Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 31 » NÚMERO 1 » AÑO 2018 » ISSN 2448-6469

ALME 31

Coordinación editorial

Rebeca Flores
México

Editores responsables

Luis Arturo Serna
México

Daniela Páges
Uruguay

Comité editorial

Cariño Ruiz
México

Cristina Ochoviet
Uruguay

Daniela Pagés
Uruguay

Domingo Yojcom
Guatemala

Gustavo Daniel Franco
Uruguay

Hipólito Hernández
México

Irene Carolina Pérez
México

Iván Esteban Pérez
Chile

Jesús Enrique Hernández
México

Jesús Enrique Pinto
México

Luis Alberto López
México

Marco Aurélio Kistemann
Brasil

Marger da Conceição Ventura
Brasil

María del Socorro García
México

Mariangela Borello
México

Mariela Rey
Uruguay

Mario Dalcín
Uruguay

Milton Rosa
Brasil

Mónica Isabel Olave
Uruguay

Olivia Alexandra Scholz
México

Paula Andrea Rendón
Colombia

Rodolfo David Fallas
Costa Rica

Sebastián Parodi
Uruguay

Daysi Julissa García
Perú

Diseño:

Gabriela Sánchez Téllez

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 31, Número 1, febrero 2018, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, alme.clame@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2017-071712431200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469.

ALME es una publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: Presidente: Olga Lidia Pérez (Cuba); Secretario: Hugo Parra Sandoval (Venezuela); Tesorera: Daniela Reyes Gasperini (Argentina); Vocal Norteamérica: Rebeca Flores García (México); Vocal Caribe: Juan Manzueta Concepción (República Dominicana); Vocal Centroamérica: Rodolfo David Fallas Soto (Costa Rica); Vocal Sudamérica: Marcela Parraguez González (Chile).

Comité Científico de Evaluación

ARGENTINA

Adriana Engler
Ana Rosa Corica
Cecilia Ester Elguero
Cecilia Rita Crespo
Christiane Cynthia Ponteville
Claudia Minnaard
Diana Patricia Sureda
Elisa Silvia Oliva
Mabel Rodríguez
Marcela Evangelina Götte
Haydeé Blanco
Lidia Beatriz Esper
Liliana Mabel Tauber
María de los Ángeles Fanaro
María Julia Améndola
María Rita Otero
María Angélica Pérez
María Elina Vergara
María Susana Dal Maso
Marta Inés Marcilla
Nora Inés Lerman
Silvia Vrancken
Teresa Claudia Braicovich
Viviana Carolina Llanos

BRASIL

Ademir Basso
Claudia Lisete Oliveira
Marco Aurélio Kistemann
Marger da Conceição Ventura
Juliana Silva
Milton Rosa
Nielce Lobo

CHILE

Andrea Dorila
Astrid Marlene Morales
Claudio Eduardo Fuentealba
Eduardo Carrasco
Marcela Parraguez
Nicolás Sánchez
Patricia Vásquez
Isabel García
Iván Esteban Pérez
Jaime Mena
Luis Pino-Fan

COLOMBIA

Mario Rafael Estrada
Paola Alejandra Balda
Ingrith Yadira Álvarez
William Andrey Suárez

COSTA RICA

Enrique Vílchez
Rodolfo David Fallas
Fabián Wilfrido Romero

CUBA

Anelys Vargas
Luis Antonio Perfetti
Seydel Bueno

ESPAÑA

Carmen López
José Carrillo
María Belén Giacomone
María del Mar López

MÉXICO

Adriana Gómez
Adriana Atenea de la Cruz
Agustín Grijalva
Angélica Dueñas
Blanca Ruiz
Cariño Ruiz
Carlos Daniel Prado
Catalina Navarro
Clara Cristina Eccius
Claudia Flores
Claudia Margarita Acuña
Cuauhtémoc Emmanuel Rodríguez
Darly Alina Kú
Eduardo Carlos Briceño
Elena Nesterova
Enrique Javier Gómez
Erika García
Esteban Mendoza
Luz Esmeralda Reyes
Magdalena Rivera
Flor Monserrat Rodríguez
Germán Muñoz
Gloria Angélica Moreno
Gricelda Mendivil
Héctor Ramírez
Hipólito Hernández
Irene Carolina Pérez
Javier García
Jesús Enrique Hernández
Jesús Enrique Pinto
Jorge Ávila
José Carlos Ramírez

MÉXICO

José Marcos López
José Trinidad Ulloa
José Rafael Couoh
Judith Alejandra Hernández
Julio Moisés Sánchez
Landy Sosa
Leonardo David Glasserman
Lidia Aurora Hernández
Lilia López
Lilia Patricia Aké
Lizzeth Aurora Navarro
Lorena Jiménez
Lorenzo Contreras
Luis Alberto López
Luis Manuel Aguayo
María del Socorro García
María Teresa Martínez
María del Carmen Fajardo
María Esther Magali Méndez
María Guadalupe Amado
María Guadalupe Lomelí
Mariangela Borello
Maribel Vicario
Maricela Armenta
Mayra Báez
Miriam Martínez
Ofelia Montelongo
Olivia Alexandra Scholz
Raúl Alonso Ramírez
Rebeca Ascencio
Reyna Arcelia Brito
Rita Guadalupe Angulo
Rogelio Ramos
Rosa María Farfán
Rosa Isela Vázquez
Rubén Darío Santiago
Ulises Alfonso Salinas
Víctor Larios
Saúl Ezequiel Ramos
Silvia Elena Ibarra

PANAMÁ

Analida Isabel Ardila

PERÚ

Cintya Gonzales
Daysi Julissa García-Cuéllar
Francisco Javier Ugarte
Isela Patricia Borja
Juan Carlos Sandoval

URUGUAY

Daniela Pagés
Mariela Rey
Mario Dalcín
Mónica Isabel Olave
Sebastián Parodi
Teresa Cristina Ochoviet
Verónica Molfino

VENEZUELA

Angélica María M.
Sandra Liliana Castillo
Yaneth Josefina Ríos

PRESENTACIÓN

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, promueve tres proyectos muy importantes para el desarrollo de la Matemática Educativa como disciplina científica: la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa – RELME, la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa-RELIME y el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa – ALME, los cuales han incidido notablemente en la conformación de redes de colaboración entre docentes e investigadores y en la creación y perfeccionamiento de programas de postgrados en la región.
El impacto social de estos proyectos es notable en la movilización científica y académica de la comunidad latinoamericana de Matemática Educativa, pues cada vez es mayor el número de participantes en la RELME y de interesados en publicar en ALME.

Esto exige a CLAME la necesidad, cada vez mayor, en el rigor y la calidad de ALME y de asumir el reto de proyectar su visibilidad internacional, "deseando" con ser una revista posicionada en los mejores índices internacionales donde se puede publicar, e ir fortaleciéndose poco a poco como lo ha hecho RELIME.

Para lograr hacer realidad ese "sueño" se deben dar pasos precisos. Es por eso que cumpliendo con el criterio de periodicidad ALME, por primera vez en su volumen 31, aparecerá en dos números los cuales serán publicados en los meses de febrero y Julio. Para las próximas ediciones podrán apreciarse otros cambios que serán anunciados desde la primera convocatoria de la RELME 33.

En esta ocasión se presenta el número 1 del volumen 31 de ALME, correspondiente a la RELME 31, organizada y desarrollada por el Departamento de Matemática de la Universidad de Lima, Perú en el mes de julio de 2017.

Los trabajos correspondientes a este primer número fueron sometidos a un riguroso proceso de evaluación con la participación de 181 árbitros de 12 países, y siendo un total de 125 artículos publicados que corresponden a autores procedentes de 9 países, los cuales se organizaron en cinco secciones:

1. Análisis del discurso matemático escolar,
2. Propuestas para la enseñanza de las matemáticas,
3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar,
4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional,
5. Uso de los recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Los 125 artículos que conforman este número constituyen una valiosa propuesta de docentes de Matemática y/o investigadores en Matemática Educativa de Latinoamérica, que pueden enriquecer nuestras prácticas docentes y/o actividad investigativa, con la seguridad de que tienen un alto nivel de calidad y de rigurosidad para ser utilizados como bibliografía actualizada.

El reconocimiento de siempre a:

- Los autores, por utilizar al ALME como plataforma para compartir los resultados de sus estudios, experiencias y/o investigaciones.
- Los árbitros, por la calidad y rigurosidad del trabajo realizado, su constancia y responsabilidad.
- A los editores, por la calidad del trabajo realizado, en especial a la Dra. Rebeca Flores, por la dedicación y empeño de posicionar al ALME como una revista de visibilidad internacional.

Olga Lidia Pérez González
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2016-2020)

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

PRESENCIA DEL CÍRCULO HERMENÉUTICO DE LA COMPRENSIÓN EN LA INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ALUMNOS
Jesús Gallardo Romero y Verónica A. Quintanilla Batallanos **23**

PREDICCIÓN INFORMAL EN UN DIAGRAMA DE PUNTOS
Ana García y Gabriel Yáñez **32**

CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES NO DESENVOLVIMENTO DO DOMÍNIO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BRASILEIRA
Valdir Bezerra dos Santos Júnior, Renato da Silva Ignácio, Marlene Alves Dias y Míriam do Rocio Guadagnini **40**

PRAXEOLOGIAS EXISTENTES PARA O ENSINO DA NOÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL NO ENSINO MÉDIO NO BRASIL
Sirlene Neves de Andrade y Marlene Alves Dias **48**

CONEXIONES MATEMÁTICAS ASOCIADAS AL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DETECTADAS EN ESTUDIANTES DEL PREUNIVERSITARIO
Javier García-García y Crisólogo Dolores Flores **56**

CONVERSIONES ENTRE LOS REGISTROS SIMBOLICO Y COLOQUIAL EN TÉRMINOS DE FUNCIONES SEMIÓTICAS
María Laura Distéfano, María Andrea Aznar y Marcel David Pochulu **65**

PROCEDIMIENTOS LÓGICOS DE VALIDACIÓN Y CUANTIFICACIÓN EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA
Rodolfo Eliseo D´Andrea, Mónica Real, Alejandra Cañibano y Patricia Sastre Vázquez **73**

EL PROCESO LÓGICO DE VERIFICACIÓN DE HIPÓTESIS EN EL ESQUEMA ARGUMENTATIVO DE LA DEMOSTRACIÓN
Rodolfo Eliseo D´Andrea, Mónica Real, Alejandra Cañibano y Patricia Sastre Vázquez **81**

TABLA DE CONTENIDOS

CONSIDERACIONES DE LA PRÁCTICA DOCENTE EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA
María Rosa Rodríguez y Sandra Noemí Franco **89**

EL MODULOR COMO AGENTE CONSTRUCTOR DE CONOCIMIENTO: EL NÚMERO ÁUREO Y USOS EN LA ARQUITECTURA
Emmanuelle Peralta Orbenes; Jaime Huincahue Arcos **94**

DETECCIÓN DE ERRORES Y CONTRADICCIONES EN UN PROBLEMA DE UN LIBRO DE TEXTO DE MATEMÁTICAS: UNA EXPLORACIÓN INICIAL DEL PENSAMIENTO CRÍTICO DE LOS MAESTROS
Honorina Ruiz-Estrada, Josip Slisko y Juan Nieto-Frausto **106**

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA RELACIONADA A LAS CONCEPCIONES DE FRACCIÓN
Milagros Edith Carrillo Yalán **115**

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

EL RIESGO COMO CONTEXTO EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL
Carmen Batanero y Mª Magdalena Gea **125**

EL PROCESO DE TRANSNUMERACIÓN CON PROFESORES DE MATEMÁTICA EN EL ANÁLISIS DE DATOS
Solangela Natividad López Huayhualla y Katia Vigo Ingar **133**

CONSTRUCCIÓN DE PENSAMIENTO FUNCIONAL: UNA EXPERIENCIA EN UN PROGRAMA DE ENRIQUECIMIENTO EXTRACURRICULAR
Mónica Adriana Pineda Ballesteros y Solange Roa Fuentes **141**

TABLA DE CONTENIDOS

SIMBOLOGIA DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS NA PINTURA CORPORAL MEBÊNGÔKRE
Rosiléia de Oliveira Mundoco, José Roberto Linhares de Mattos y Eulina Coutinho Silva do Nascimento **149**

SABERES MATEMÁTICOS EMPÍRICOS DE PESCADORES
Dayane Olivério de Souza y José Roberto Linhares de Mattos **158**

ARTESANATOS PAITER SURUÍ: ETNOMATEMÁTICA NA ALDEIA
Antonio Ferreira Neto y José Roberto Linhares de Mattos **166**

IDONEIDAD DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA, MEDIANTE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO
Jaime David Grisales y Eliécer Aldana **175**

PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA LA CONVERSIÓN DE REGISTROS EN EL TRATAMIENTO DE LAS FUNCIONES LINEALES Y AFINES
Carlos Andrés Ledezma Araya, Elisabeth Ramos-Rodríguez y Patricia Vásquez **182**

ACTITUDES DE LOS ESTUDIANTES HACIA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS EN SU ENTORNO FAMILIAR Y EN EL AULA, UN ACERCAMIENTO DESDE EL DOMINIO AFECTIVO
Felipe Marín Álvarez **192**

CRIANÇAS COM SÍNDROME DE DOWN: CONCEPÇÕES SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA
Elizândra de Sousa Barroso, Janaína Isabela de Jesus, Daniela Alves da Silveira Moura y Maria Goreth Carneiro **200**

PRÁTICAS PEDAGÓGICAS DO ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO ESCOLAR INDÍGENA E O DIÁLOGO COM A ETNOMATEMÁTICA
Aldenor Araújo da Silva y José Roberto Linhares de Mattos **207**

INVENCIÓN DE PROBLEMAS EN UN CONTEXTO DE COMPETITIVIDAD Y COOPERACIÓN: UNA EXPERIENCIA CON SUMAS DE SERIES
Lorena Salazar Solórzano **215**

TABLA DE CONTENIDOS

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA MEJORAR EL RAZONAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Carlos Manuel Sabino Escobar, Emilio Máximo Vera Namay, Gaspar Chávez Dioses y Ángel Gutiérrez **223**

APRENDER MATEMÁTICA, HACIENDO MATEMÁTICA: LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA
Guadalupe Xochitl Chávez Pérez, Ángel Homero Flores Samaniego y Adriana Gómez Reyes **232**

ALGUNAS EXPERIENCIAS DE INTEGRACIÓN ENTRE LA DISCIPLINA MATEMÁTICA CON OTRAS DE LA CARRERA DE ARQUITECTURA Y URBANISMO EN LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA HABANA
Miriam C. Crespo Estrada, Karen Sanabria Ortega y María de los Ángeles González Peñalver **240**

VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN
Sandra Baccelli, Sergio Anchorena y Stella Maris Figueroa **248**

MEJORA DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA SOBRE LA VINCULACIÓN ENTRE UNA VARIABLE ESTADÍSTICA Y SU VARIABLE ALEATORIA ASOCIADA
Stella Maris Figueroa y Sandra Baccelli **257**

ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE TAREAS PARA FAVORECER CONVERSIONES DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS A SIMBÓLICAS
María Andrea Aznar, María Laura Distéfano y Emilce Moler **265**

ANÁLISIS DE LAS EXPLICACIONES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS SOBRE EL FUNCIONAMIENTO DE JUEGOS DE AZAR EN PROBABILIDAD
Beatriz Adriana Rodríguez González e Isaias Miranda Viramontes **273**

DESARROLLO DE PROCESOS COGNITIVOS BÁSICOS: LA FUNCIÓN POTENCIAL EN CONTEXTO
Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano, Mónica Real y Rodolfo Eliseo D´Andrea **282**

EXPERIENCIAS DE LA RELACIÓN ENTRE LAS DISCIPLINAS DE INGENIERÍA Y GESTIÓN DE SOFTWARE Y MATEMÁTICA SUPERIOR EN LA FORMACIÓN DEL INGENIERO INFORMÁTICO
Anaisa Hernández González y Esther Ansola Hazday **290**

TABLA DE CONTENIDOS

ACTIVIDADES AUTOEVALUATIVAS EN LINEA PARA FAVORECER LA COMPRENSION DE CONTENIDO MATEMATICO EN LA MODALIDAD SEMIPRESENCIAL
Ana María Olachea, Fernando Javier Caniffi yAdriana Mónica Peccia **300**

APROXIMACIÓN Y MODELADO CON B-SPLINES USANDO EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO
Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez y Juan Rafael Garibay Bermúdez **309**

INFLUENCIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL ABANDONO ESTUDIANTIL EN LOS PRIMEROS AÑOS DE LAS CARRERAS DE INGENIERÍA
Teresa Carrasco Jiménez, Esther Ansola Hazday y Eugenio Carlos Rodríguez **317**

VINCULACIÓN Y TRANSICIÓN ENTRE LOS NIVELES MEDIO Y SUPERIOR: UNA INVESTIGACIÓN NECESARIA
Nelly Rigaud Téllez y Ángel Homero Flores Samaniego **325**

INGENIERÍA DIDÁCTICA DEL PROCESO DE PRUEBA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS
Rodolfo Eliseo D´Andrea **334**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁREA EN UN CONTEXTO TOPOGRÁFICO
Diana Lucía Villamil Rincón y Eliécer Aldana Bermúdez **342**

DIFERENTES INTERPRETACIONES DE LA IMPLICACIÓN: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE
Isabel García-Martínez y Marcela Parraguez **349**

UM OLHAR PARA ABORDAGEM DOS SIGNIFICADOS DE PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL
César Diogo Bezerra da Silva y José Ivanildo Felisberto de Carvalho **358**

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LOS CONCEPTOS DE HOMEOMORFISMO Y DIFEOMORFISMO
Juan Martín Casillas González, Marisol Radillo Enríquez y Vladimir Efremov **365**

TABLA DE CONTENIDOS

MATEMÁTICA EN LAS CIVILIZACIONES: ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA EN EL ANTIGUO EGIPTO Y BABILONIA
Fabiola Delgado Navarro y Johanna Brenes Ortega **373**

TESELACIONES COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA SIMETRÍA
Lucía Solís-Castro y Socorro Daly-Soto **379**

CONCEPCIONES QUE SOBRE LA PENDIENTE TIENEN ESTUDIANTES PREUNIVERSITARIOS ANTES DE SU ENSEÑANZA FORMAL
Martha Iris Rivera López y Crisólogo Dolores Flores **384**

