplo fue frecuente la frase: $m = \Delta 3/\Delta 2$. Nótese las confusiones acerca de la sintaxis del Δx y Δy, aquí se considera como dos literales separadas, Δ por un lado y x por el otro. Sólo 4 estudiantes obtuvieron la ecuación correcta de la familia de rectas, siendo la siguiente: $y = (3/2)x + k$

Conclusiones preliminares

Respecto a la primera fase, la fase materializada de la acción, en donde se utilizaron las gráficas como elemento visual principal para determinar los cambios, la mitad de los participantes los logran determinar. Aunque se notaron inconsistencias, particularmente cuando las rectas decrecen y los cambios de la variable dependiente son negativos. Respecto a la fase verbal la mayoría de los estudiantes dan muestras de su escasa comprensión de las expresiones de la forma: $y = mx + b$. Sólo la cuarta parte de los participantes dan muestras de interpretar esta simbología y representarla gráficamente, aunque no estamos seguros de que en sus interpretaciones hayan utilizado la relación de variación directamente proporcional que encierra el coeficiente m. De acuerdo con los resultados, la interiorización del contenido del lenguaje variacional subyacente en la ecuación de la recta (fórmula de la función lineal) es aún incipiente en muy pocos estudiantes.

Estos resultados indican que, en situación escolar la formación de acciones mentales, es aún incompleta. Esto ese debió posiblemente a un nivel de partida deficiente, muchos elementos previos no estaban presentes en los estudiantes, muchos de los estudiantes no realizaban independientemente las tareas para la casa, se presentaron irregularidades en la puntualidad y asistencia, se notó que los estudiantes participantes no están acostumbrados a resolver problemas, los participantes mostraron escasa capacidad para visualizar y analizar gráficas, parecen más proclives a realizar operaciones. Sobre la base de estos resultados rediseñaremos las próximas actividades de investigación.

Bibliografía

Dolores C. (1997). *Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en situación escolar* (Proyecto de Investigación, registro CONACY 25640-S). Facultad de Matemáticas de la U. A. G; Chilpancingo, México.

Dolores C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis Doctoral, Instituto Superior Pedagógico "Enríque José Varona". Facultad de Ciencias; Habana, Cuba.

Dolores C. (1993). *Algunas consideraciones sobre los objetivos de la enseñanza del Cálculo Diferencial en el Bachillerato.* Publicaciones internas, Facultad de Matemáticas U. A. G. Chilpancingo, México.

Farfán R (1997). *Ingeniería Didáctica, un estudio de la variación y el cambio*; Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C. V; México.

Jungk (1979). *Conferencia sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2* (primera parte). Editorial Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana.

Nocedo/Pérez (1984). *Metodología de la investigación pedagógica y psicológica.* Editorial Pueblo y Educación. Playa, Ciudad de la Habana.

El desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia pedagógica en situación escolar en el bachillerato

Julio Cesar Solache Ramírez, Rosa Margarita Díaz Nava, Crisólogo Dolores Flores
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
CIMATE/ CONACYT
México

Resumen

El presente artículo se habla de los aspectos esenciales de un trabajo de investigación de corte experimental desarrollado en situación escolar. El trabajo tiene como objetivo desarrollar pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes del bachillerato. Se trata de la puesta en escena (es decir en condiciones de enseñanza en el aula) y la valoración de los resultados, de las principales actividades y secuencias didácticas que aparecen el cuaderno didáctico titulado: *Una introducción a la derivada a través de la variación* de Crisólogo Dolores Flores.

Introducción

La mayoría de profesores e investigadores en el campo de la matemática están convencidos de que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas representa un reto, esto se debe al alto índice de reprobación en ella y además por que se reconoce que esta es una de las causas principales de la deserción escolar. Esta situación es explicada por las autoridades educativas por medio de datos estadísticos y las soluciones que plantean es la de proporcionar cursos de actualización a sus profesores, quienes conocemos estos cursos nos hemos enterado de que difícilmente pueden resolver el problema, dado que son de corte muy teórico y tocan aspectos generales de la enseñanza.

Nuestro trabajo de investigación está motivado, en el plano general, por la problemática descrita anteriormente. Aunque nosotros creemos que la solución de estos problemas pueden ser resueltos si son estudiados en forma científica. Especialmente estamos interesados en estudiar científicamente el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática del cambio que enseña en el bachillerato.