LA YUPANA: UN INSTRUMENTO HISTÓRICO COMO ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS
Belén Cabrera Navarrete **392**

EL CÁLCULO ALGEBRAICO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA
Edinson Matheus Camacho y Gabriel Yáñez Canal **397**

TRANSFORMACIÓN METODOLÓGICA EN LO RELATIVO A LA ARITMÉTICA ESCOLAR EN PRIMER AÑO DE ENSEÑANZA BÁSICA
Marta Cecilia Salazar Aburto, Rafael Bracho López y Natividad Adamuz Povedano **404**

ANÁLISIS EXPLORATORIO SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS MATRICES Y FORMAS CUADRÁTICAS, Y SU RELEVANCIA EN EL ESTUDIO DE SECCIONES CÓNICAS PARA ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA MEDIA
Camilo Higuera, Hernaldo Millar y Guisell Sepúlveda **409**

CREENCIAS ACERCA DE LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES COLOMBIANOS: ADAPTACIÓN Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO
José Manuel Diego-Mantecón y Francisco Javier Córdoba-Gómez **418**

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: UMA ANÁLISE DO PRIMÓRDIO DO ENSINO A FORMAÇÃO DOCENTE
Daniela Alves da Silveira Moura; Geraldo Leonardo de Oliveira; Matheus Henrique Damasceno y Mayara dos Santos Pereira **425**

TABLA DE CONTENIDOS

LA MODELIZACIÓN EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO DEL ESTUDIANTE DE INGENIERÍA.
Saúl Ernesto Cosmes Aragón **431**

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DE HISTÓRIAS EM QUADRINHOS
Danilo Monteiro de Vasconcelos y José Ivanildo Felisberto de Carvalho **438**

ETNOMATEMÁTICA INDÍGENA: COMPREENSÃO CULTURAL E ACADÊMICA
Daniela Moura, Denilson Amâncio y Lucas Lemos **445**

LENGUAJES Y MEDIACIONES PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA
Myrian Luz Ricaldi Echevarria **451**

DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE ENSEÑANZA EN MATEMÁTICA DE LA EDUCADORA DE PÁRVULOS EN FORMACIÓN INICIAL
Raimundo Olfos, Tatiana Goldrine, Soledad Estrella y Pamela Reyes **461**

EL GUIÓN TEATRAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS
Mario Hernández Pérez y Aurora Gallardo Cabello **469**

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN QUE SE HACEN EVIDENTES AL ESTUDIAR LA INVARIANTE DE CONWAY
Nicol Jenniffer Contreras Vargas, William Alfredo Jiménez Gómez y Adriana Lizeth Vega Carrillo **477**

ELEMENTOS PARA UNA PROPUESTA DE TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE UN CONJUNTO DE FRACTALES GEOMÉTRICOS EN EL NIVEL ESCOLAR
Ximena Gutiérrez Figueroa y Marcela Parraguez González **483**

VISUALIZACIÓN GEOMETRICA EN NIÑOS DE ENSEÑANZA ELEMENTAL
Pamela Valencia **490**

EL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
Karla Esther Pérez Colan de Bardales **497**

TABLA DE CONTENIDOS

SISTEMA DE EVALUACIÓN CONTINUA: ESTUDIO DEL IMPACTO ORIGINADO POR LAS MODIFICACIONES IMPLEMENTADAS EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I EN FACULTAD DE INGENIERÍA
Claudia Mónica Borré Eguía **501**

TÉCNICA E TECNICISMO EM NARRATIVAS MATEMÁTICAS PRODUZIDAS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE ATIVIDADES ALGÉBRICAS
Maurílio Valentim y Maria Helena Palma de Oliveira **510**

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDACTICAS PARA PROMOVER LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA
Daniel Rubal Valencia y Guadalupe Villaseñor Gándara **516**

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL EN ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS APLICADAS Y ACTUARÍA
Lidia Aurora Hernández Rebollar, Antonio Pérez González e Ileana Borja Tecuatl **525**

MODELIZACIÓN MATEMATICA: ANALISIS DE UNA EXPERIENCIA AULICA EN LA SECUNDARIA
Valeria Vanesa Alvarez e Ivone Anahí Patagua **534**

EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL DEL ESTUDIANTE AL RESOLVER UN PROBLEMA DE CONJETURA
Carolina Barahona Sarmiento **543**

EJEMPLOS DE MIRADAS DIDÁCTICAS AD HOC EN PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE LA MATEMÁTICA EN CHILE
Marcela Parraguez **552**

A COLA (IN)CONVENIENTE
Juliana Alves de Souza y Regina Luzia Corio de Buriasco **561**

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 3
ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

LA ETNOMATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ZONA RURAL
Jesús Vilchez Guizado **567**

LA CULTURA, LA ECONOMÍA Y LO SOCIAL COMO FACTORES ASOCIADOS A LA I+D. LA PREVIA ASOCIACIÓN LINEAL ENTRE HABILIDADES MATEMÁTICAS E I+D
Gonzalo Pacheco Lay, Vladimir Mendoza Aguilar **576**

LA ANALOGÍA ENTRE EL CALOR Y LA ELECTRICIDAD. UNA BASE PARA CONFRONTAR EL OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO SUSTANCIALISTA EN LA ELECTRICIDAD EN ESCUELAS DE INGENIERÍA
Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Rosa María Farfán Márquez **584**

IMPACTO DE UN PROGRAMA DE DESARROLLO PROFESIONAL PARA PROFESORES DE SECUNDARIA DE MATEMÁTICAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES EN EL ECUADOR. EL CASO DE LA FUNCIÓN LINEAL
Mónica Flores Marin y Vicenç Font **592**

LA MATEMATIZACIÓN DE LOS PROCESOS DE TOMA DE DECISIONES; UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA
Andrea Vergara Gómez y Lianggi Espinoza Ramírez **599**

MANDALA ETNOMATEMÁTICA: FRUIÇÃO DO CICLO DO CONHECIMENTO
Olenêva Sanches Sou **607**

DECISIONES EN EL CAMPO ECONÓMICO APLICANDO MODELOS MATEMÁTICOS
María Rosa Rodríguez, Sandra Noemí Franco y Gustavo Ariel Sota **613**

TABLA DE CONTENIDOS

EL CARÁCTER ESTABLE DEL CAMBIO Y SU ARTICULACIÓN CON LOS NIVELES DE CONSTANTIFICACIÓN: UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO
Jesús Enrique Hernández-Zavaleta y Ricardo Cantoral **622**

LO QUE NOS DICEN LOS RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN EDUCATIVA SOBRE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN MÉXICO
Luis Cabrera-Chim, María Concepción Valdés-Parra y Olga Flores-Álvarez **631**

PRÁCTICAS PREDICTIVAS EN MEDICINA. UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LA VARIACIÓN
Angélica Moreno-Durazo y Ricardo Cantoral **639**

IMPACTO DEL CAPITAL CULTURAL EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN MATEMÁTICA: UN ESTUDIO AL TÉRMINO DE LA ENSEÑANZA MEDIA
Margarita Cortés **648**

LA RESIGNIFICACIÓN DE LA MEDIA ARITMÉTICA, BAJO EL ANÁLISIS GRÁFICO DE LA REPRESENTACIÓN DE LOS DATOS
Diana María Medina Lara, Francisco Cordero Osorio y Daniela Geraldiny Soto Soto **655**

FUNCIÓN DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS Y LA INCLUSIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO
Diana María Medina Lara, Francisco Cordero Osorio y Daniela Geraldiny Soto Soto **662**

ELEMENTOS PARA UN DISEÑO DE SITUACIÓN PARA EL ESTUDIO DEL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DESDE LAS ESTRATEGIAS VARIACIONALES
Rodolfo David Fallas Soto, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza **671**

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 4:
EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

ENSEÑANZA DEL PRINCIPIO MULTIPLICATIVO POR PROFESORES EN FORMACIÓN PARA PRIMARIA
Ana María Martínez Blancarte, Ana María Ojeda Salazar **681**

CONCEPCIONES DE PROFESORES CHILENOS SOBRE LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA
Adriana Breda, Maria José Seckel,Vicenç Font, Luis Roberto Pino-Fan **690**

FORMACIÓN VIRTUAL EN ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD PARA PROFESORES DE MATEMÁTICA EN EJERCICIO DE ARGENTINA
Liliana Mabel Tauber **698**

COMPETENCIA DE ANÁLISIS EPISTÉMICO DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD DE FUTUROS PROFESORES
María Burgos, Juan D. Godino, Belén Giacomone, Pablo Beltrán-Pellicer **706**

UMA TRAJETÓRIA DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDO DE PERIODICIDADE
Sonner Arfux de Figueiredo, Nielce Meneguelo Lobo da Costa **714**

NARRATIVAS SOBRE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: O QUE PODEM NOS DIZER?
Adriana Barbosa Oliveira, Marilena Bittar **722**

ESTUDOS SOBRE AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE
Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Rosangela de Souza Jorge Ando **726**

CONOCIMIENTO EMOCIONAL Y CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS
María S. García-González, Gustavo Martínez-Sierra **734**

TABLA DE CONTENIDOS

COMPORTAMENTOS EXPRESSOS PELO PROFESSOR DE MATEMÁTICA EM SALA DE AULA: A VISÃO DE ALUNOS BRASILEIROS DO ENSINO FUNDAMENTAL II
Sandra Maria Nascimento de Mattos **741**

COMPETENCIAS Y CONOCIMIENTOS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. UN MODELO BASADO EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO
Vicenç Font **749**

EL RAZONAMIENTO IMPLICADO EN EL ESTUDIO DEL MUESTREO. APORTES PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA INFERENCIAL
Amable Moreno **757**

CREATIVIDAD EN LAS PROPUESTAS DE TRABAJOS DE FINAL DE MÁSTER DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Alicia Sánchez, Vicenç Font, Adriana Breda, Luis Pino-Fan **764**

AMBIENTES DE APRENDIZAJE PARA EL AULA DE MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD
Silvia Vrancken, Daniela Müller, Adriana Engler **771**

LA INVESTIGACIÓN BASADA EN DISEÑO COMO SUSTENTO DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE PARA EL AULA DE MATEMÁTICA
Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller **779**

REGULARIDADES EN EL ANÁLISIS DIDÁCTICO QUE REALIZAN LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN SITUACIONES VALORATIVAS
Adriana Breda **787**

INCIDENCIAS EN LATINOAMÉRICA DE UN MARCO TEÓRICO INCLUSIVO EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA II
Vicenç Font, Luis R. Pino-Fan, Adriana Breda, María Seckel **796**

REGULARIDADES EN LA REFLEXIÓN DE FUTUROS PROFESORES SOBRE SU PRÁCTICA
María José Seckel, Adriana Breda, Vicenç Font **803**

TABLA DE CONTENIDOS

LO MATEMÁTICO: UNA APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO Y A LA REPRESENTACIÓN DOCENTE
Francisco Emmanuel González Ángeles, Daniela Reyes-Gasperini **809**

MATEMÁTICAS PARA TODOS: UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES
Sandra Evely Parada Rico, Silvia Johanna Pineda Garavito **816**

EDUCACIÓN PARA LA SOSTENIBILIDAD Y SU INCIDENCIA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Francisco M. Moreno-Pino, Esther García-González, Rocío Jiménez-Fontana **824**

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LOS POLIEDROS EN EL LIBRO DE TEXTO OFICIAL DE SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Gladys Milagros Rondan Trocones **832**

INTERDISCIPLINARIEDAD: INTERACCIÓN ENTRE ASIGNATURAS APARENTEMENTE DISTINTAS
Alexandra Assaf, Denilson Amâncio, Iraídes Gontijo, Lucas Lemo **841**

TIPOS DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA PERUANA
Miluska Osorio, Danilo Díaz-Levicoy **849**

ANÁLISIS DE LAS CREENCIAS Y CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES EN TORNO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO VEHÍCULO PARA EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UN ESTUDIO ETNOGRÁFICO
Cristhian López Leyton, Eliécer Aldana Bermúdez, Jhon Darwin Erazo Hurtado **857**

ESTUDIO SOBRE LA IDENTIDAD PROFESIONAL DEL DOCENTE EN FORMACIÓN DE LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS: EL CASO DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE CHIAPAS
Mauricio Torres Gordillo, Alma Rosa Pérez Trujillo **865**

PRÁCTICAS COLABORATIVAS DE INVESTIGACIÓN EN FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Alfonso Jiménez Espinosa **872**

TABLA DE CONTENIDOS

TEORÍAS IMPLÍCITAS SOBRE EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS QUE POSEEN LOS MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL
Rodri Demus De la Cruz Rodríguez, Ricardo Francisco Luengo González **880**

PROMOCIÓN DIRECTA VERSUS EXAMEN FINAL. ERRORES RECURRENTES ALGEBRAICOS EN ALUMNOS DE CÁLCULO II
Andrea Seoane, Liliana Milevicich **889**

PROGRAMAS DE FORMACIÓN DE PROFESORES EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Jesús E. Pinto Sosa, Lucía Zapata-Cardona, Lilian Mabel Tauber, Hugo Alvarado Martínez y Blanca Ruiz Hernández **897**

SECCIÓN 5:
USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

EVALUACIÓN DEL PAQUETE VILCRETAS UNA PERCEPCIÓN DOCENTE
Enrique Vílchez Quesada **906**

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL MEDIADA CON *PHPSIMPLEX* EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA
Julia Ángela Ramón Ortiz **914**

ENFOQUE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN EN LÍNEA PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Marger da Conceição Ventura Viana, Débora Santos de Andrade Dutra **923**

EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS EN LAS PRUEBAS ANDALUZAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Mª del Mar López-Martín, Carmen Bataneo, José Miguel Contreras **931**

TABLA DE CONTENIDOS

EXPERIENCIA EN UN AMBIENTE VIRTUAL PARA EL AUTOAPRENDIZAJE DEL MODELO LINEAL
Lizzeth Aurora Navarro Ibarra, Omar Cuevas Salazar, Julia Xochilt Peralta García **940**

ESTUDIO DE PROPIEDADES DE LOS SOLIDOS DE REVOLUCIÓN UTILIZANDO GEOMETRÍA DINÁMICA
Maritza Luna Valenzuela, José Carlos León Ríos **946**

MODELACIÓN Y TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
José David Zaldívar Rojas, Gonzalo Medina Ramírez, Alibeit Kakes Cruz **954**

NIVELES DE RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE LA NOCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL
Jaime Israel García García, Elizabeth Hernández Arredondo **962**

LA TRAYECTORIA COMO MODELO DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE
María Isabel Toribio Rodríguez, José Trinidad Ulloa Ibarra **970**

CREATIVIDAD, COMPETENCIA DIGITAL Y FORMACION DE DOCENTES DE MATEMATICAS EN SECUNDARIA
Silvia Carvajal, Joaquín Giménez, Vicenç Font, Adriana Breda **977**

PROFESSORES DE MATEMÁTICA QUE ENSINAM EM AMBIENTES VIRTUAIS NA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL: PROCESSOS DE AVALIAÇÃO FORMATIVA EM FOCO
Domício Magalhães Maciel **985**

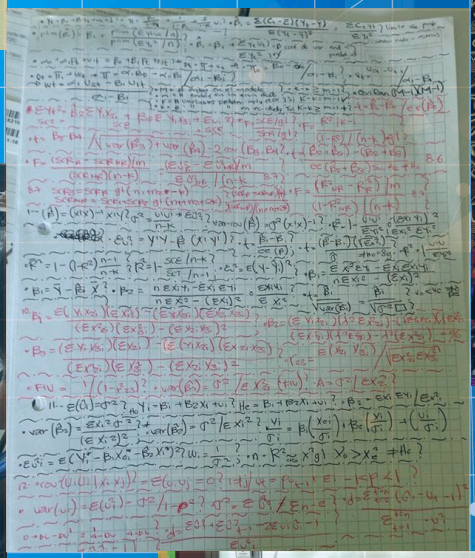
UN MOOC DE INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS
Rubén-Darío Santiago-Acosta, Ma de Lourdes Quezada-Batalla, Carlos Prado-Pérez **993**

INTEGRAÇÃO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NA PRÁTICA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA
Fátima Aparecida da Silva Dias; Nielce Meneguelo Lobo da Costa **1002**

NOCIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE INSTRUMENTAL
Mihály Martínez Miraval, Agustín Curo Cubas **1010**

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



PRESENCIA DEL CÍRCULO HERMENÉUTICO DE LA COMPRENSIÓN EN LA INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ALUMNOS

Jesús Gallardo Romero, Verónica A. Quintanilla Batallanos
Universidad de Málaga. (España)
gallardoromero@uma.es, veronicaquintanilla@uma.es

Resumen

En este trabajo describimos el recorrido que propone el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas para acceder de un modo operativo a la comprensión matemática del otro. Este círculo no es solo producto de la investigación hermenéutica en Educación Matemática. Vislumbramos su presencia en las interpretaciones particulares que los estudiantes realizan de forma innata durante su quehacer matemático cotidiano. Nos servimos para ello de un episodio concreto de interpretación de protocolos escritos que transcurre en el ámbito de la divisibilidad de los números naturales. Los resultados obtenidos nos permiten presentar el círculo hermenéutico como una herramienta metodológica útil para examinar y mejorar en la práctica los procesos interpretativos en el aula de matemáticas.

Palabras clave: comprensión matemática, divisibilidad, hermenéutica, interpretación

Abstract

In this work we describe the path advocated by the hermeneutic circle of understanding in mathematics for the one to have access, in an effective way, to the mathematical understanding of the other. This circle is not just the product of hermeneutic research in mathematics education; its presence can also be observed in the particular interpretations naturally made by students during their day- to- day mathematical doing. We illustrate a specific episode of interpretation of written protocols occurring within the context of divisibility of natural numbers to observe, in practice, the use of the different interpretive planes that constitutes the hermeneutic circle of understanding in mathematics. The results allow us to show the hermeneutic circle as a useful methodological tool to examine and improve the interpretive processes in the mathematics classroom.

Key words: mathematics understanding, divisibility, hermeneutics, interpretation

Introducción

En los últimos años venimos desarrollando un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas cuya dimensión hermenéutica incorpora como método un círculo interpretativo para explorar de forma inclusiva la comprensión matemática de los estudiantes (Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014; Gallardo y Quintanilla, 2016). El trabajo que presentamos aquí tiene como principal propósito mostrar también la presencia natural de este círculo en las prácticas interpretativas de

los escolares, a través de la identificación de rasgos genuinos del mismo en las interpretaciones particulares que los estudiantes realizan durante el desarrollo de su propia actividad matemática. Analizamos un episodio concreto donde dos alumnas de primer curso de educación secundaria (12-13 años) interpretan un protocolo de resolución de una tarea de divisibilidad de números naturales elaborado previamente por una compañera de aula. El método nos aporta referencias específicas para explorar los procesos interpretativos que los escolares emplean en el aula de matemáticas y criterios con los que identificar y promover las buenas interpretaciones durante la actividad matemática.

Marco Teórico

Nuestra propuesta interpretativa (Figura 1) se inicia en el plano cognitivo con el reconocimiento de la comprensión matemática como fenómeno mental que comparte el carácter interno e inmaterial propio de las actividades intelectuales cognitivas específicas (plano cognitivo). Al mismo tiempo, se centra en el análisis de la experiencia matemática del alumno, una experiencia que siempre emerge y se desarrolla por mediación del lenguaje. En una primera transición, la interpretación se distancia provisionalmente del interés por lo mental y queda restringida al ámbito de lo observable. En este hecho encuentra la propia interpretación su justificación como requerimiento necesario para la detección y caracterización de rasgos genuinos de comprensión del conocimiento matemático, en lugar de ser un condicionante limitador del acceso a la misma. La interpretación demanda entonces la textualización de todo lo observable, por lo que el primer compromiso supone identificar los rastros de comprensión diseminados a lo largo del registro escrito mediante aproximaciones de tipo semiótico (plano semiótico).

Seguidamente, aunque la interpretación se ejerza sobre la mediación de un texto, rebasa el campo de lo meramente semiótico y se dirige en una segunda transición hacia referencias externas complementarias que garantizan el retorno a la comprensión matemática del alumno. Al actuar, el estudiante interviene en el mundo de las prácticas matemáticas y de los fenómenos organizados por los conocimientos matemáticos puestos en uso, transformándolos de algún modo. Esta intervención sobre la realidad matemática, sobre el mundo fenomenológico de los objetos matemáticos, trasciende la esfera semiótica y constituye una primera referencia extrasemiótica presente en la acción o actividad matemática (plano fenómeno-epistemológico). El uso del conocimiento matemático en sus distintas facetas fenómeno-epistemológicas se propone como primera extensión no ostensiva (y no mental) del registro escrito matemático.

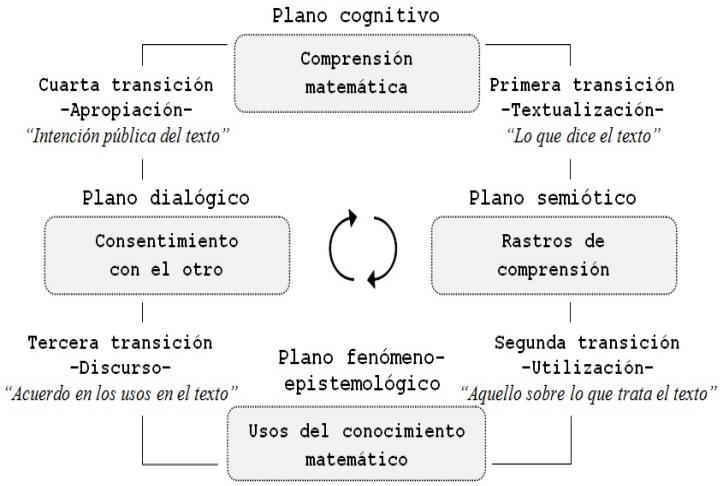


Figura 1. Círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas

A partir de aquí, la interpretación avanza hacia una segunda fase de carácter esencialmente discursivo, donde la explicitación de la intención del estudiante a través de sus acciones matemáticas públicas (lo que hace y dice) se confronta con la apropiación por parte del agente intérprete (alumno, profesor, investigador) de los usos intencionales identificados. En esta fase se busca lograr el consentimiento con el otro. Los acuerdos comunes alcanzados por los protagonistas sobre lo realizado en la actividad matemática previa, por estar mediatizados por la comprensión propia de cada uno de ellos, constituyen la segunda referencia complementaria a los usos del conocimiento matemático (plano dialógico).

Por último, la apropiación que acontece durante el consentimiento con el otro provoca un efecto transformador sobre el propio intérprete: el proceso de interpretar la comprensión matemática termina transformando al intérprete al apropiarse éste de los usos intencionados del conocimiento matemático del estudiante. Es decir, termina haciendo propios los usos realizados con una intención de cuya faceta pública o externa tiene constancia. Finalmente, en la confluencia de la explicitación de esta intención pública del texto y de su apropiación por parte del intérprete es donde se completa el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas.

Método

Analizamos un estudio de caso donde dos alumnas de primer curso de educación secundaria (12-13 años), Andrea y María Jesús, interpretan juntas la producción escrita de su compañera Sara, elaborada previamente al intentar resolver una tarea de divisibilidad de números naturales (Figura 2). Este trabajo interpretativo se realizó en el marco de un programa educativo más amplio destinado al fomento de la elaboración y análisis de protocolos escritos, que las estudiantes llevaron a cabo en su centro educativo durante el curso 2014-2015 mientras cursaban la asignatura de matemáticas.

La mayoría de las tareas matemáticas incluidas en el programa de interpretación de protocolos, como la utilizada en este episodio, son tareas escolares, convencionales y estereotipadas, extraídas de los libros de texto implantados en el centro educativo. Elegimos de forma intencionada este tipo de tareas con el

propósito de asignar al libro de texto una utilidad didáctica alternativa y complementaria a la tradicional usualmente extendida. En esta ocasión, la tarea aritmética utilizada aparece incluida en la propuesta didáctica del libro de texto de las alumnas para la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad de números naturales:

Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:

- Si los envaso por docenas, me sobran 5.
- Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10.
- Casi he cogido 100.

¿Cuántos huevos tiene? (Colera y Gaztelu, 2011, p. 71)

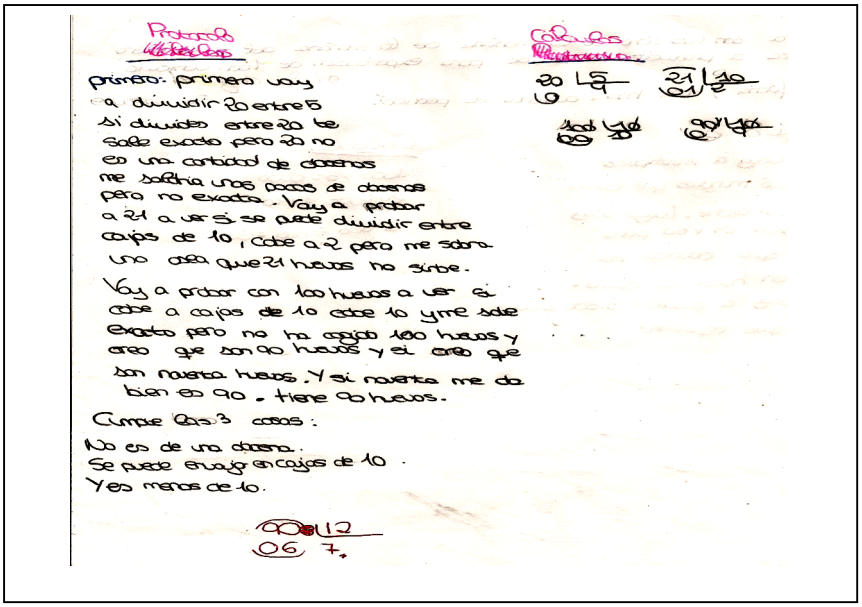


Figura 2. Registro escrito de Sara en forma de protocolo

La actividad de interpretación asociada a esta tarea se inicia con la propuesta de su resolución individual a los alumnos del grupo-clase, incorporando a su procedimiento particular de resolución un protocolo explicativo de las principales estrategias y acciones realizadas en casa caso. A continuación, los productos obtenidos por cada estudiante se distribuyen entre otros alumnos distintos a fin de que estos últimos interpreten lo realizado por sus compañeros y extraigan información acerca de su comprensión matemática. En esta ocasión, registramos en audio la discusión de María Jesús y Andrea al interpretar el protocolo de Sara. La transcripción de la grabación nos permite generar un nuevo registro escrito que refleja sus interacciones en forma de diálogo textual (201 entradas). Los datos así recopilados se analizan tomando como referencia la estructura del propio círculo hermenéutico. En concreto, en cada entrada del registro buscamos posibles rastros significativos del proceder característico de cada uno de los planos

hermenéuticos. Estos elementos nos permiten reconocer en cada momento el centro de atención variable de las alumnas, las facetas de comprensión en las que ponen interés y los lugares hacia donde dirigen la interpretación.

Resultados

Las alumnas perciben la comprensión del conocimiento matemático como un fenómeno interno que acontece en la esfera mental del individuo. Consideramos este reconocimiento consecuencia de las continuas alusiones que realizan a la faceta cognitiva de la comprensión matemática de su compañera (*plano cognitivo del círculo hermenéutico*). María Jesús y Andrea tienen interés por ver y explicar lo que pasa en la mente de Sara y buscan razones del porqué de su desempeño en la tarea matemática. Para encontrar una justificación interna de las manifestaciones externas de Sara las alumnas plantean de forma reiterada cuestiones centradas en la intencionalidad oculta de su compañera (3, 16, 69, 90) e intentan responderlas con suposiciones sobre la misma que provoca una variedad de afirmaciones distintas (43, 67, 71, 193).

3	María Jesús	*¿Pero ese 20 a qué viene?*
16	Andrea	*¡Dónde va?*
43	María Jesús	*Sí, es que yo creo que se ha equivocado porque como no ha copiado el problema entero…*
67	Andrea	*Sí, pero eso es por toda la cara, maestro* [en referencia a la división de 21 entre 10]. *Yo no sé qué ha intentado hacer esta mujer, de verdad.*
69	Andrea	*¡De dónde ha cogido los datos de este problema, por favor?*
71	María Jesús	*No sobra. No sobra ninguno y se habrá equivocado.*
90	Andrea	*¿El 20 a qué viene? A ver, dinos qué has puesto ahí volando ¿Y lo de las cuántas de docenas?*
193	María Jesús	*Es que es para matarte, niña. ¿Cómo has sacado un 20? ¡Un 21! ¿Qué dices, qué dices? ¡Ay, se le ha ido la olla a Sara!*

También se perciben intentos de aclarar lo que dice el texto (*plano semiótico*). Las intervenciones en este plano se caracterizan por incluir análisis breves en forma de comprobaciones y reflexiones en torno a la idoneidad matemática de los elementos semióticos que configuran la respuesta del protocolo. La atención la centran sobre todo en las elecciones numéricas y los procedimientos de cálculo empleados (1, 4, 15), la consideración de las condiciones del problema (19, 25, 27) y la identificación de la respuesta final dada por Sara (19, 29, 30).

1	María Jesús	*¿Qué dice aquí? Se lo va a dividir entre 20.*
4	Andrea	*Y entre 5, ¿sabes? Entre 5.*
15	María Jesús	*Y ahora dice acá 100 huevos, entre 10.*
19	María Jesús	*¿100 huevos? Y cree que son 90 huevos. Mira… Después dice que cumple las tres condiciones.*
25	Andrea	*Pero Maestro una de las condiciones es que le sobren 5 y aquí dice que le sobran unas pocas de docenas. Es muy raro.*

27	María Jesús	*No tiene sentido.*
29	Andrea	*Es que dice que no es una docena, que cree que…*
30	María Jesús	*Que es 90. Que tiene 90 huevos.*

Se aprecian además reflexiones significativas en torno a los usos dados a los conocimientos matemáticos presentes en la resolución (*plano fenómeno-epistemológico*). Las descripciones elaboradas en el plano semiótico vienen acompañadas de afirmaciones acerca de los conocimientos matemáticos utilizados y sus posibles modos de empleo vinculados a la situación matemática propuesta. Los comentarios de María Jesús y Andrea subrayan su disconformidad con la consideración dada por Sara a las condiciones del problema y con su elección de los dividendos, cocientes y restos como conocimientos matemáticos vinculados con la división (2, 6, 33, 147). Incorporan, asimismo, comprobaciones propias para justificar tales desacuerdos (98, 99, 107).

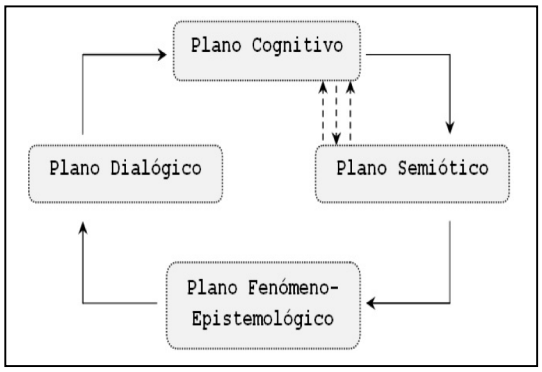
2	Andrea	*Pero si es que 20 no tiene nada que ver.*
6	Andrea	*5 es lo que te sobra. Pero debería dividirlo entre 12, ¿no?*
33	María Jesús	[Regresa a la lectura del enunciado de la tarea]. *Casi ha cogido 100. ¡Pero yo no estoy diciendo que hayas cogido 100! Ni 20, ni 30, …*
98	Andrea	*Haz la cuenta María Jesús* [la división de 90 entre 12].
99	María Jesús	*¡Pero yo no me acuerdo de dividir, eh?* [risas]. *90 entre 12, ¿no?*
107	Andrea	*Son 6.* [en referencia al resto].
147	María Jesús	*Si casi ha cogido 100, pues un número que esté más cerca de 100. Pero ahí no es* [no identifica como válida ninguna opción de Sara].

Finalmente, las alumnas muestran predisposición por consentir con su compañera (*plano dialógico*). Los indicios en favor de lograr el consentimiento tienen su origen en la negación de, o el desacuerdo con, lo que hizo Sara en su protocolo de resolución. Tales evidencias reflejan el empeño de María Jesús y Andrea por establecer lo que Sara debiera hacer como mejor alternativa (122, 123, 144, 146). Incluyen una explicación razonada del procedimiento que conduce a la identificación y justificación de la solución correcta al problema (155, 199).

122	María Jesús	*Le preguntaría de dónde ha sacado ese 20.*
123	Andrea	*Eso, el 20. Y lo de las cuantas de docenas, también.*
144	María Jesús	*Que busque los múltiplos de 12.*
146	Andrea	*Y que se lo lea bien, por favor, que si no es un "relío".*
155	María Jesús	*90 entre 10, a 9. O sea, es 89. Y ahora, 89 como dice que tiene que envasarse en docenas y que tiene que sobrar 5, pues 89 lo dividimos entre 12 y nos da de resto 5.*
199	María Jesús	*Hay que dividir, porque como dice que ha cogido casi 100, pues divido 89. Y dice que al final le sobran 5, pues a 89 le sumamos 1 y nos da 90. Ahora, como dice que las agrupa en cajas de 10 exactamente: 90 entre 10 y nos da a 9. O sea, que es 89.*

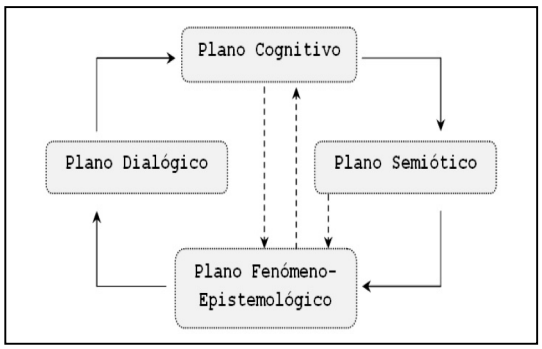
Al vislumbrar los cuatro planos ponemos de relieve que las alumnas desarrollan una estrategia interpretativa multifacética a lo largo del episodio, que se asemeja además a la propuesta metodológica sugerida por el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas. En principio, en la interpretación desplegada por María Jesús y Andrea percibimos, a través del orden numérico de las entradas que registran sus intervenciones, tres etapas genéricas que transcurren de forma correlativa y donde la actividad principal se desarrolla en alguno de los planos semiótico, fenómeno-epistemológico y dialógico, respectivamente. En concreto, el episodio incluye una primera etapa de marcado carácter semiótico que acontece al inicio del proceso interpretativo. A continuación, prosigue en una segunda etapa posterior donde las alumnas centran la atención en los aspectos que caracterizan sobre todo al plano fenómeno-epistemológico. Por último, en una tercera etapa final la actividad interpretativa transcurre principalmente en el plano dialógico.

Por el contrario, el plano cognitivo, a diferencia de los otros, se hace presente de forma regular en el transcurso del episodio. En sucesivas ocasiones, a las alumnas les bastan unos primeros resultados obtenidos de su interpretación semiótica, fenómeno-epistemológica y/o dialógica, respectivamente, para extraer de manera reiterada conclusiones acerca de la comprensión matemática de su compañera. De este modo, trazan recorridos directos hacia el plano cognitivo en un juego de correspondencias de doble sentido entre planos que recuerda metodológicamente a la conexión entre los ámbitos interno y externo de la comprensión que promueve la orientación cognitiva de la interpretación (Figura 3a). A nivel aún más local, se vislumbran incluso recorridos puntuales por distintos planos en una misma intervención. Estos recorridos cubren parcial o totalmente el círculo hermenéutico, tanto en el sentido prefijado por él como en otros alternativos (Figura 3b y 3c).



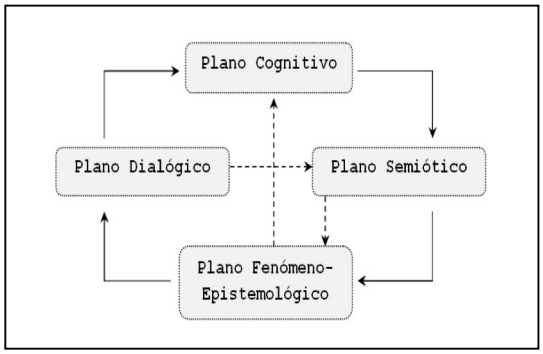
7	María Jesús	[Lee un fragmento del protocolo de Sara] *"[…] una cantidad de docenas me sobraría. Unos pocos de docenas, pero no exacta"* **[plano semiótico]**. *Pero, ¿de dónde viene eso?* **[plano cognitivo]**
8	Andrea	*Maestro mira, dice que le sobran unas cuantas de docenas.* **[plano semiótico]** *¡Dónde vas?* **[plano cognitivo]**

Figura 3a



186	María Jesús	*Yo, ya ves maestro, porque ella dice que tiene unas cuantas de docenas.* **[plano semiótico]**. *Y le tienen que sobrar 5 huevos.* **[plano fenómeno-epistemológico]**. *¡Dónde va?* **[plano cognitivo]** *Que lo ha hecho mal Sara, maestro, totalmente* **[plano fenómeno-epistemológico]**.