Objeto de estudio

Nuestro trabajo toma como objeto de estudio al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática del Nivel Medio Superior, se centra en la matemática de la variación y el cambio.

La matemática del cambio implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, los conceptos de variable, función, derivada e integral, sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio. Incluye necesariamente a los procesos como el paso al limite o la articulación del pensamiento predictivo y su eventual matematización (Cantoral,1997).Un concepto básico en la formación del pensamiento variacional es el cambio, éste es modelado en la matemática mediante las diferencias.

Las diferencias dan cuenta de cuanto cambia la variable en un proceso de variación. Las diferencias ya que cuantifican el cambio, son el elemento central de todo el cálculo y el análisis matemático, por eso y con razón a esta parte de la matemática se le conoce como la matemática de la variación y el cambio. Los procesos de cambio y su entendimiento son los objetos principales de estudio en nuestro trabajo y constituyen los elementos fundamentales en los cuales se basa la formación de las nociones de variable, función y de razones de diferenciales (derivada).

El problema

El problema central de nuestra investigación es el "escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes que terminan el bachillerato y de los que principian la universidad" (Dolores,1996; Cáceres1997). El **problema especifico** de nuestra investigación es el deficiente desarrollo de estos conocimientos en estudiantes del bachillerato, especialmente el que se relaciona con los conceptos, procedimientos y relaciones relativos a las variables, funciones, derivadas, función derivada y análisis del comportamiento variacional de funciones elementales.

Objetivo

El objetivo consistió en investigar la influencia que ejercen las situaciones y secuencias didácticas diseñadas en el cuaderno didáctico titulado: Una Introducción a la derivada a través de la variación, en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes del bachillerato en situación escolar.

Elementos teóricos

El pensamiento y lenguaje variacional es una línea de investigación introducida por un grupo de investigadores mexicanos del CINVESTAV del IPN. El pensamiento variacional es parte del pensamiento matemático avanzado (Tall 1991) y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por el otro (Cantoral,.1997).

En cuanto a la naturaleza del pensamiento y lenguaje variacional asumimos la premisa vigotskiana que plantea la unidad entre ambos en el pensamiento verbal. Esta unidad se encuentra en el aspecto interno de la palabra, en su significado. Una palabra no se refiere a solo un objeto sino a un grupo o a una clase de objetos, y cada una de ellas, es por lo tanto, también una generalización (Vygotsky, 1988). El lenguaje utilizado por la matemática del cambio tiene connotaciones específicas y su interiorización en forma de pensamiento es sumamente compleja. Sin embargo en nuestro trabajo consideramos como referente del desarrollo del pensamiento a las habilidades matemáticas. Estas se definen como las formas de ejecución de una actividad, en especial cuando esta actividad es conscientemente dirigida hacia un objetivo toma el nombre de habilidad, cuando su ejecución se automatiza el papel de la conciencias queda relegado a un segundo y se convierten en hábitos. Las habilidades se manifiestan por el *poder hacer* con el *saber.* Por ejemplo un estudiante puede *saberse* de memoria la definición de tangente a una circunferencia *pero ser incapaz* de usar esta definición en la resolución de un problema de construcción de tangentes. Sabe la definición pero no puede usarla, tiene el saber pero no tiene el poder.

Las principales habilidades que nos propusimos desarrollar se refieren a los siguientes contenidos divididos en dos bloques: el primero referente a las variables y funciones, y el segundo relativo a la variación y derivada. En cuanto al primero bloque las habilidades desarrollar son: representar variables, tanto en la recta numérica como con desigualdades, resolver problemas de variación usando variables, evaluar y graficar funciones, obtener la fórmula de las funciones, pooder determinar dónde $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ y dónde $f(x) = 0$, analizar el comportamiento variacional de las funciones. En el segundo bloque las habilidades propuestas son : obtener Δy y Δx, poder analizar el comportamiento de los cambios, cuantificar cambios por medio de procedimientos algebraicos, analíticos y geométricos, relacionar los cambios sucesivos y el comportamiento de funciones, poder calcular cambios relativos (rapidez y velocidad medias), obtener velocidades instantáneas por medios numéricos y analíticos, calcular la velocidad instantánea de la variación, interpretar la velocidad instantánea como la pendiente de la tangente, calcular diferenciales y derivadas, relacionar el comportamiento de $f'(x)$ y $f(x)$, analizar el comportamiento variacional de $f(x)$ utilizando $f'(x)$ y viceversa, resolver problemas de máximos y mínimos.