Figura 3b



200	María Jesús	*O sea, que es 89 porque como dice que le sobran 5, pues es 89 porque dividido en docenas da 5. ¿Ok?* **[plano dialógico]**. *Pero yo eso de que dice que hay que considerar tres cosas, que hay docenas* **[plano semiótico]**, *vale eso está muy bien* **[plano fenómeno-epistemológico]**. *Pero, ¿de dónde viene ese 20 y ese 21, Sara? ¿De dónde viene?* **[plano cognitivo]**

Figura 3c

Figura 3. Ejemplos de recorridos por el círculo hermenéutico

En resumen, estos resultados considerados en conjunto ponen de manifiesto la presencia natural de los planos hermenéuticos y su consideración innata por parte de las alumnas para interpretar la comprensión matemática de su compañera. También la posibilidad de realizar recorridos diferentes por el círculo hermenéutico. En esta ocasión concreta, la manera en la que los planos se relacionan entre sí durante el proceso interpretativo difiere de lo establecido por el círculo. Avances y retrocesos no previstos terminan materializando recorridos alternativos que permiten establecer diferencias entre las interpretaciones y caracterizar perfiles de interpretación propios.

Discusión y conclusión

Constatamos que la actividad interpretativa desarrollada por las alumnas transgrede con fines utilitarios el problema epistemológico de las otras mentes. Esta transgresión, sin embargo, no siempre se realiza de forma directa sino también con el apoyo de diferentes elementos externos y visibles de tipo semiótico, fenómeno-epistemológico y dialógico, lo que contribuye a dar "el salto al interior" con mayores garantías y a reducir riesgos en la interpretación cuando se transita entre los ámbitos externo e interno de la comprensión del otro. De este modo, podemos afirmar que el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas expuesto en este trabajo se evidencia en las interpretaciones que realizan los escolares en contextos de actividad matemática conjunta en el aula. En el ejemplo discutido, no obstante, la manera en la que los planos se relacionan entre sí durante el proceso interpretativo difiere de lo previsto por el círculo hermenéutico. Esta circunstancia sugiere la posibilidad de establecer diferencias entre las interpretaciones de los escolares y valorar la idoneidad de cada una de ellas en función de su correspondencia con lo fijado por el círculo. El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas se muestra entonces como un instrumento metodológico de referencia para la observación y, al mismo tiempo, justifica que pensemos en él como una vía operativa para mejorar la interpretación matemática de los escolares. En concreto, proponemos utilizarlo como referencia para hacer transitar a los alumnos desde sus modos idiosincrásicos de interpretar hasta el método interpretativo que propone. Haciendo explícito el método sugerido por el círculo podremos ayudar a los alumnos a transformar el suyo propio y transitar hacia formas más operativas y efectivas de acceder a la comprensión matemática del otro. También planteamos la interpretación a través del círculo como una vía para desarrollar la comprensión matemática propia y

garantizar la obtención de nuevos aprendizajes de calidad. En resumen, consideramos que la interpretación de los escolares puede mejorar si los planos se conectan y se organizan siguiendo la estructura del círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas.

Referencias bibliográficas

Colera, J. y Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas 1. Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática*, *25*(2), 61-88.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 319-336. doi: http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1158

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 625-648. doi: http://dx.doi.org/00.1590/1980-4415v30n55a16

PREDICCIÓN INFORMAL EN UN DIAGRAMA DE PUNTOS

Ana García, Gabriel Yáñez
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
anna.garciamado@gmail.com, gyanez@uis.edu.co

Resumen

En este artículo se reporta la segunda fase de una investigación en curso que busca responder a la pregunta ¿Cuáles son las formas de Razonamiento Covariacional Informal (RCI) de los estudiantes alrededor de la recta de mejor ajuste en un ambiente computacional? En primer lugar se aplicó una prueba a 39 estudiantes de octavo grado que no habían estudiado previamente conceptos alrededor del análisis de datos bivariados. Del análisis de los resultados de esta prueba surgieron una serie de hipótesis que permitieron diseñar una segunda prueba la cual fue aplicada a 40 estudiantes con las mismas características. El análisis de los resultados de estas dos pruebas nos proporcionó información sobre el RCI actual de los estudiantes, evidenciándose estrategias y concepciones ya reportadas en investigaciones anteriores y también algunas novedades. En particular, se analizan las estrategias de predicción que utilizan los estudiantes, así como las de ubicación de la recta de mejor ajuste.

Palabras clave: razonamiento informal, predicción, recta de mejor ajuste

Abstract

This article reports the second phase of a current research that seeks to answer the question: Which are the forms of students' Informal Co-variational Reasoning (ICR) on the best fit straight line in a computational environment? First, we applied a test to 39 eighth-grade students who had not previously studied concepts on the analysis of bi-variation data. From the analysis of the results of this test a series of hypotheses emerge. It allowed us to design a second test which was applied to 40 students with the same characteristics. The analysis of the results of these tests provided us with information about the students' current ICR, showing strategies and conceptions previously reported, as well as some new ones. Particularly, we analyze the prediction strategies that students use, as well as those of the location of the best fit straight line.

Key words: informal reasoning, prediction, best fit line

Introducción

En investigaciones alrededor del razonamiento de los estudiantes surge la necesidad de explorar y aprovechar sus conocimientos previos, ya sean formales o informales, así como sus creencias, experiencias, intuiciones e inclusive errores para diseñar el camino que los conduzca hacia la comprensión de conceptos matemáticos. En particular, en Estadística, en los años recientes, se ha venido investigando alrededor del Razonamiento Informal (RI) que utilizan los estudiantes con el ánimo de impulsar su desarrollo ya que se asume que es el paso previo para la comprensión posterior de los modelos formales.

Respecto al Razonamiento Covariacional (RC) se han hecho investigaciones desde diferentes disciplinas como la psicología, las matemáticas, la estadística, la educación matemática y la educación estadística (Zieffler, 2009; Garfield y Ben-Zvi, 2008) en las que se han identificado sesgos, concepciones, dificultades, errores e incluso trampas alrededor del análisis de datos bivariados. También se han identificado formas de razonamiento covariacional que han permitido generar instrumentos y trayectorias para la enseñanza y el aprendizaje de este tema.

Dentro de las concepciones previas que tienen los estudiantes en cuanto a la asociación estadística en general, está la *Causalista, Determinista, Unidireccional* y *Localista* (Estepa y Batanero, 1995), inclusive en estudiantes que ya han estudiado el tema. Por otro lado, la dependencia estadística de dos variables no es tan familiar como sí lo es la dependencia funcional o determinista; inclusive entre los profesores, ya que muchos de ellos tienen un pensamiento determinista sobre datos bivariados. De manera que, para una comprensión adecuada de la correlación y la regresión se necesita una comprensión no solo acerca de las funciones sino también de la variación (Engel y Sedlmeier, 2011).

Investigaciones más recientes muestran cómo los estudiantes razonan sobre la "forma" de la relación entre dos variables cuantitativas, en particular sobre la ubicación de la recta de mejor ajuste. Casey (2015) investiga las concepciones que tienen 33 estudiantes de octavo grado sobre la recta de mejor ajuste antes de su instrucción formal. Entre los resultados están los criterios y métodos que usan los estudiantes para la posición de la recta de mejor ajuste, así como la precisión en que lo hacen.

Criterios y métodos para la posición

Se identifican siete métodos: i) a través de tantos puntos como sea posible; ii) igual número de puntos a ambos lados; iii) cerca de todos los puntos como sea posible; iv) reflejar la relación que tienen las variables con base al conocimiento del contexto; v) a mitad de camino entre los puntos mínimo y máximo; vi) a través de los puntos primero y último y; vii) comenzando desde el primer punto y luego trazar a través del máximo número de puntos.

Precisión en la posición

Existe una considerable variabilidad entre los estudiantes para ubicar la recta. Algunos la ubican muy cerca y paralela a la recta de regresión. Otros utilizan el criterio de que pase por la mayoría de puntos, inclusive un estudiante llama la atención de que la recta debe pasar por el origen. Algunos, reflejando un razonamiento univariado, trazan rectas horizontales para dejar igual número de puntos a cada lado, es decir buscando una aplicación para la media o mediana.

Como se mencionó anteriormente, la identificación de errores, concepciones y formas de razonamiento, así como el análisis de contenido alrededor del análisis de datos bivariados, ha tenido implicaciones en la enseñanza de este tema. Dentro de las implicaciones están las investigaciones que tienen como resultado final el diseño de una trayectoria de aprendizaje o de una secuencia de actividades que permiten desarrollar el razonamiento covariacional de los estudiantes. Ejemplos de este tipo de investigación son los trabajos de Cobb, McClain y Gravemeijer (2003), Garfield y Ben-Zvi (2008) y Casey (2015).

Marco Conceptual

Conocer cómo los estudiantes razonan y piensan estadísticamente ha sido el foco de muchos investigadores en educación estadística; lo anterior, argumentándose en que la enseñanza tradicional de la estadística se reduce a procedimientos y cálculos en donde los estudiantes no desarrollan estos procesos: pensar y razonar estadísticamente (Ben-Zvi y Garfield, 2004).

> El *razonamiento estadístico* puede definirse como la forma en que las personas razonan con ideas estadísticas y le dan sentido a la información estadística. Lo que implica realizar interpretaciones basadas en conjuntos de datos, representaciones de datos o resúmenes estadísticos de datos. Implica también la conexión de un concepto con otro (por ejemplo el centro y la variabilidad), o combinar ideas sobre datos y el azar. Razonar significa entender y ser capaz de explicar los procesos estadísticos y ser capaz de interpretar completamente los resultados estadísticos (Garfield y Ben-Zvi, 2004, p. 7).

Por otra parte, el razonamiento en un sentido informal, RI, se entiende como la forma en que el estudiante usa su Conocimiento Informal (CI), el cual hace referencia, por una parte, a ese conocimiento cotidiano y a las experiencias que se adquieren fuera del salón de clases, y, por otra parte, al conocimiento que resulta luego de una instrucción formal previa, en otras palabras, "es el punto de partida para el desarrollo del conocimiento formal" (Zieffler et al., 2008, p.3). Como nuestro interés es la asociación estadística entre dos variables cuantitativas, resulta necesario definir lo que aquí se entiende por Razonamiento Covariacional (RC) y RCI.

Después de examinar las definiciones que se le han dado al Razonamiento Covariacional desde los diferentes campos en que se ha estudiado, Zieffler (2006, p.6) concluye que "el razonamiento covariacional se refiere a la forma en que la gente piensa acerca de, o razona acerca de la relación entre dos o más variables", por ejemplo a partir de la lectura de un diagrama de dispersión, o en la interpretación de las correlaciones y en otras tareas que conlleven al análisis de dos variables así como la interpretación de los resultados arrojados en ese análisis.

Finalmente, en un intento por aunar las definiciones que Zieffler et al. (2008) hacen sobre CI y RI con la definición de RC, adoptamos la definición de RCI como la forma en que la gente razona y argumenta acerca de la relación entre dos o más variables haciendo uso solo de su RI y CI. Claramente, parte del RCI está el razonar sobre un diagrama de dispersión: la existencia o no de una relación entre dos variables, la predicción del valor de la variable respuesta para un valor de la variable explicativa, así como la fuerza y la forma con que se relacionan, por ejemplo, la recta de mejor ajuste.

Metodología

Participantes

La primera prueba se aplicó a 39 estudiantes de octavo grado, entre los 12 y 13 años, quienes no habían visto previamente conceptos de estadística como diagramas de dispersión y recta de mejor ajuste, inclusive sus antecedentes sobre el concepto como tal de recta eran nulos, en términos formales. La segunda prueba se aplicó a 40 estudiantes con las mismas características descritas para la primera.

Con las dos pruebas lo que se pretendía evaluar era: i) si los estudiantes establecen o no una relación entre las dos variables; ii) identificar si tenían un sentido de variabilidad; iii) los criterios que utilizan para predecir el valor de la variable respuesta dado un valor para la variable explicativa y; iv) conocer los criterios con que trazan la recta que mejor se ajusta a los datos y con qué precisión lo hacen. En pocas palabras, su nivel de RCI actual.

Del análisis de la primera prueba surgieron algunas hipótesis que se irán mencionando junto con la descripción de cada ítem de esta segunda prueba, la cual se puede ver en https://www.dropbox.com/s/kazphxilhnmisgo/Prueba%20diagn%C3%B3stica%202.pdf?dl=0.

Hipótesis 1

Respecto a si los estudiantes establecían o no una relación o asociación entre las dos variables, se observó que los estudiantes, al parecer, pueden establecer dicha relación sin la necesidad de observar el gráfico. De manera que, tomaremos como primera hipótesis el hecho de que *usar variables sin contexto, o por lo menos un contexto no cercano o no comprensible para los estudiantes los obliga a usar un razonamiento "puro" en sus interpretaciones.*

Por lo anterior, en el ítem 1 de la segunda prueba las variables estaban descontextualizadas, la variable independiente se correspondía con X y la variable dependiente con Y. Queríamos conocer si los estudiantes establecían o no una relación entre las variables X e Y. Lo anterior ubicando un punto en el diagrama de dispersión dado para un valor específico en X, esperábamos que el estudiante identificara el "comportamiento" de los puntos en el diagrama y como consecuencia ubicara el punto que se le pedía para el correspondiente valor de X siguiendo ese comportamiento previamente identificado.

Hipótesis 2

Respecto a la fuerza de la asociación entre las dos variables, se estableció la siguiente hipótesis: *los estudiantes asumen la intensidad de asociación de las dos variables de acuerdo al engrosamiento de la nube de puntos.* Por lo anterior, se diseñó el ítem 2 con cuatro diagramas de dispersión cada uno con diferente coeficiente de correlación.

Hipótesis 3

Otra hipótesis que establecemos, como resultado de las respuestas dadas a las preguntas de predicción en la primera prueba es que *los estudiantes asumen de alguna manera la recta, por lo menos entre vecinos cercanos.* Para ratificar lo anterior y explorar otras maneras de usar esta estrategia, se propuso el ítem 3 (Figura 1, tomado y adaptado de Casey, 2015), donde las variables sí estaban contextualizadas. Queríamos ratificar las estrategias de los estudiantes para predecir un valor. El ítem consta de tres situaciones distintas: con dos vecinos cercanos, uno a cada lado; otra con tres "vecinos cercanos" uno a un lado, y dos al otro lado.

Hipótesis 4

Siguiendo en línea con la hipótesis 3, nuestra cuarta hipótesis es que *la extensión de una concepción local podría conducirnos, en un principio, al ajuste de una recta poligonal, o ajuste parcial, que bien podría "enderezarse" y convertirse en la recta que queremos encontrar, la que mejor se ajusta.* Por lo anterior, en el ítem 4, donde las variables también estaban contextualizadas, partimos preguntando sobre la recta que mejor se ajusta a dos puntos (¿será "trivial" para los estudiantes que esta recta corresponde a la recta que pasa por los dos puntos?) En seguida quisimos indagar sobre cómo trazan la recta que mejor se ajusta para tres puntos no colineales y finalmente se les presenta todo el conjunto de puntos. En últimas lo que queremos conocer con este ítem es qué entienden por "la recta de mejor ajuste".

Hipótesis 5

Un criterio muy usado es que la recta que mejor se ajusta es la que pasa por más puntos. Lo anterior se evidenció en una tarea propuesta por Casey (2015) en la que se daba un diagrama de puntos y los estudiantes ubicaban la recta, representada por un alambre, que mejor se ajustaba para ellos. Con el ítem 5 de esta prueba nos preguntamos qué pasa con "el regreso", es decir suponemos una recta que se ajusta a seis puntos e indagamos sobre cómo deberían ir los puntos. La hipótesis 5 que establecemos acá es que el criterio mencionado anteriormente no va a cambiar, aunque expresado de otra manera: *la nube de puntos que se corresponde con la recta que mejor se ajusta, es la que más puntos toque la recta*.
De manera que en el ítem 5 se mostraban cuatro diagramas (A, B, C y D) con la misma recta pero seis puntos distribuidos de manera diferente en cada gráfico. Se pedía ordenar, de mayor a menor, los gráficos de acuerdo al nivel de ajuste de la recta a los seis puntos.

Análisis y resultados de la segunda prueba

Para el ítem 1, en donde se esperaba que los estudiantes ubicaran el punto respetando la asociación de las dos variables, más de la mitad de los estudiantes así lo hicieron con argumentos como *"Porque conforme asciende el valor de x el valor de y también"* o *"El valor de y que coloqué es de 440 porque creo que todo tiene un orden, entre más grande el número en x más grande el número y"*. Por lo que, parece que resulta sencillo, para la mayoría de los estudiantes, reconocer la asociación entre dos variables cuando la hay pero ¿qué pasa cuando no existe tal asociación? Para un gráfico así solo 2, de 40 estudiantes, explicitan en sus argumentos la no asociación entre las dos variables: *"Pues porque no veo que tenga un orden respectivo"*, *"Lo mismo no está aumentando ni disminuyendo solo se puede colocar donde sea"*. El esfuerzo de los demás radica en encontrar un patrón, una "forma" en la nube de puntos: *"La puse arriba porque creo que esta lleva una secuencia de u"*.

En el ítem 2, relacionando el "engrosamiento" de la nube de puntos con la intensidad o fuerza de asociación de las variables *x* e *y,* de los 40 estudiantes, 19 establecieron el orden correcto. Entre los criterios, y con mayor frecuencia, está el de *dispersión o proximidad de los puntos*: *"Yo creo que el mayor es el que los punticos están más juntos y el menor pues el que tiene los puntos dispersos por todo el gráfico"*; el *nivel de rectitud: "Creo que porque la que tenga un nivel recto esta tiene un mayor nivel de intensidad";* como se observa en este último criterios los estudiantes hablan implícita y explícitamente de recta, es decir, que la nube de puntos que se asemeje más a una recta es la que tiene mayor intensidad de asociación, lineal, entre las dos variables.