Metodología

En nuestro trabajo utilizamos las formas metodológicas de la investigación de las ciencias pedagógicas, particularmente algunos elementos de la experimentación pedagógica en el aula. Dadas Las condiciones en que se realizo el experimento nos fue muy difícil tener un control riguroso de todas las variables en juego, por tal motivo llevamos acabo una experiencia pedagógica en la que ejercimos cierto control de algunas variables a saber: la organización del contenido (plasmado en el material didáctico) y los métodos de enseñanza. La experiencia pedagógica se concretó en un curso ordinario de matemáticas IV, Cálculo Diferencial con dos grupos de estudiantes del bachillerato en programación del Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios No. 135 (CETis 135) ubicado en Chilpancingo Guerrero. En cuanto a los métodos de enseñanza utilizamos el método expositivo, método de elaboración conjunta, método de ejemplificación, método de dirección del trabajo independiente. Utilizamos principalmente métodos productivos pues nuestro interés principal fue el de desarrollar pensamiento variacional. Para controlar la experiencia realizamos las siguientes acciones: anotaciones, trabajos con ejercicios, y problemas en clase, tareas y exámenes. Los exámenes fueron diseñados con la finalidad de explorar los avances y obstáculos en el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes.

Resultados

A continuación se describen los resultados de la experiencia pedagógica, estos fueron valorados por medio de exámenes que para los estudiantes eran de validez oficial y por tanto obligatorios. En el primer examen se plantearon 9 preguntas, las primeras tres exploran la noción de variable, la 4, 5 y 6 exploran su representación geométrica y por medio de desigualdades; las preguntas 7, 8 y 9 el análisis del comportamiento de una gráfico de una función, la evaluación y la graficación por tabulación.

Resultados globales mostraron que el 69% de los estudiantes desarrollaron una idea de variable como la letra que puede adquirir valores sucesivos y la totalidad de ellos consideraron que las variables se representan mediante una letra, la mitad de los participantes fueron capaces de identificar las variables, dadas las fórmulas de funciones. Notamos inconsistencias en la mitad de los participantes cuando, intentan identificar a las constantes. El 34% identifican a la variable independiente el 34% en las fórmulas aunque la mitad no pudieron identificar a la variable dependiente. En la representación de intervalos de variación por medio desigualdades, alrededor del 27% en promedio pudieron hacerlo, quienes no lo lograron mostraron confusiones en la escritura de los intervalos abiertos y semiabiertos, ningún estudiante pudo escribir intervalos discontinuos con desigualdades. En la representación geométrica en la recta real de intervalos los resultados fueron mejores, ya que el 42% lograron hacerlo correctamente.

En cuanto a la graficación y al análisis de funciones, en particular cuando se les pregunta acerca de la imagen de la función casi el 11% contesta que es $f(x)$. En cuanto al crecimiento, el 26% en promedio pudieron obtener los intervalos, se observaron dificultades en la utilización de las desigualdades. Cuando se pide el decrecimiento aparecen serias dificultades. Respecto de los puntos estacionarios de la función el 21% de los estudiantes los confunden con la idea de función nula. En cuanto a los intervalos donde $f(x) > 0$, el 10% en promedio de los estudiantes pueden obtenerlos. Parece ser que la mayoría de los estudiantes no comprenden el significado de la simbología $f(x) > 0$. En los intervalos en donde la función es negativa la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades. Respecto de los puntos en donde la función es nula el 28 % de los estudiantes desarrolló una idea aceptable. El 39% de os estudiantes desarrollaron aceptablemente la habilidad de evaluar cierta función.. Respecto de la habilidad de gráficar una función elemental por medio de la tabulación y por el análisis de sus formulas. Solamente el 30 % de los estudiantes pudieron trazar y evaluar correctamente el gráfico de la función y lo realizaron solamente por medio de la tabulación.

En el segundo examen se plantearon 8 preguntas relativas a la variación y el cambio. Las preguntas 1 y 2 exploran ideas acerca de la variación y el cambio. La pregunta 3 explora los procedimientos para calcular el estado final cuando la variable independiente cambia de $t_i+\Delta t$. La pregunta 4 explora los procedimientos para la cuantificación numérica y el análisis de los cambios. La pregunta 5 explora la idea de rapidez de la variación. La pregunta 6 explora la habilidad de predecir la nueva posición de una partícula dada su posición inicial y su rapidez de variación. Con la pregunta 7 se explora si los estudiantes relacionan la expresión $\Delta y = 0$ con su equivalente: $f(x_i + \Delta x)-f(x_i)= 0$. La pregunta 8 se refiere a un problema, en el se solicita la rapidez de la variación de un cuerpo en movimiento a partir de su fórmula.