En cuanto al ítem 3 (Figura 1) en 3a, con dos vecinos cercanos, uno a cada lado, 30 de los 40 estudiantes hicieron una predicción considerablemente acertada.

Salón	Número de personas	Nivel de ruido
A	24	50
B	26	50
C	21	20
D	27	60
E	24	30
F	29	70

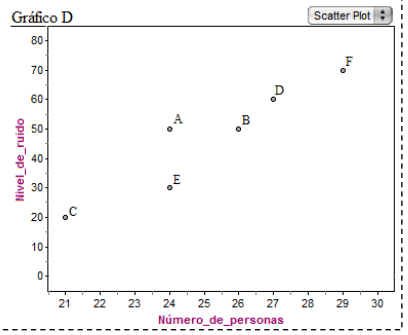


Figura 1. Tabla y diagrama de dispersión relacionado con el ítem 3 de la segunda prueba (Tomado y adaptado de Casey 2015)

Dentro de esos 30, ocho estudiantes tomaron como estrategia la media de los *vecinos cercanos*, por ejemplo: *"El nivel de ruido es 65 el valor lo encontré mirando el D y F y en la mitad de D y F encontré el valor de 65"* o de otros vecinos: *"60 porque 28 está después de 26 y 26 es de 50 y está antes de 29 es de 70 entonces la mitad de 70 y 50 es 60"*. Otros, aunque no usaron la media de los vecinos cercanos, sí se guiaron por los mismos para emitir un valor: *"Nivel de ruido sería 61 ya que me guie por el que tenía 27 personas pero porque tenía uno más le subió más la altura"* o *"60 Porque el salón D se acerca a los 28 estudiantes"* o *"Nivel de ruido sería 61 ya que me guie por el que tenía 27 personas pero porque tenía uno más le subió más la altura"*.

Un estudiante en su predicción puso dos puntos, entre 50 y 65, manifestando un sentido de la variabilidad: *"Pues entre más personas hay más ruido, pero puede que haya muchas personas y no tanto ruido, varía la respuesta"*.

Respecto al ítem 4, entre las estrategias para responder 4a (nube con dos puntos, G y B), la más utilizada fue trazar el segmento que unía los dos puntos, algunos trazaron dos segmentos, uno partiendo del origen y luego el que unía los dos puntos del gráfico, otros trazaron líneas verticales y horizontales hasta cada punto. En total, 7 estudiantes trazaron una recta, donde 3 de ellos trazaron la recta que unía los dos puntos con argumentos como *"... se ajusta porque solo hay dos puntos y es la única recta que se puede trazar"*. Otra estrategia fue trazar la recta de manera que pasara por un punto pero muy cerca al otro. 3 estudiantes trazaron la recta entre los dos puntos y partiendo del origen, argumentando de la siguiente manera: *"la pasé sin que tocara G o B"*.

Para 4b, 4c y 4d (nubes con más de dos puntos) la estrategia con mayor frecuencia fue la de unir los puntos con segmentos. De los 7 estudiantes que trazaron una recta en el, 2 trazaron varias rectas uniendo dos puntos, mientras que los otros 5 trazaron una sola recta. Con estos 5 estudiantes se identifican algunas de las estrategias reportadas ya en la literatura (Casey, 2015) por ejemplo: la que toque la mayor cantidad de puntos; la que pasa por el "medio" dejando igual número de puntos a cada lado de la recta: *"porque así*

reparto mejor los puntos". Respecto al inciso 4e, donde se les preguntaba que por qué creían que la recta trazada en 4d (nube con cinco puntos con una asociación positiva) era la que mejor se ajustaba, solo 2 estudiantes argumentaron en términos de "cercanía": *"porque los puntos quedan más cerca a la línea"* o *"porque es como la que más se acerca a los datos"*. En general, tal como se esperaba, la mayoría de los estudiantes trazaron "rectas poligonales" al unir los puntos por segmentos.

Finalmente, en el ítem 5, 19 estudiantes ordenaron los cuatro diagramas de dispersión de acuerdo al número de puntos que toca la recta o que están muy próximos a tocarla. Sin embargo de esos 19, solo 11 hablaron en esos términos y 8 hablaron en términos de "alineamiento" u "organización": *"Porque desde A los puntos están más alineados y desde C B y D empiezan a desalinearse"*.

11 estudiantes que aunque no eligieron la respuesta correcta, basaron sus argumentos en términos de "cercanía" pero al parecer entendido como el número de puntos más cercanos a la recta, por ejemplo: *"Empezamos con los seis puntos cerca a la línea luego se alejan dos, luego se alejan 3 y luego se alejan 4 quedando B, A, C, D"*.

Conclusiones y reflexiones

El análisis de los resultados de estas pruebas nos proporcionó información sobre el Razonamiento Covariacional Informal (RCI) actual de los estudiantes. Se ratificaron algunas estrategias y concepciones ya reportadas en investigaciones anteriores y algunas novedades que nos orientarán para establecer más hipótesis de aprendizaje y, consecuentemente, diseñar el plan para el diseño de actividades computacionales para el aprendizaje de la recta de mejor ajuste de manera informal:

- Construir actividades sin contexto, o por lo menos no comprensible al estudiante, podría evitar que el estudiante tenga una *concepción causal*. En su lugar, se obligaría a tener un razonamiento "puro" en tareas de asociación y predicción.
- La mayoría de los estudiantes, sí reconocen de alguna manera la asociación entre dos variables y cómo varían conjuntamente al observar un diagrama de dispersión, mientras que no reconocen fácilmente la no existencia de una asociación, es decir, buscan sí o sí relacionar de alguna manera las dos variables.
- La mayoría de los estudiantes sí establecen un nivel de asociación en cuanto al grado de dispersión o proximidad de los puntos pero pocos, además de eso, en cuanto a la forma.
- Actividades como el ítem 5, es decir, "el regreso": dada la recta cómo deberían ir los puntos, nos permitirán llegar al término "cercanía". Logrado lo anterior, nos veremos enfrentados a concepciones de tipo geométricas como por ejemplo que la recta debe tocar dos puntos o que la distancia más corta entre un punto y una recta es la perpendicular.

Referencias bibliográficas

Ben-Zvi, D., & Gardfiel, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. En D. Ben-Zvi, & J. Gardfiel (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 3-15). Dordrecht, The Netherlands: Kluber Academy Publishers.

Casey, S. (2015). Examining Student Conceptions of Covariación: A Focus on the Line of Best Fit. *Journal of Statistics Education* 23 (1), 1-33.

Cobb, P., McClain, K. & Gravemeijer, K. (2003). Learning About Statistical Covariation, *Cognition and Instruction*, 21(1), pp. 1-78.

Engel, J. & Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study* (pp,247-258). New York: Springer.

Estepa, A. & Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Revista Enseñanza de las ciencias*, 13(2), 155-170.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). Learning to Reason about Covaration. In *Developing Students' Statistical Reasoning*, eds. D. Ben-Zvi y J. Garfield, Springer Sciende+Business Media B.V. pp. 289-308.

Zieffler, A. S. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course*. Tesis doctoral. Universidad de Minnesota.

Zieffler, A, & Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, 8 (1), 7-31.

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R. & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19.

CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES NO DESENVOLVIMENTO DO DOMÍNIO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BRASILEIRA

Valdir Bezerra dos Santos Júnior, Renato da Silva Ignácio, Marlene Alves Dias, Míriam do Rocio Guadagnini
UFPE, UFCG, UNIAN, UNIAN. (Brasil)
valdir.bezerra@gmail.com, renatoignacio@gmail.com, maralvesdias@gmail.com, miriamguadagnini@hotmail.com

Resumo

Partimos de resultados de estudos anteriores sobre as dificuldades dos estudantes brasileiros em relação à álgebra, sobre as diferenças entre as propostas institucionais entre Brasil e Espanha e sobre a evolução histórica da álgebra para auxiliar na análise das respostas de um grupo de oito estudantes de um curso de licenciatura em Matemática para a questão: *O que vocês aprenderam de álgebra na Educação Básica?* Os dados indicam a fragilidade do sistema de ensino, que se distancia da evolução histórica, uma vez que os estudantes ficam confinados ao nível "tópicos", o que dificulta a utilização da álgebra como ferramenta para a resolução de tarefas de outros domínios.

Palavras-chave: história da álgebra, praxeologia, níveis de codeterminação

Abstract

We have considered the results of previous studies on Brazilian students' difficulties in relation to algebra; on the differences between the institutional proposals in Brazil and Spain, and on the historical evolution of algebra in order to analyze the answers, given by a group of eight students from a Mathematics undergraduate course, to the question: "What did you learn about algebra in Basic Education?. The data indicate the fragility of the educational system, which distances itself from the historical evolution as students are confined to the level of "topics", making it difficult to use algebra as a tool for solving tasks in other domains.

Keywords: history of Algebra, praxeology, levels of determination

Introdução

Este trabalho faz parte de uma pesquisa em maior escala sobre o processo de ensino e aprendizagem de álgebra na educação brasileira. Alguns resultados já foram alcançados em trabalhos anteriores, que gostaríamos de registrar, pois, a partir deste, surgem novos questionamentos. Iniciamos destacando o trabalho no qual Santos Júnior *et al.*(2015) consideraram estudar a transição entre três etapas de ensino no Brasil com foco no domínio da álgebra.

No trabalho, apoiados na Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard, 2001, 2002), na noção de quadro de Douady (1992) e de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, segundo Robert (1998),

os autores realizaram um estudo com o objetivo de compreender as possíveis dificuldades dos estudantes ao aprenderem álgebra.

Para isso, analisaram um livro didático brasileiro aprovado em todas as avaliações do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o "caderno do professor", material disponibilizado pelo estado de São Paulo, o qual deve ser utilizado em paralelo ao livro didático. Além de analisar os documentos, foi feito um teste diagnóstico com dois grupos de estudantes: 5º ano do Ensino Fundamental (9 – 10 anos) e 1º e 2º ano do Ensino Médio (15 – 16 anos). O objetivo da escolha dos dois grupos foi identificar as técnicas utilizadas para desenvolver as tarefas propostas e assim poder compará-las (Santos Júnior *et al.,* 2015).

Os resultados das análises dos livros didáticos mostram que as atividades propostas têm como ênfase a linguagem algébrica e, principalmente, a passagem do trabalho do quadro aritmético para o quadro algébrico. Diante deste resultado, os autores comprovaram, via teste diagnóstico, que os estudantes privilegiaram as técnicas aritméticas para determinar a solução das tarefas do teste, o que não era esperado para os estudantes do 1º e 2º ano do Ensino Médio, sinalizando que estes apresentam dificuldades em trabalhar com a álgebra (Santos Júnior *et al.,* 2015).

Em outro estudo, cujo artigo também compõe a pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de álgebra, também se utilizou a TAD como suporte teórico. Parte-se do pressuposto que as dificuldades encontradas pelos estudantes brasileiros no estudo das noções ligadas ao domínio da álgebra advêm das expectativas institucionais esperadas e existentes, tanto para o seu desenvolvimento, quanto para a introdução das referidas noções (Dias *et al.,* 2016).

Para ter outro parâmetro de análise, os autores decidiram considerar a análise de livros didáticos de outro país, neste caso a Espanha, tentando compreender as regularidades e diferenças existentes, quando comparados aos livros do Brasil. A análise foi também baseada nos documentos que regem a educação nos dois países, com foco naqueles que tratam explicitamente sobre as indicações do ensino de álgebra, o que corresponde às expectativas institucionais esperadas (Dias *et al.,* 2016).

Segundo seus autores, os documentos brasileiros foram elaborados em conjunto com todos os educadores do País e os objetivos descritos para o ensino da álgebra foram definidos a partir de capacidades associadas aos respectivos conteúdos, os quais devem ser vislumbrados por meio de conexões intra e extramatemáticas. O documento espanhol segue as metas da comunidade europeia, mas cada região tem a autonomia pedagógica de definir sua estrutura curricular. Os autores então, com o objetivo de adentrar nas escolhas de uma região, analisaram os documentos da região da Catalunha e observaram que o foco do documento são as competências e estas estão associadas aos conteúdos. O que se observou de diferença entre as propostas dos dois países é que enquanto um documento estabelece competências, o outro estabelece a capacidade (Dias *et al.,* 2016).

Observamos que estas duas abordagens distintas nos documentos refletem-se de alguma maneira no modo como as noções de álgebra são explicitadas aos aprendizes. Isso pressupõe que também interfiram na formação dos futuros professores de Matemática e é aos futuros professores que dedicamos este trabalho. Antes disso, cabe destacar a análise efetuada nos livros didáticos por Dias *et al*. (2016), na qual foi possível verificar que os livros espanhóis e brasileiros abordam praticamente os mesmos conteúdos. No entanto a grande diferença é como ocorre esta abordagem, pois os livros espanhóis priorizam a revisitação dos

conteúdos antes vistos e os articulam com novos conhecimentos, tratando a álgebra por meio de problemas intra e extramatemáticos. Este é um ponto importante a considerar, pois partimos do pressuposto que o livro didático é uma das ferramentas didáticas mais utilizadas pelo professor e que muitas vezes é adotada como material de orientação para o docente.

As constatações dos dois trabalhos expostos fazem refletir sobre o processo de formação dos professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental - anos finais e Ensino Médio e nos encaminham a formular a seguinte questão de pesquisa: *Quais as relações pessoais pertinentes ao objeto álgebra dos futuros professores de Matemática, considerando os aspectos históricos de desenvolvimento do domínio algébrico e as relações institucionais encontradas em livros didáticos brasileiros*?

Diante desse questionamento, podemos afirmar que os objetivos deste trabalho são: identificar as relações pessoais de futuros professores de Matemática com o objeto álgebra e também identificar as relações institucionais do domínio da álgebra em livros didáticos propostos para o seu ensino no Brasil. Para atingir tais objetivos, apresentamos no texto a exposição da perspectiva histórica do desenvolvimento do quadro algébrico para, na sequência, apresentar referencial teórico, metodologia e resultados da pesquisa.

Referências históricas

Neste trabalho, destacamos a gênese do cálculo algébrico por meio do trabalho de Robinet (1989), que divide a história da álgebra em antes e depois de Viète, mostrando sua constituição lenta, na qual se destaca seu caráter de ferramenta para a solução de problemas. No período considerado antes de Viète, a pesquisadora esclarece que este engloba um grande número de séculos, por exemplo, desde a alta antiguidade de babilônios e egípcios, em que já é possível encontrar a resolução dos problemas algébricos.

Importante destacar que durante o período antes de Viète, a resolução de problemas algébricos estava focada no discurso, ou seja, o formalismo não era privilegiado, por exemplo, as operações não eram expressas por meios de sinais. Vestígios de introdução ao formalismo aparecem no trabalho de Diophante 300 anos d.C. Contudo Diophante utilizava o simbolismo para abreviar a escrita, mas não o operava para resolver problemas (Robinet, 1989); trata-se aqui da passagem da álgebra retórica para a álgebra sincopada.

Outro povo que merece destaque na época considerada são os indianos, uma vez que auxiliaram o progresso do formalismo na medida em que elaboraram um sistema de numeração decimal de posição. Além disso, os indianos já utilizavam os números negativos representados por números positivos sobrepostos de um ponto. Em relação aos elementos, que são atualmente considerados como pertencentes ao domínio da álgebra, temos que os indianos representavam, por exemplo, uma incógnita pela abreviação *ya* da palavra *yavat-tavat*, designavam o quadrado de uma incógnita pela abreviação *yav* da palavra *yavat-varga* etc. Mesmo com esta gênese da utilização do simbolismo, os indianos não operavam com o mesmo, mas é possível reconhecer que o simbolismo é mais elaborado, quando comparado ao de Diophante (Robinet, 1989).

Os árabes são considerados pela autora como o povo que fez progredir o cálculo algébrico mesmo que, surpreendentemente, utilizando pouco da escrita simbólica. Elaboraram a transposição do cálculo

aritmético aos cálculos com incógnitas e ainda realizaram o primeiro estudo sobre um tipo de equação, o que indica a passagem dos exemplos típicos para as demonstrações quantificadas (Robinet, 1989). Os árabes, em especial, com Al Kayyam, de acordo com Robinet (1989), são considerados os responsáveis pelo período de transição na histórica do cálculo algébrico, ou seja, após Viéte. O destaque dado pela pesquisadora a Al Kayyam deve-se ao fato de esse matemático ter feito uma classificação de equações do terceiro grau e das construções geométricas das raízes, além de estudar as equações sob uma forma geral com coeficientes positivos quaisquer, mesmo sem simbolismo.

Diante deste breve relato histórico do desenvolvimento do domínio da álgebra, Robinet (1989) indica que o ensino da álgebra privilegia seu caráter de objeto matemático, o que - adicionado à lentidão de sua constituição - pode representar fatores que dificultam sua aprendizagem pelos estudantes. Assumimos que estes fatores podem acompanhar os estudantes também no Ensino Superior, em especial na formação de professores, o que ganha mais destaque devido à responsabilidade dos docentes em ensinar o domínio algébrico num futuro próximo.

Referencial teórico

Para identificar as propostas institucionais para o ensino da álgebra e a marca destas na aprendizagem dos estudantes, escolhemos como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), conforme Chevallard (2001, 2002), mais particularmente as noções de praxeologia, relações institucionais e pessoais e níveis de codeterminação.

Iniciamos descrevendo o que consideramos como relação pessoal. Para Chevallard (2001), a relação pessoal representada por R(x; o), ou seja, a relação de um indivíduo *x* com um objeto *o*. Esta relação representa as interações que o indivíduo pode ter com o. No nosso caso, estamos atentos em verificar quais as relações que os futuros docentes de Matemática têm com o objeto álgebra.

Outra noção da TAD utilizada como suporte teórico é a de relação institucional. Para Chevallard (2001), as instituições determinam as relações pessoais que os indivíduos têm com os objetos, por isto é importante reconhecer qual a posição que os objetos ocupam no interior das instituições. No caso deste trabalho, a instituição observada é o livro didático de Matemática e qual a posição que o domínio da álgebra nele ocupa.

Consideramos ainda a noção de praxeologia. Para Chevallard (2001), toda atividade humana pode ser descrita por meio de uma praxeologia, ou seja, de tipos de tarefas T, ao menos de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ e justificável por uma teoria Θ. Como exemplo de praxeologia, podemos considerar a seguinte atividade matemática: "Localize os pares ordenados A(2; 3) e B(0;-1) no sistema cartesiano ortogonal", nesta atividade, temos como tipo de tarefa: representar pares ordenados no sistema cartesiano ortogonal; como técnica: reconhecer a abscissa e ordenada para representar o ponto; como tecnologia: pares ordenados, abscissa, ordenada e sistema cartesiano ortogonal; e por fim a teoria: geometria analítica no plano.

Utilizamos ainda a noção de níveis de codeterminação que, conforme a definição de Chevallard (2002), é representada por uma escala composta por diferentes níveis que possibilitam explorar e localizar as

condições e restrições que determinam o processo de difusão praxeológico, uma vez que determinada condição ou restrição pode situar-se em determinado nível da escala, mas pode exprimir-se em outro, o que evidencia o fato de não podermos isolar o que se passa em uma classe do conjunto do sistema de ensino.

Essa escala é indicada por: tópicos ↔ temas ↔ setores ↔ domínios ↔ disciplinas ↔ pedagogia ↔ escola ↔ sociedade ↔ civilização↔ humanidade, sendo tópicos o nível mais baixo e humanidade o nível mais alto. O autor enfatiza a importância de os professores transitarem nos diferentes níveis, mas ressalta que, em geral, ficam restritos aos tópicos e temas e, como exemplo para operar nos níveis setores e domínios, é considerada a importância de indicar para o estudante os novos conhecimentos que dependem daqueles que estão sendo trabalhados num determinado momento. Por exemplo: utilizar a noção de fatoração como ferramenta para resolver tarefas que envolvem a solução de uma equação do segundo grau.

Metodologia

A metodologia utilizada é a da pesquisa qualitativa, cujo método é o da pesquisa documental que, segundo Lüdke e André (2013), consiste na análise de documentos contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos e de elementos da pesquisa de campo. Para a pesquisa documental, analisamos o livro didático que está entre os mais utilizados nas escolas da Educação Básica brasileira para a introdução da álgebra com alunos entre 11 e 13 anos de idade, a saber: Dante (2016) para o Ensino Fundamental.

Justificamos a análise de apenas um livro por meio da afirmativa de Lages Lima, Carvalho, Wagner, Morgado (2006), no sentido de que o livro-texto adotado pelo professor pouco difere dos outros existentes no contexto brasileiro.

O livro foi analisado por meio de uma grade de análise na qual se procurou identificar as praxeologias indicadas para serem desenvolvidas de modo a compreender quais conhecimentos poderiam ser considerados como mobilizáveis para os estudantes que passaram pela Educação Básica.

Para este estudo, foi desenvolvida ainda uma pesquisa de campo, a qual foi realizada por meio da proposta da questão entregue em uma folha de papel: *O que vocês aprenderam de álgebra na Educação Básica*? Os questionários foram fornecidos para um grupo de doze estudantes de um curso de licenciatura em Matemática, todavia apenas oito dos estudantes aceitaram responder à questão. O objetivo desta questão foi identificar qual a relação pessoal desses estudantes com o domínio da álgebra, uma vez que eles já haviam passado pela Educação Básica e por cursos superiores de introdução à álgebra abstrata.

Resultado das análises

Esta análise é estruturada em duas partes: a primeira dedicada ao livro didático e a segunda, às respostas dos estudantes de licenciatura em Matemática à pergunta proposta.

A análise do livro didático de Dante (2016) para o Ensino Fundamental - anos finais propicia considerar que a relação institucional para o ensino da álgebra se inicia no 6º ano (estudantes de 11 anos) com a utilização de fórmulas para o cálculo de áreas de figuras planas.

No 7º ano (estudantes de 12 anos), são introduzidas as equações do 1º grau com uma incógnita, para as quais é dada ênfase à substituição dos números por letras para, na sequência, explicitar a noção de incógnita e determinar a solução de uma equação do tipo $ax + b = c$, substituindo x por alguns números. Após a utilização do que podemos denominar método das tentativas, são consideradas as propriedades das equações e assim é apresentado o método para resolver equações, sendo este desenvolvido por meio de exemplos, mas como só se consideram as equações do tipo $ax + b = c$, é possível utilizar sempre o método das tentativas.

Na sequência, são introduzidas brevemente as equações lineares com duas incógnitas e os sistemas de equações lineares 2x2, sendo os exemplos apresentados apenas de sistemas com solução. Da mesma forma, são brevemente tratadas as inequações do 1º grau com uma incógnita. Como a introdução e o desenvolvimento da álgebra no 7º ano são apenas preliminares, ela está associada, particularmente, à representação de números por letras.

No 8º ano (estudantes de 13 anos), são introduzidas as expressões algébricas, particularmente associadas às noções de área, revisitando assim as fórmulas trabalhadas no 6º ano. São tratadas ainda as expressões algébricas inteiras, os polinômios, suas operações e propriedades, os produtos notáveis e a fatoração, que conduzem à solução das equações-produto. São ainda revisitados os sistemas lineares 2x2, para os quais são propostos os métodos de resolução: por tentativas, por substituição e por adição. O método gráfico é empregado apenas para a visualização das possibilidades de solução de sistemas lineares 2x2, pois pouca ênfase é dada à classificação desses sistemas.

No 9º ano (estudantes de 14 anos), são tratadas as equações do 2º grau, o que permite revisitar as equações-produto desenvolvidas no 8º ano. São introduzidos ainda os sistemas com equações do 2º grau e a ideia intuitiva de função, para a qual são consideradas as funções: afim e quadrática; novamente é possível revisitar conceitos e noções.

Observamos aqui que a passagem da aritmética para a álgebra está particularmente associada ao conteúdo desenvolvido no 7º ano, indicando a importância de o professor ultrapassar os níveis tópicos e temas e conhecer toda a proposta de desenvolvimento da álgebra nos quatro anos do Ensino Fundamental - anos finais.

Desse modo, ao considerarmos as relações pessoais dos estudantes de licenciatura em Matemática por meio da questão proposta, identificamos duas categorias de respostas: uma na qual os estudantes listaram os conteúdos que aprenderam sobre álgebra na Educação Básica (seis estudantes) e outra em que os estudantes justificaram suas dificuldades em aprender álgebra ou não lembravam o que aprenderam (um estudante em cada caso), o que está distante do que se espera como conhecimentos a serem mobilizados pelos mesmos.

Entre os estudantes que listaram os conteúdos, encontramos as seguintes noções: expressões algébricas, equações do primeiro e do segundo grau; inequações, polinômios, produtos notáveis, sistemas de

equações, progressões geométricas e aritméticas, funções do primeiro e do segundo grau, funções exponenciais, inequações, funções (bijetoras, injetoras e sobrejetoras). Apenas um dos cinco estudantes citou os números inteiros como pertencentes ao domínio algébrico, o que é compreensível, pois este conceito é tratado apenas no quadro da aritmética.

É importante ressaltar que apenas um estudante conseguiu visualizar a álgebra como ferramenta para a compreensão de outros domínios da Matemática estudados no Ensino Médio. Vejamos o extrato de sua resposta:

Se no nono ano teve um pouco de tudo das séries anteriores, na primeira série do Ensino Médio também tivemos que utilizar tudo o que vimos no Ensino Fundamental, desta vez, tínhamos que utilizar nossos conhecimentos matemáticos para compreendemos o conceito de conjuntos e dos tipos de funções: afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e as progressões aritmética e geométrica. Nos anos seguintes, continuamos com o estudo da estatística e da probabilidade, trigonometria no triângulo retângulo, conceito de seno, cosseno e tangente, matrizes, sistemas lineares, estudo dos poliedros e uma ideia de geometria analítica.

Mesmo tendo um número reduzido de estudantes que responderam ao questionamento, é preocupante que apenas um deles tenha conseguido articular os conhecimentos prévios com outros conhecimentos, principalmente por se tratar de futuros professores.

Para o estudante cuja resposta está associada à dificuldade enfrentada na passagem da aritmética para álgebra, observamos a dificuldade em substituir números por letras, o que parece estar associado à falta de articulação entre os saberes desenvolvidos nos quatro anos do Ensino Fundamental - anos finais. Vejamos um extrato de sua resposta:

O que eu aprendi de álgebra em minha educação básica, pra mim foi um grande impacto ver no quadro que a aritmética que eu estava me esforçando para aprender agora tinha letras; foi um pouco difícil pra adaptar, mas aos poucos consegui, mas muitos amigos da minha turma não, e isso foi passando os anos e não sabíamos nem de sua história e nem o porquê de aprender e foi ficando cada vez mais difícil, complicada e ao invés de aprender, decoramos formas de fazer; resolvia por resolver e não sabia o porquê e assim continuo até o fim do Ensino Médio.

Observamos que o estudante remeteu a uma dificuldade que também esteve presente no desenvolvimento do domínio algébrico, como observamos em Robinet (1989), que é a passagem para o simbolismo.

Considerações finais

Na análise dos livros didáticos, foi possível observar que o domínio da álgebra é tratado na escola básica brasileira da mesma maneira que a observada por Robinet (1989), ou seja, suas noções são introduzidas prioritariamente como objetos matemáticos e as aplicações propostas, em geral, não necessitam desses objetos para serem resolvidas, pois os problemas contextualizados correspondem às praxeologias privilegiadas e quase sempre podem ser solucionados utilizando conhecimentos aritméticos.

Esta hipótese fica ainda mais evidente com a análise das respostas dadas por oito estudantes do curso de licenciatura em Matemática para a questão proposta, pois nelas observamos que esses alunos, em geral, referem-se apenas a alguns tópicos, em particular, as equações e dizem ter tido muitas dificuldades na aprendizagem das noções indicadas, o que revela uma atomização no ensino proposto e falta de articulação entre os saberes desenvolvidos nos diferentes anos do Ensino Fundamental.

É preciso um trabalho mais amplo em que se possa tratar de diversos setores do domínio da álgebra e articular este domínio com outros domínios que utilizam seus conceitos e noções como ferramentas para a solução de suas tarefas mais específicas, o que conduz à necessidade de mais estudos que auxiliem a encontrar novas metodologias de ensino que possam alcançar nossos estudantes.

Referências bibliográficas

Chevallard, Y. (2001). *Organiser l'étude.1. Structures & Fonctions*. Recuperado em 05 de janeiro de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_1.pdf

Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude 3: Ecologie et Regulation*. Recuperado em 05 de janeiro de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf

Dante, L. R. (2016). *Projeto Teláris: Matemática: Ensino Fundamental 2.* São Paulo: Ática.

Dias, M. A., Guadagnini, M. R., & Santos Júnior, V. B. (2016). Álgebra básica: um estudo sobre a relação institucional para seu ensino no Brasil e na Espanha. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29*, 456-463.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM, 6*, 132-158.

Lima, E. L., Carvalho, P. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio.* Rio de Janeiro: IMPA.

Lüdke, H. A., & André, M. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: Pedagógica e Universitária.

Robert, A. (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

Robinet, J. (1989). *La genèse du calcul algébrique (une esquisse)*. Recuperado em 03 de janeiro de 2018 de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_cahiers_de_didactique/

Santos Junior, V.B., Ignácio, R., & Dias, M.A. (2015). Álgebra na Educação Básica Brasileira e a transição entre as diferentes etapas escolares. En Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz (Ed.), Educación Matemática en las Américas: Algebra y Cálculo (pp. 13-24). Republica Dominicana.

PRAXEOLOGIAS EXISTENTES PARA O ENSINO DA NOÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL NO ENSINO MÉDIO NO BRASIL

Sirlene Neves de Andrade, Marlene Alves Dias
Secretaria de Educação de São Paulo, UNIAN. (Brasil)
sirlene-neves@hotmail.com, alvesdias@ig.com.br

Resumo

Neste trabalho, apresentamos a ferramenta de análise construída para identificar as praxeologias existentes para o desenvolvimento da noção de função exponencial no Ensino Médio e verificar se essas estão em conformidade com o que se espera como conhecimento prévio no início do Ensino Superior. Para sua construção, escolhemos como referencial teórico as noções de quadro e mudança de quadros, a Teoria Antropológica do Didático e a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes. Concluímos que existe uma preocupação em propor situações que possam ser utilizadas por professores, levando em conta os conhecimentos prévios dos estudantes, mas que podem dificultar sua aplicação posterior.

Palavras-chave: função exponencial, quadro, ostensivos e não ostensivos, níveis de conhecimento

Abstract

In this paper, we show an analysis tool which was made to identify the existing praxeologies for the development of the notion of exponential function in High School, as well as to verify if such praxeologies are in accordance with what is expected as previous knowledge at the beginning of Higher Education. For its construction, we chose as theoretical reference the notions of square and change of squares, the Anthropological Theory of Didactics and the notion of the levels of knowledge expected in the students. We conclude that there is concern on the proposal of situations that can be used by teachers, taking into account the previous knowledge of the students, but that may hinder its subsequent application.

Keywords: exponential function, framework, ostensive and non ostensive, knowledge levels.

Introdução

Este trabalho é parte do projeto sobre o estudo da transição entre a Educação Básica e o Ensino Superior, cuja proposta é investigar as questões associadas a essa transição para as noções matemáticas que são, em geral, desenvolvidas nos quadros da Álgebra, Álgebra Linear, Análise Matemática e Cálculo Diferencial e Integral.

O objetivo desta pesquisa é identificar as praxeologias existentes para o desenvolvimento da noção de função exponencial no Ensino Médio e verificar se essas estão em conformidade com o que se espera como conhecimento prévio mobilizável e/ou disponível no início do Ensino Superior.

Observamos inicialmente que Gueudet (2008) apresenta uma revisão da literatura de Educação Matemática sobre a transição Ensino Médio e Superior. Nesse trabalho, a autora parte da seguinte questão: "Quando a transição acontece?" De acordo com a autora, não existe uma resposta simples para essa questão e, além disso, é preciso considerar, por exemplo, os diferentes contextos, culturas e escalas de tempo. Isso nos conduziu a centrar nosso olhar sobre a instituição, em particular, observando as técnicas e suas explicações, quando as mesmas são trabalhadas no Ensino Médio.

Considerando a noção de função exponencial, que no Brasil, em geral, é introduzida no Ensino Médio, escolhemos analisar as organizações matemáticas que estão associadas ao conteúdo a ser desenvolvido e as organizações didáticas que correspondem às propostas institucionais possíveis para trabalhar um determinado conteúdo, incluindo as estratégias, diferentes abordagens e formas de trabalho com os estudantes para uma determinada etapa escolar.

Para isso, escolhemos como referencial teórico para o desenvolvimento da pesquisa as noções de quadro e mudança de quadro de Douady (1984, 1992), a abordagem teórica sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1998) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1992, 1994, 2015) e Bosch e Chevallard (1999), em particular as noções de relação institucional e pessoal, organizações praxeológicas ou praxeologias e ostensivos e não ostensivos.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujas análises foram realizadas em documentos contemporâneos que são utilizados por professores e estudantes. Para isso, seguimos o método da pesquisa documental, segundo Lüdke e André (2013) e construímos uma grade de análise inspirada em Dias (1998).

Os resultados das análises mostram que nem sempre existe uma coerência em relação às propostas institucionais de utilização de uma mesma tarefa nas diferentes etapas escolares que podem auxiliar professores e estudantes do Ensino Médio e Superior a revisitar o trabalho realizado em etapas anteriores, utilizando esses conhecimentos como conhecimentos prévios disponíveis para a introdução dos novos conceitos.

Referencial teórico

Como destacado anteriormente, nossa fundamentação teórica se desenvolve principalmente na TAD, porém com a sustentação de outras abordagens teóricas.

Da TAD, consideramos sua primeira noção fundamental: a noção de *objeto o* que, para Chevallard (1992, 1998, 2015), corresponde a toda entidade, material ou imaterial que existe para pelo menos um indivíduo. Isso lhe permite considerar a segunda noção fundamental, que é a de relação pessoal de um indivíduo x com um objeto o, que equivale à expressão pela qual designamos o sistema – representado por $R(x,o)$ –, de todas as interações, sem exceção, que x pode ter com o objeto o, ou seja, x pode manipulá-lo, utilizá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele etc.

A partir da segunda noção, é considerada a terceira noção fundamental, que é a de ***pessoa***, que é definida pelo par formado por um indivíduo x e o sistema de relações pessoais $R(x,o)$ num dado momento da história de x.

Na sequência, o autor introduz a quarta noção fundamental – a de *instituição* –, explicitando que as instituições são obras de tipo particular, ou seja, uma instituição é um dispositivo social "total", que pode ter somente uma extensão reduzida no espaço social (existem microinstituições), mas que permite e impõe a seus sujeitos, isto é, às pessoas que vêm ocupar diferentes posições oferecidas na instituição *I,* envolvendo maneiras próprias de fazer e, mais amplamente, adotando praxeologias determinadas.

Assim, a "teoria do conhecimento" esboçada para os indivíduos é transferida às instituições, ou seja, dado um objeto *o*, uma instituição *I* e uma posição *p* em *I*, o autor denomina *relação institucional de o em posição p*, e a indica por $R_I(p,o)$ a relação com o objeto *o* que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de *I* em posição *p*.

Para o estudo das relações institucionais e pessoais, fomos conduzidos a considerar a noção de *organização praxeológica, ou praxeologia* que, conforme Bosch et Chevallard (1999), corresponde aos *tipos de tarefas* (T) que, para serem executadas, necessitam de uma maneira de fazer, denominada *técnica* (τ). A associação tarefa-técnica é definida como um saber fazer que não sobrevive isoladamente, solicitando um ambiente tecnológico-teórico que equivale a um saber formado por uma tecnologia ou discurso tecnológico (θ) – ou seja, um discurso racional que justifica a técnica e a torna compreensível – e de uma teoria (Θ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada. O sistema composto por tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria [T, τ, θ, Θ], que corresponde ao saber. A base de toda praxeologia é constituída por um sistema de tarefas em torno das quais se desenvolvem e se organizam técnicas, tecnologias e teorias.

Chevallard (1994), ao considerar que em toda atividade humana somos chamados a realizar diferentes tipos de tarefas e que para estas existe uma técnica, apresenta as questões: De que é feita uma técnica? De que ingredientes se compõem? Em que consiste a "execução" de uma técnica?