De acuerdo con los resultados globales, el 78% de los estudiantes desarrollaron una idea de variación aceptables casi todos coinciden en que son cambios. El 17 % de los estudiantes indican que los cambios se miden por medio de restas, estos estudiantes lograron desarrollar la idea correcta. El 26% de los estudiantes contestaron que los cambios se miden por medio de gráficos, casi el 35% de los estudiantes contestó que los cambios se miden por medio de intervalos, un 17% de estudiantes indica que los cambios se miden por medio de funciones.

Respecto de los procedimientos para cuantificar los cambios: $s(t_i+\Delta t)$- $s(t_i)$, en los procedimientos de evaluación en $s(t_i)$ y $s(t_i + \Delta t)$ el 14% de las realizaron s, la mayoría tuvieron dificultades en la evaluación, en especial en la utilización correcta de los exponentes, mayores dificultades presentan en la evaluación de $s(t_i+\Delta t)$ principalmente en el desarrollo de binomios al cuadrado o al cubo, otros presentaron dificultades en la obtención de los Δs, algunos estudiantes omitieron u olvidaron la evaluación de alguno de los términos de s_f - s_i. En cuanto a los procedimientos para calcular cambios por medios gráficos y analíticos se obtuvieron los siguientes resultados: respecto del aspecto gráfico el 24 % en promedio de los estudiantes calculan los cambios correctamente, la mayoría de los estudiantes confundieron los cambios de la variable independiente con los cambios de la variable dependiente. En el cálculo por medios analíticos, en particular en donde la variable dependiente no cambia, el 26% de los estudiantes lo hicieron correctamente, un 21% de los estudiantes solamente repiten la posición inicial dada.

Respecto a la determinación de mayor, menor o rapidez nula, a partir de una tabla, los resultados indican que la idea de mayor rapidez es clara para casi el 28% de los estudiantes. Respecto de la idea de menor rapidez el 30% logran reconocerla en un gráfico y la no variación el 69%. Al explorar la relación entre la expresión $dy = 0$ y sus expresiones analíticas equivalente, es decir cuando $s(t + \Delta t)-s(t) = 0$ o bien $s(t_i + \Delta t)$- $s(t_i) = 0$, ninguno de los estudiantes da una argumentación convincente, aunque el 78% muestran tener nociones correctas acerca de la interpretación de la notación.

En el tercer examen se plantearon seis preguntas, las primeras dos exploran la noción de velocidad instantánea, la tercera explora la habilidad de en la interpretación de la simbología utilizada en la definición de derivada sobre la base de su interpretación gráfica. En la pregunta cuatro se investiga la habilidad para operar numérica y algebraicamente con la velocidad instantánea. En la pregunta seis se investiga el desarrollo de habilidades en la obtención de diferenciales de cinco funciones mayoritariamente algebraicas

De acuerdo con los resultados el 61% de los estudiantes desarrollaron una idea de velocidad instantánea relacionándola con los *cambios infinitamente pequeños*, y *a la velocidad de una partícula en un instante*, en cuanto a la estrategia básica para calcular la velocidad instantánea la mayoría de los estudiantes se inclinaron por la que consiste en la *búsqueda del limite de $\Delta s/\Delta t$ cuando Δt es infinitamente pequeño.*

En la pregunta tres, el 26% en promedio de los estudiantes mostraron evidencias de poder relacionar e interpretar la expresión de la definición de la derivada: con la velocidad instantánea, la pendiente de la tangente, la velocidad media o pendiente de la secante; los de más estudiantes tuvieron dificultades. Al correlacionar la definición de derivada expresada mediante el límite del cociente incremental con su representación gráfica, la mitad de los estudiantes todavía señalan que la derivada se mide en dos puntos. En la mitad de los estudiantes que participaron en el curso se desarrolló la idea de que cuando $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta s/\Delta t$ es un infinitesimal. Casi la mitad de los estudiantes logran identificar correctamente la expresión que se emplea para obtener la pendiente de la secante: $m = \Delta s/\Delta t$; en la identificación de la pendiente de la tangente se observan confusiones pues seis estudiantes consideraron que $\Delta s/\Delta t = ds/dt$. Parece que la relación entre los símbolos empleados y las ideas matemáticas que representan no son consistentes, pues Δs representa cambios grandes y ds cambios infinitamente pequeños.