Isso o conduz a distinguir dois tipos de objetos: *os ostensivos e os não ostensivos*. Os primeiros são objetos que têm para nós uma forma material ou sensível. Exemplos: objetos materiais (caneta, compasso etc.); gestos (*ostensivos gestuais*); palavras, e mais genericamente o discurso (*ostensivos discursivos*); esquemas, desenhos, grafismos (*ostensivos gráficos*); escritas e formalismos (*ostensivos escriturais*).

A característica dos ostensivos é que eles podem ser manipulados, não só no sentido tátil estrito (como um compasso, uma caneta etc.), mas também em sentido amplo (pela voz, pelo olhar etc.). Ao contrário, os objetos *não ostensivos*, que denominamos usualmente noções, conceitos, ideias etc., não podem ser manipulados, mas só evocados por manipulação dos ostensivos associados. Chevallard (1994) observa que existe uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos, pois os primeiros são *manipulados* por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto estes últimos são *evocados* por meio da manipulação dos ostensivos.

Além das noções da TAD, recorremos à noção de quadros de Douady (1992), a qual afirma:
[...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas (Douady, 1992, p. 135).

Douady (1984, 1992) define ainda as *mudanças de quadro* como meios para se obterem formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e possibilitam utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas à formulação inicial. As traduções de um quadro em outro terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, permitindo assim a criação de novos objetos matemáticos, enriquecendo tanto o quadro original, como os quadros auxiliares de trabalho.

Ressaltamos que a noção de quadros nos dá subsídio para compreender como e em qual quadro a noção de função exponencial está inserida nas duas instituições que analisamos, isto é, o Ensino Médio e Superior.

Observamos ainda que, para introduzir a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes é preciso considerar a noção de níveis de conceituação definidos por Robert (1997), os quais são definidos como os marcos que podemos identificar ao longo do ensino das noções de determinado campo conceitual. Muitas noções matemáticas podem ser abordadas em vários níveis de conceituação, sempre parcialmente encaixados, sendo que os objetos iniciais mudam, tornando-se mais gerais, o que propicia introduzir novas estruturas, mais ricas, requerendo, no entanto, um novo formalismo. Em geral, os exercícios ditos teóricos de determinado nível correspondem aos teoremas do nível seguinte. Dessa forma, várias ordens de apresentação são sempre possíveis, inexistindo uma hierarquia absoluta entre esses níveis, que, pelo menos durante os estudos, dependem apenas do ensino efetivo.

Após observar a relatividade dos conhecimentos matemáticos no que tange ao campo conceitual em que se encontram, destacamos o que Robert (1998) intitula níveis de conhecimento esperados dos estudantes. Os níveis nos proporcionam uma nova ferramenta de análise, que nos auxilia a classificar os tipos de tarefas em relação ao trabalho esperado dos estudantes, a saber: os níveis técnico, mobilizável ou disponível. Esses níveis são relativos a um determinado nível de conceituação.

Sendo assim, segundo a autora, os tipos de tarefas de *nível técnico* são aquelas que funcionam de maneira mais isolada, local e concreta, isto é, tarefas que são explícitas em sua composição, ou seja, é direta a identificação de qual noção deve ser utilizada na busca da resolução. No que se refere ao *nível mobilizável*, este é mais amplo que o anterior, pois existe um início de relação entre diversos saberes de um determinado campo da Matemática, vários métodos podem ser mobilizados, os caracteres, ferramenta e objeto são considerados, além disso, a noção a utilizar está explícita na tarefa. Se um saber é identificado, ele é dito mobilizável se é acessível, se o estudante o utiliza corretamente. Por fim, temos o *nível disponível* que corresponde a saber resolver o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou inventar), mudar de quadros (relacionar), aplicar métodos não previstos.
Após esta rápida exposição do referencial teórico da pesquisa, descrevemos o percurso metodológico deste trabalho.

Metodologia

A metodologia escolhida para desenvolver essa pesquisa é a qualitativa, centrada no método da pesquisa documental em conformidade com Lüdke e André (2013), uma vez que nossas fontes são documentos

institucionais, portanto, utilizamos a técnica de análise de documentos retrospectivos e contemporâneos, a saber: livros didáticos e macroavaliações, que correspondem a materiais habitualmente usados por professores e estudantes.

Para tal, construímos uma grade de análise, inspirada na grade de Dias (1998), que serviu de instrumento para identificar as organizações matemáticas e didáticas. Essa grade foi construída considerando o referencial teórico escolhido para a pesquisa.

A finalidade da grade é analisar as diferentes formas de organizações matemáticas e didáticas existentes via livros didáticos para identificar as relações institucionais que atualmente sobrevivem no processo de ensino e aprendizagem da noção de função exponencial no Ensino Médio. Identificação das praxeologias usuais privilegiadas que podem ser consideradas como novas formulações nas diferentes etapas escolares, isto é, as diferentes técnicas que viabilizam trabalhar as novas formulações.

Apresentamos, a seguir, um exemplo específico da grade utilizada para identificar as praxeologias usuais. A tarefa escolhida é a privilegiada em todas as obras do Ensino Médio, sendo que, em geral, são tratados apenas os gráficos das funções $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 3^x$e $y = 3^{-x}$. Os outros casos ficam a cargo de professores e estudantes.

Tipo de tarefa: Esboçar o gráfico cartesiano da função exponencial de domínio IR.

Exemplo: Esboce o gráfico cartesiano de domínio IR de $y = 3^x$.
Técnica(s): A técnica consiste em aplicar a definição de potência para determinar as coordenadas dos pontos pertencentes ao sistema cartesiano, os quais, unidos, formam a curva do gráfico solicitado.

Tecnologia: Consiste em elaborar uma tabela de dupla entrada, escolhendo valores para a variável x e determinando y de forma que os mesmos satisfaçam a função $y = 3^x$, na qual x pertence ao domínio da função. Em seguida, é preciso representar num plano
cartesiano os pontos encontrados. Desse modo, são necessárias as noções de: valor numérico de uma função, sistema cartesiano ortogonal e coordenadas de um ponto e como representá-lo neste sistema, propriedades da função exponencial e suas representações.
Teorias: O conjunto de números reais e suas propriedades, sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais no plano enfatizando as noções de abscissa e ordenada, funções, suas propriedades e representações.
Quadro(s) em que a tarefa é enunciada: numérico e algébrico.
Quadro(s) de solução da tarefa: numérico.
Ostensivos de representação escrita: representação na forma de potência algébrica explícita e representação gráfica.
Não ostensivos associados: noção de potência de expoente real, noção de número real, suas operações e propriedades, noção de plano cartesiano, as noções de abscissa e ordenada, noção de coordenadas cartesianas, noção de função exponencial, noção de gráfico de uma função exponencial.
Nível de conhecimento esperado dos estudantes: É preciso dispor de conhecimentos sobre definição de potência, cálculo do valor numérico de uma função e construção de gráficos no plano cartesiano.

Alguns resultados

As análises das organizações matemáticas e didáticas conduziram à identificação de uma dificuldade teórica, quando da definição de função exponencial, que em geral é apresentada no Ensino Médio por meio de um caso particular, isto é, considerando seu contradomínio como o conjunto dos números reais positivos e diferentes de zero.

Observamos aqui que esta escolha didática dificulta a compreensão e a aplicação da função exponencial em outros domínios da Matemática, em particular, em Cálculo Diferencial e Integral, que corresponde a um domínio para o qual poderíamos utilizar, por exemplo, a função exponencial como conhecimento prévio disponível desenvolvido no Ensino Médio para a introdução das assíntotas horizontais.

Observamos que encontramos apenas seis tipos de tarefas sobre a noção de função exponencial e em todas elas eram dadas funções definidas do conjunto dos reais nos conjuntos dos reais positivos e diferentes de zero (caso particular).

Os tipos de tarefas apresentados na sequência correspondem àqueles que compõem as praxeologias desenvolvidas no Ensino Médio no Brasil.

T1: Classificar em crescente ou decrescente a função definida por meio do ostensivo algébrico explícito (por exemplo: $y = 2^x$).

T2: Identificar e/ou determinar a lei de formação da função exponencial de uma situação enunciada por meio do ostensivo de representação em língua natural.

T3: Calcular valores numéricos para uma função exponencial dada.

T4: Esboçar o gráfico cartesiano da função exponencial de domínio IR e contradomínio IR_+^* (conjunto dos números reais positivos e maiores que zero).

T5: Classificar em crescente ou decrescente a função definida pela sua representação gráfica cartesiana.

T6: Identificar a lei de formação de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ por meio de uma representação gráfica cartesiana (passagem do ostensivo gráfico para o ostensivo algébrico).

Ressaltamos aqui que, ao definir a função exponencial considerando apenas o caso particular em que o contradomínio é o conjunto dos números reais positivos e diferentes de zero, as praxeologias existentes nos livros didáticos avaliados e indicados pelo Ministério da Educação tornam-se diferentes das pedidas nas macroavaliações de acesso no Ensino Superior, como foi possível constatar na tarefa da figura1 da prova da FUVEST – 2011, o que já representa uma dificuldade para sua aplicação em outras tarefas já no Ensino Médio.

Seja $f(x) = a+2^{bx+c}$, em que a, b e c são números reais. A imagem de f é a semireta $]-1, \infty[$ e o gráfico de f intercepta os eixos coordenados nos pontos (1, 0) e $(0, -\frac{3}{4})$. Então o produto a.b.c vale:
a) 4 b) 2 c) 0 d) –2 e) –4

Figura 1. Tarefa sobre função exponencial da prova da primeira fase da FUVEST – 2011

A análise dos livros de Cálculo Diferencial e Integral, que são geralmente indicados no Ensino Superior, mostrou que a noção de função exponencial não é revisitada nesta etapa escolar, o que nos levou a considerá-la como um conhecimento prévio disponível.

Contudo é preciso ressaltar que as funções exponenciais utilizadas na introdução de novos conceitos e noções no Ensino Superior ultrapassam as definidas apenas para o caso particular introduzido no Ensino Médio, o que está de acordo, por exemplo, com as exigências institucionais da prova da FUVEST, que é um exame de admissão para a universidade de São Paulo.

Isso mostra um descompasso entre o que se desenvolve no Ensino Médio e o que se espera enquanto conhecimento prévio disponível no Ensino Superior. Esse descompasso conduz a uma dificuldade na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que tem sido constantemente constatada pelos professores, e que podemos supor estar associada a uma falta de articulação e comunicação entre o Ensino Médio e Superior.

Algumas considerações

No desenvolvimento da pesquisa, foi possível observar que nem sempre existe uma coerência em relação às propostas institucionais de utilização de uma mesma tarefa nas diferentes etapas escolares que podem auxiliar professores e estudantes do Ensino Médio e Superior a revisitar o trabalho realizado em etapas anteriores utilizando esses conhecimentos como conhecimentos prévios disponíveis para a introdução dos novos conceitos, o que conduz a tornar os conhecimentos prévios mais ricos, mais diferenciados e mais elaborados em termos de significado e o novo conhecimento adquire significados para o aprendiz, conforme afirma Moreira (2005).

Sendo assim, é preciso estar atento, quando da escolha do livro didático, para não criar uma dificuldade difícil de ser ultrapassada. Além disso, como já indicamos acima, nossa hipótese é que parece necessitarmos de uma maior articulação e comunicação entre professores e educadores dos Ensinos Médio e Superior, ou seja, de trabalhos que mostrem a importância da transição entre estas duas etapas escolares, exibindo diferentes aspectos dessa transição, o que pode ser feito por meio dos diferentes olhares propostos por Guedeut (2008).

Referências bibliográficas

Bosch, M. e Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 19(1), 77-124.

Chevallard, Y. (2015). *Pour une approche anthropologique du rapport au savoir*. Disponível em :http://www.gfen.asso.fr/images/documents/publications/dialogue/dial155_enligne_anthropo_rap_savoir_chevallard.pdf .

Chevallard,Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125.

Chevallard,Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage*, Grenoble, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1991). La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Enseigné. *La Pensée Sauvage*. Grenoble. França.

Dante, L.R. (2014). *Matemática:* Contexto e Aplicações. Editora Ática. São Paulo. Brasil.

Dias M. A. (1998). *Problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de Doctorat. Université Paris VII, Paris. França.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de Doctorat. Université de Paris VII, Paris. França.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères* IREM, 6, 132-158.

Fuvest (2011). *Provas e gabaritos*. Disponível em: http://www.fuvest.br/vest2011/provas/provas.stm

Gueudet, G (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254.

Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Moreira, M.A. (2005). *Aprendizagem Significativa Crítica*. Editora da Universidade Federal de Porto Alegre. Porto Alegre. Brasil.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques. — La Pensée Sauvage*, Grenoble, 18(2), 139-190.

CONEXIONES MATEMÁTICAS ASOCIADAS AL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DETECTADAS EN ESTUDIANTES DEL PREUNIVERSITARIO

Javier García-García, Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
jagarcia@uagro.mx, cdolores2@uagro.mx sirlene-neves@hotmail.com, alvesdias@ig.com.br

Resumen

Este artículo da cuenta de una investigación que tiene por objetivo establecer las relaciones que guardan las conexiones matemáticas detectadas en los estudiantes del preuniversitario asociadas al Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Las conexiones matemáticas se asumen como un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Se utilizó el análisis temático para analizar los datos obtenidos mediante entrevistas basadas en tareas con 25 estudiantes del preuniversitario que habían cursado y aprobado Cálculo Diferencial e Integral. Los resultados muestran que el nivel de comprensión que puede lograr cada estudiante es diferente en cada caso según la frecuencia y usos que les dan a las conexiones matemáticas que establecieron. Asimismo, el conjunto de conexiones matemáticas identificadas permite establecer un sistema de conexiones asociadas al TFC.

Palabras clave: sistema de conexiones matemáticas, cálculo, análisis temático, preuniversitario.

Abstract

The aim of this paper is to establish the relations of the mathematical connections associate with the Fundamental Theorem of Calculus that were detected in pre-university students. Mathematical connections are assumed as a cognitive process by means of which a person relates or associate two or more ideas, concepts, definitions, theorems, procedures, representations and meanings with each other, with other disciplines or with the real world. Thematic analysis was used to analyze data obtained through task-based interviews to 25 pre-university students who had taken and passed Differential and Integral Calculus subject. The results show that the level of comprehension that each student can achieve is different in each case according to the frequency and uses that they give to the mathematical connections they established. Also, the set of mathematical connections identified allows establishing a mathematical connection system associated with the fundamental theorem of calculus.

Key words: mathematical connections system, calculus, thematic analysis, pre-university.

Introducción

Las Matemáticas por naturaleza, tiene contenidos conectados unos con otros, sin embargo, para fines de enseñanza-aprendizaje, tanto en los programas de estudio, en los libros de texto y en el aula de clases, se presentan en campos separados y, por lo tanto, es posible que activen creencias distintas para cada dominio

(Drageset, 2010). Como consecuencia, los contenidos matemáticos son vistos como desconectados uno de otros (Evitts, 2004). Para evitarlo, se propone que en el proceso enseñanza-aprendizaje se establezca relación entre distintos objetos matemáticos, entre éstos y otras disciplinas y con la resolución de problemas planteados en diversos contextos, es decir, se promueve el uso de las conexiones matemáticas. Esto permitiría a las Matemáticas ser vistas como un campo integrado que posibilitaría además una mejora en la compresión matemática, como lo señalan Businskas (2008), Mhlolo (2012) y Eli, Mohr-Schroeder & Lee (2011).

Hoy día, las conexiones matemáticas son una demanda de la currícula de diversos países y han sido estudiadas desde diversas perspectivas. Por tanto, es pertinente seguir investigando en esa línea para identificar qué conexiones matemáticas hacen los estudiantes del preuniversitario al trabajar diversas tareas en Cálculo. La razón de esto es porque, además de los escasos trabajos que abordan conjuntamente el tema de conexiones matemáticas y las ideas centrales del Cálculo (derivada e integral), ambos juegan un papel preponderante en el aprendizaje de los estudiantes. Por otra parte, la conexión matemática entre la derivada y la integral está cifrada por el TFC. En ese sentido, es pertinente preguntarse si los estudiantes son conscientes de la relación de reversibilidad entre ambos conceptos al resolver tareas específicas de Cálculo como lo sugieren Dolores & García-García (2017).

Por lo expuesto anteriormente realizamos una investigación en la que planteamos dos preguntas de investigación a saber: ¿qué conexiones matemáticas establecen los estudiantes del preuniversitario al resolver tareas de Cálculo que involucran a la derivada y a la integral? y, ¿qué relación guardan esas conexiones matemáticas y cómo contribuyen a la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)? Por las limitaciones de espacio, en este escrito se discutirá con mayor énfasis la respuesta a la segunda pregunta. Sin embargo, si el lector desea conocer otros resultados relativos a la primera pregunta de investigación puede consultar a García-García & Dolores-Flores (2017).

Las creencias y las conexiones matemáticas

Las creencias están estrechamente asociadas al dominio cognitivo (Drageset, 2010), así como las conexiones matemáticas y la comprensión matemática. Dado que ocurren en la mente del estudiante, entonces éste puede externarlas a través del lenguaje hablado, representaciones semióticas, gestos o producciones escritas. Por una parte, se asume que cuando un concepto matemático es objeto de enseñanza y aprendizaje, el estudiante trata de darle sentido usando sus creencias y concepciones previas. Estos intentos de dar sentido a sus resultados se constituyen en una colección de creencias (Katsberg, 2002) que se incorporan a su sistema de creencias (Pehkonen, 1994). Cuando estas creencias son consistentes con las creencias culturalmente aceptadas sobre el concepto matemático dentro de la comunidad matemática, entonces el estudiante tiene una comprensión matemática sobre ese concepto (Katsberg, 2002). Por otra parte, se acepta que las conexiones matemáticas son producto del sistema de creencias atribuido a cada estudiante, por lo que cada uno establecerá conexiones matemáticas a un nivel diferente (García-García & Dolores-Flores, 2017).