Las preguntas cuatro y cinco se desprenden de un problema sobre el cálculo de la velocidad instantánea, en la primera se pide obtener ésta por la vía numérica y en la segunda por la vía algebraica. En cuanto a la primera los estudiantes dieron tres tipos de respuestas: aquéllos que en general realizaron los procedimientos numéricos aproximándose a $t_i = 2$ correctamente, tanto por la derecha como por la izquierda, calculando el Δt correspondiente; pero cometieron errores al aplicar la ley de signos y hubo quien solo le faltó inferir correctamente el límite de sucesiones de cocientes. Los del segundo tipo calculan correctamente el Δt pero se equivocan al calcular el Δs y los del tercer tipo no contestaron. En el primero se ubicaron tres estudiantes, en el segundo trece y en el tercero siete. En cuanto al cálculo algebraico las dificultades fueron mayores, solamente dos estudiantes la realizan correctamente, ocho estudiantes se equivocaron y trece no contestaron; las equivocaciones frecuentes se manifestaron en las evaluaciones de $s(t_i)$ y $s(t_i + \Delta t)$, en el desarrollo del binomio al cuadrado, en la utilización de los signos y las operaciones algebraicas como la multiplicación de polinomios.

Finalmente en la obtención de diferenciales mediante formulas, el 52% de los estudiantes lograron obtener la diferencial de: $y = 10.5$, el 47% obtienen correctamente la diferencial de: $y = 8x$, el 26 % obtienen correctamente la diferencial de: $y = 2x^5$, en la diferencial de la función $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + \pi$ se observa que las complicaciones se incrementan cuando los polinomios contienen un mayor numero de términos y aún mas complicaciones surgen cuando se trata de obtener diferenciales de funciones bajo radicales.

En el **cuarto cuestionario** se plantearon siete preguntas, las dos primeras exploran la noción de diferencial y de derivada. La segunda explora la habilidad de los estudiantes en la utilización de las reglas básicas de derivación y la obtención de las derivadas por medio de diferenciales. La pregunta tres explora sobre la base de un gráfico, la idea de rapidez de crecimiento de la curva y la comprobación de la respuesta. En la pregunta cuatro, sobre la base de dos gráficos se explora dos aspectos la habilidad del estudiante para calcular la pendiente en un punto de la curva y la habilidad en la obtención de la ecuación de la tangente a la curva en un punto dado. La pregunta cinco explora por medio del análisis de la gráfica de $f(x)$, la habilidad del estudiante para representar el gráfico de $f'(x)$. En la pregunta seis se explora la habilidad del estudiante para identificar en cuál o cuáles de los gráficos propuestos se cumple que $dy/dx=0$ en $x= a$.

Respecto de la noción de diferencial el 78% de los estudiantes desarrollaron esta idea aceptablemente. En la noción de derivada se observo que el 65% de los estudiantes desarrolló ideas aceptables acerca de la derivada, un 48% aproximadamente la asocian con la razón o la división entre diferenciales y un 17% la asocian con el cambio o la velocidad instantánea.

En lo que corresponde al desarrollo de habilidades en la utilización de las reglas básicas de derivación y en la obtención de la derivada por medio de diferenciales, una revisión global a los procedimientos empleados para obtener derivadas nos muestra que, una cantidad significativa de estudiantes, pueden calcular derivadas de funciones polinómiales sencillas como es el caso de las siguientes funciones: **a)** $y= 2- 5x + 3x^2$, el 30% de los estudiantes,

b) $s(t)=1/2t^2-80t$, el 30% de los estudiantes; en cambio cuando se trata de hallar derivadas de productos, de cociente de funciones o de funciones racionales surgen las siguientes complicaciones: equivocaciones al utilizar la regla adecuada de derivación, se equivocan al emplear correctamente la regla de derivación, se equivocan al realizar procedimientos algebraicos, además muestran dificultades en las operaciones con los signos y los exponentes.

Con lo que respecta a la idea de rapidez de crecimiento de una curva, el 65% de los estudiantes contestaron correctamente y con lo que respecta a la argumentación de sus respuestas aproximadamente el 21.7 % de los estudiantes intentaron darla pero estos fueron poco convincentes.

Respecto de la habilidad para calcular la pendiente en un punto de la curva solamente un estudiante pudo calcularla, el 34.7% dieron resultados poco relevantes, la mayoría de ellos ignoraron la fórmula de la función y decidieron contestar buscando alguna relación en el gráfico dado, se observó que el 39% de los estudiantes no contestaron. En esta misma pregunta pero ahora relacionada con la habilidad del estudiante para obtener la ecuación de la tangente a la curva en un punto dado, solamente un estudiante que representa el 4.3% de los participantes obtuvo una aproximación de la ecuación de la pendiente bastante aceptable, se observó que aproximadamente el 74% de los estudiantes no contestaron la pregunta.

En la habilidad para analizar el gráfico de la función de $f(x)$, se observó que en el **crecimiento** de la función, casi el 40% de los estudiantes lo identifican correctamente. El 47.8 % de los conservan confusiones como: confunden la noción de función positiva con la noción de función creciente, tienen dificultades con el manejo de la notación de intervalos. En el **decrecimiento** de $f(x)$, se observó que el 30% de los estudiantes tienen idea clara acerca de ello. El 56% de los conservan muchas confusiones entre las que destacan las siguientes: confunden la noción de función negativa con la de función decreciente, tienen dificultades con el manejo de la notación de intervalos y además asocian el decrecimiento con el menor valor de la ordenada. Con lo que respecta al **máximo** de $f(x)$, el 34% de los estudiantes tienen idea acerca del máximo de $f(x)$. El 52% muestran confusiones como: contestan que en donde $f(x)$ es cero tiene un máximo, utilizan intervalos y otros dan como máximo a la ordenada máxima sin mencionar a que valor de x corresponde, no contestaron el 13% de los estudiantes. En el **mínimo** de la función el 56% de los estudiantes muestran tener clara esa idea. El 21.7% muestran confusiones como: la utilización de intervalos en vez de puntos.

Respecta a la habilidad para esbozar la gráfica de $f'(x)$ a partir del análisis del comportamiento de la gráfica de $f(x)$, sólo un estudiante obtuvo correctamente los intervalos en donde la derivada es **negativa**, otro determinó solamente un intervalo, se observó que la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para obtener los intervalos en donde la gráfica de la derivada es negativa. En la determinación de los intervalos en donde la derivada es **positiva**, un estudiante determina correctamente el intervalo. Acerca de los puntos en donde la derivada se **anula**, el 52% de los participantes parecen tener ideas aceptables. Se notó que algunos estudiantes obtuvieron los intervalos sin haber dibujado la gráfica de $f'(x)$, estos estudiantes no argumentan sus respuestas.

Respecto de la habilidad para identificar en una gráfica dónde se cumple que $dy/dx=0$ en $x = a$, se observó lo siguiente: el 34% de los estudiantes identificaron correctamente los tres puntos para los cuales la gráfica de la derivada se anula, el 13% de señalaron solamente dos puntos, no señalaron la gráfica en donde tiene punto de inflexión. El resto aunque señalan algunos otros que son correctos, también señalan otros que son incorrectos, estas pueden ser manifestaciones de sus inconsistencias conceptuales acerca de la noción de nulidad de $f'(x)$ en $x = a$.

Referencias bibliográficas

Cáceres, T.: 1997. *Estudio exploratorio de las ideas variacionales en estudiantes del bachillerato y principiantes universitarios*. Tesis de maestría. Inédita. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN.

Cantoral, R.: 1997. *Pensamiento y lenguaje variacional* (inédito). Seminario de investigación de área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN.

Dolores, C.: 1989. Algunos Obstáculos epistemológicos relativos a la noción de derivada. *Memorias de la 3ª. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. San José de Costa Rica, C.A.

Dolores, C.: 1996. *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*. Tesis Doctoral. Inédita. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro.

Dolores, C.: 1998. *Una introducción a la derivada a través de la variación*. Libro aceptado para su publicación en la Serie Cuadernos Didácticos por el Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.

Tall, D.: 1991. The Psicology of Advanced Mathematical Thinking. Del libro *Advanced Mathematical Thinking*, Tall D. (Editor), Kluwer Academic Publishers, pp. 3-21.

Vigotsky, L.: 1988. *Pensamiento y lenguaje*. Ediciones Quinto Sol. México D. F.

Vinner, S.: 1992. The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. Del libro *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, editado por Harel & Dubinsky. MAA Notes, Volumen 25, pp. 195-213.