En relación con las conexiones matemáticas, Businskas (2008), las define, por un lado, como aquellas relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática y son independientes del estudiante y, por otro lado, como las relaciones a través de las cuales los procesos del pensamiento construyen la

matemática. En cambio, en este escrito las conexiones matemáticas se entienden como un "proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real (García-García & Dolores-Flores, 2017, p. 4)". Éstas emergen cuando los estudiantes resuelven tareas concretas y se identifican en sus producciones escritas o en sus argumentos verbales o gestuales. Por otra parte, se asume que las conexiones matemáticas tienen las siguientes características: (1) son relaciones correctas y deben ser útiles en la mejora de la comprensión matemática (Businskas, 2008), (2) una respuesta correcta no implica que el estudiante establece una conexión matemática, pero el uso de conexiones conlleva a respuestas consistentes (García-García & Dolores-Flores, 2017), (3) una parte importante de hacer conexiones matemáticas reside en el uso de diferentes representaciones semióticas (Businskas, 2008; Mhlolo, 2012) y, (4) las relaciones lógicas como la inclusión y la generalización (Businskas, 2008) son parte de establecer conexiones; así como la modelización también es una tipología de conexiones matemáticas (Evitts, 2004).

El Teorema Fundamental del Cálculo

EL TFC es esencial en el desarrollo del Cálculo, sin embargo, dado su complejidad teórica, provoca diversas dificultades en los estudiantes. El TFC relaciona a la derivada y a la integral como operaciones inversas de tal manera que cada uno deshace lo que el otro hace (Stewart, 2010). Matemáticamente, indica que:
Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad\qquad a \leq x \leq b$$

Es una antiderivada de f, es decir, $g'(x) = f(x)$ para $a < x < b$.
Usando notación de Leibniz, podemos escribir este teorema como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

cuando f es continua. (Stewart. 2010, p. 369).

La segunda parte del TFC indicado en el libro del mismo autor, se indica que para una función f continua en $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

Donde F es cualquier antiderivada de f, esto es $F' = f$ (Stewart. 2010).

Metodología

La presente investigación es de carácter cualitativo. Para la colecta de datos se utilizó a las entrevistas basadas en tareas que consiste en la interacción, mínima, entre un sujeto (estudiante) y un entrevistador, en relación con una o más tareas presentadas al sujeto por el entrevistador en una forma pre planeada (Goldin, 2000). Para los propósitos de esta investigación se utilizó un protocolo semiestructurado que incorporó tareas de derivada y de integral en tres registros diferentes: algebraico, gráfico y lenguaje escrito

(problemas de aplicación que evocaron conceptos de biología y de física). A los participantes se les proporcionaron hojas con las tareas a resolver; mientras éstos respondían cada tarea el investigador hacía preguntas para identificar las conexiones matemáticas que ellos establecían en ese momento. En el estudio participaron 25 estudiantes del preuniversitario (entre 15 y 19 años) del estado de Guerrero, México que habían cursado y aprobado Cálculo Diferencial e Integral.

Para el análisis de los datos se utilizó el análisis temático (Braun & Clarke, 2006), cuyo objetivo es identificar patrones de significados (temas) a través de un conjunto de datos proporcionados por las respuestas a la pregunta de investigación planteada. Este método se estructura en seis fases:

Fase 1. Familiarizarse con los datos. Se hizo una lectura general de las narrativas de todos los estudiantes una y otra vez, además de que se revisaron sus producciones escritas. Mientras se hizo esto se realizaron anotaciones de algunas observaciones iniciales.

Fase 2. Generar códigos iniciales. Con base a la acepción de conexiones matemáticas adoptada, se buscó en las narrativas frases donde se infirieran conexiones matemáticas que los alumnos hicieron entre conceptos, procedimientos, representaciones, etc.

Fase 3. Buscar temas. Se contrastaron los extractos asociados a cada código para buscar temas potenciales. Se crearon temas que agruparon los patrones respuestas de los estudiantes. Se asumió que cada tema y subtema es una conexión matemática.

Fase 4. Revisión de los temas. Los temas fueron discutidos con profesionales de la Matemática Educativa con experiencia previa en la investigación. Algunos sufrieron modificaciones, asimismo fueron agrupados de acuerdo con el concepto matemático al que estaban asociados. En esta fase se encontraron las relaciones entre las temas y subtemas, de tal forma que se establecieron los sistemas de conexiones matemáticas asociadas al TFC.

Fase 5. Definición y nombre de los temas. En sesiones de trabajo se asignó el título a cada conexión matemática y su respectiva redacción.

Fase 6. Elaboración del informe. Finalmente, se hizo el reporte final del estudio.

Resultados y discusión

El análisis temático permitió identificar 335 conexiones matemáticas asociadas a 23 temas, sin embargo, por limitaciones de espacio en la tabla 1 se presentan sólo las conexiones matemáticas asociadas a la primera parte del TFC. En García-García & Dolores-Flores (2017) se puede encontrar descritas las principales conexiones matemáticas que se detectaron en la resolución de tareas algebraicas.

Tabla 1. ***Conexiones matemáticas detectadas en estudiantes preuniversitarios***

Grupo	*Conexión matemática*		*Frecuencia*
Derivada o integral	1. La derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = ax^n$ es $f'(x) = anx^{n-1}$.		25
	2. La integral de una función polinomial de la forma $f(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$.		24
	3. La derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva.		11
		3.1 $f'(a)$ significa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$.	2
	4. La derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno.		11
	5. La constante de integración C …	5.1 … significa una familia de primitivas desplazadas verticalmente en el eje de las ordenadas.	10
		5.2 … siempre acompaña al resultado de una integral indefinida	4
	6. El diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función.		5
TFC	7. La derivada y la integral son operaciones inversas.		22
		7.1. La derivada de la integral de una función polinomial es igual a la misma función.	15
		7.2. La integral de la derivada de una función polinomial es la misma función.	12
	8. En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada.		14
Conceptos biológicos	9. En $\int r(t)dt = p(t) + C$ la constante de integración C significa población inicial de animales.		11
	10. Calcular la velocidad de crecimiento de una especie significa encontrar la derivada de la representación algebraica asociada a la población total.		14
	11. La integral de la función velocidad de crecimiento $r(t)$ de una población es la función población total.		12

	12. El resultado de $p'(2) = 20$ significa que en el segundo año la población aumentó 20 especies.	7
Conceptos físicos	13. La integral de la función aceleración de un objeto es su velocidad y la integral de la función velocidad es su posición.	15
	14. La derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración.	14
	15. La velocidad de un objeto en su punto máximo es cero.	13
	16. Encontrar una función primitiva de la posición de un objeto, dada una posición inicial, implica primero calcular una integral y segundo, resolver una ecuación lineal.	8
	17. El resultado de $s'(a) = 0$ significa que el objeto está en reposo en $t = a$.	6

La variabilidad en la frecuencia de las conexiones matemáticas detectadas indica que el nivel de comprensión que los estudiantes pueden lograr es diferente en cada caso. Por otra parte, los datos indican que, similar a las creencias, las conexiones matemáticas también están fuertemente relacionadas formando un sistema. De esta manera, hay una conexión central (Figura 1) relacionada con el concepto superior que es objeto de comprensión por el estudiante y que está determinado por las normas oficiales. Esta conexión central permea en la forma en que los estudiantes resuelven todas las tareas propuestas, además de que rige sus concepciones sobre la derivada y la integral. En García-García & Dolores-Flores (2017) se hicieron los primeros intentos de explicar este sistema de conexiones matemáticas.

Las conexiones matemáticas que los estudiantes establecieron están asociadas a los conceptos de función, derivada, integral, constante de integración, diferencial, al TFC, a los conceptos biológicos y a los conceptos físicos. De ellos, el concepto superior que es objeto de comprensión es el TFC porque relaciona matemáticamente a la derivada con la integral, además de que engloba a los otros conceptos y sirve de soporte para resolver los problemas de aplicación. Esto se observó durante la entrevista ya que los estudiantes en distintos momentos establecieron la conexión matemática "la derivada y la integral son operaciones inversas", que es en esencia, la primera parte del TFC.

Los datos indican que a partir de esta conexión central hay otras que son derivadas inmediatamente de ellas. A estas se les llamó conexiones derivadas de primer orden. La característica de estas es que están asociadas directamente a los dos conceptos centrales del Cálculo: la derivada y la integral que, en un nivel jerárquico, corresponden a un nivel de comprensión menor en comparación con el TFC. Pero, además, algunas de estas conexiones matemáticas permiten derivar otras, a las que se llamó conexiones derivadas de segundo orden. Por tanto, los datos indican que existe una cadena de conexiones que se derivan una de otras asociadas al nivel de comprensión que tiene cada estudiante. Un estudiante puede establecer esta cadena de conexiones, pero no siempre es logrado por todos.

Por otra parte, entre las conexiones matemáticas existe la relación lógica de implicación (Figura 1). Es implicación porque la existencia de una conexión matemática justifica la existencia de otra de la forma si A entonces B. Esta relación lógica permite distinguir las conexiones matemáticas de primer y segundo orden. El nivel de comprensión de los estudiantes y el sistema de creencias atribuido a uno de ellos determina en gran medida que esta relación lógica entre las conexiones matemáticas se manifieste en la tipología de conexiones que cada uno establece.

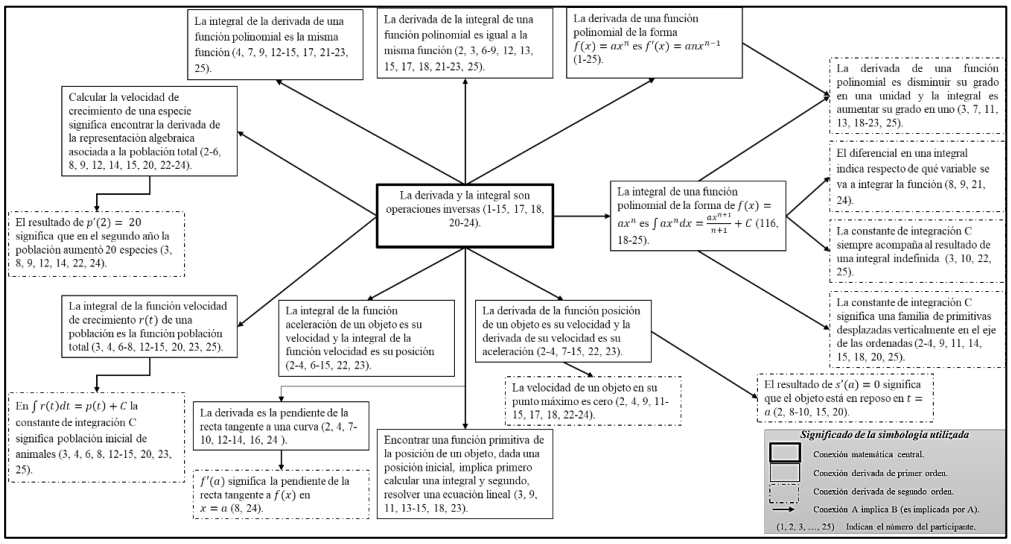


Figura 1. Sistema de conexiones matemáticas asociada a la primera parte del TFC.

A partir de la *figura 1* correspondiente al sistema de conexiones matemáticas asociadas a la primera parte del TFC, se puede plantear lo siguiente:

1. La conexión matemática central es "la derivada y la integral son operaciones inversas", porque encierra la comprensión de un concepto matemático superior, a saber, la reversibilidad entre dos conceptos claves del Cálculo: la derivada y la integral. A partir de ella, se derivan otras conexiones matemáticas verdaderas (en el sentido de Businskas, 2008) que contribuyen a reconocer esa relación de reversibilidad y que posibilitan la comprensión del TFC tanto en el contexto matemático como en el extramatemático.
2. Conexiones matemáticas como: "la integral de una función polinomial de la forma de $f(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$", "la derivada de la función posición de un objeto es su velocidad y la derivada de su velocidad es su aceleración", "la integral de la función velocidad de crecimiento $r(t)$ de una población es la función población total", entre otras son conexiones derivadas de primer orden. Todas ellas se ven posibilitadas por la conexión matemática central.
3. La conexión matemática "la integral de una función polinomial de la forma de $f(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$" permite que emerjan conexiones matemáticas como: "la derivada de una función polinomial es disminuir su grado en una unidad y la integral es aumentar su grado en uno",

"el diferencial en una integral indica respecto de qué variable se va a integrar la función", entre otras, todas ellas conexiones derivadas de segundo orden. Otras conexiones matemáticas también permiten la emergencia de esta tipología de conexiones (Figura 1).

Conclusiones

En la resolución de las tareas propuestas y en los argumentos verbales y gestuales utilizados por los estudiantes del preuniversitario se detectaron una variedad de conexiones matemáticas (Tabla 1). Las diversas conexiones matemáticas se organizan en torno al TFC formando un sistema, que reconoce la relación inversa entre la derivada y la integral (Figura 1). Estos resultados indican que estos estudiantes han logrado cierta comprensión sobre esta primera parte del TFC, aunque limitados por su sistema de creencias el nivel de comprensión que logran es diferente en cada uno. Finalmente, el estudio sobre las conexiones matemáticas en Cálculo promete resultados interesantes que pueden ser útiles a la investigación, pero también para el diseño de una intervención docente con miras a promover la habilidad de utilizar conexiones matemáticas en situaciones intramatemáticas y extramatemáticas.

Referencias bibliográficas

Braun, V, & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* Unpublished doctoral dissertation. Faculty of Education-Simon Fraser University. Canada.

Dolores, C. & García-García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Bolema, 31*(57), 158 – 180.

Drageset, O. G. (2010). The Interplay Between the Beliefs and the Knowledge of Mathematics Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, *12*(1), 30-49.

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 297-319.

Evitts, T. A. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula.* Unpublished PhD Thesis. The Pennsylvania State University. EE. UU.

García-García, J. & Dolores-Flores, C. (2017). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* DOI: 10.1080/0020739X.2017.1355994

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching.* New York: McGraw-Hill.

Kastberg S.E. (2002). *Understanding mathematical concepts: the case of the logarithmic function.* Unpublished PhD Thesis. University of Georgia. EE. UU.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 16(2),* 176-191.

Pehkonen, E. K. (1994). On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching. *Journal fûr Mathematic Didaktik,* 15 (3/4), 177–209.

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: conceptos y contextos.* México: CENGAGE Learning.

CONVERSIONES ENTRE LOS REGISTROS SIMBOLICO Y COLOQUIAL EN TÉRMINOS DE FUNCIONES SEMIÓTICAS

María Laura Distéfano, María Andrea Aznar, Marcel David Pochulu
Universidad Nacional de Mar del Plata, Universidad Nacional de Villa María. (Argentina)
mldistefano@fi.mdp.edu.ar, maznar@fi.mdp.edu.ar, marcelpochulu@hotmail.com

Resumen

En esta comunicación se presentan resultados provenientes de una investigación focalizada en describir el proceso de construcción de significado, por parte de estudiantes universitarios, de algunos símbolos matemáticos. Los lineamientos teóricos están dados por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y por la Teoría de Registros Semióticos. Se describen las conversiones entre los registros simbólico y coloquial en términos de funciones semióticas definidas para la investigación. Esta forma de análisis puso en evidencia la diferencia del grado de complejidad de las conversiones en los dos sentidos estudiados, y permitió explicar distintos tipos de errores cometidos por los estudiantes en esta actividad.

Palabras clave: símbolos matemáticos, conversiones, funciones semióticas

Abstract

This paper shows the outcomes from a research focused on describing the process of building meaning of some mathematical symbols by university students. The theoretical guidelines are based on the Onto-semiotic Approach (OSA) and by the Theory of Semiotic Registers. The conversions between symbolic and colloquial registers are described in terms of semiotic functions defined for research. This kind of analysis revealed the difference between the complexity degree of the conversions in both studied senses, and it allowed explaining different kinds of errors made by the students in this type of activity.

Keywords: mathematical symbols, conversions, semiotic functions

Introducción

La investigación que da origen a este reporte estuvo orientada a describir el proceso de construcción de significado, por parte de estudiantes universitarios, de algunos símbolos matemáticos. Dicha investigación centrada en las prácticas matemáticas que tienen lugar en el proceso de construcción de significado, abordando el estudio de aspectos sintácticos y semánticos, ligados a la lectura y escritura de expresiones simbólicas.

Los estudiantes que inician carreras universitarias que contienen matemática en sus planes de estudio, se enfrentan a la necesidad de leer y escribir utilizando símbolos matemáticos. En el marco de estas tareas, los estudiantes manifiestan numerosas dificultades. Entre las prácticas identificadas en la construcción de

significado de estos símbolos, se encuentran las transformaciones entre las expresiones simbólicas y sus correspondientes en el lenguaje coloquial o natural. En este reporte se estudian las prácticas matemáticas correspondientes a estas transformaciones combinando herramientas de dos enfoques teóricos.

Marco teórico

Los lineamientos teóricos de la investigación están dados por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), de Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2009), y por la Teoría de Registros Semióticos (TRS), de Duval (2004).
De entre los constructos definidos en el marco del EOS se consideraron el de *práctica matemática* (cualquier acción, expresión o manifestación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos), el de *significado* (sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas) y el de *función semiótica* (vinculación de una expresión con un contenido, que realiza un sujeto –persona o institución– de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia) (Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).

De la TRS se consideraron las actividades cognitivas definidas por Duval (2004, 2006): la *formación* de representaciones, los *tratamientos* y las *conversiones*.

La formación de representaciones en un registro de representación semiótica implica la selección de signos apropiados, dentro del conjunto de signos utilizados en dicho registro, y la posterior combinación de acuerdo a las reglas de conformidad. Los tratamientos y las conversiones están ligados a la transformación de las representaciones semióticas. En el caso de los tratamientos la transformación se efectúa dentro de un mismo registro mientras que, en las conversiones, la mencionada transformación se realiza entre distintos registros (Duval, 2004). Las conversiones resultan de un nivel de dificultad superior puesto que son transformaciones externas al registro de partida y con frecuencia no hay reglas regulen su ejecución o que las sistematicen. Sin embargo, resultan de vital importancia para el aprendizaje, ya que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, imprescindible para la conceptualización (Duval, 2006).

Antecedentes

Es posible encontrar numerosas publicaciones relativas a cuestiones simbólicas focalizadas en la educación primaria o secundaria, pero son escasos los antecedentes de estudios realizados en el nivel superior. Entre estos últimos se encuentran los trabajos de Camós y Rodríguez (2009) y de Colombano, Formica y Camós (2012), que exponen como problemática la escasa atención que los docentes dan al uso simultáneo del registro del lenguaje natural y del registro simbólico al enseñar los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad.

Focalizadas en experiencias de enseñanza para mejorar las habilidades en el registro simbólico-algebraico con estudiantes de nivel universitario, las publicaciones de Distéfano, Urquijo y González (2010) y de Lacués Apud (2011, 2014), reportan la evaluación de distintas intervenciones educativas para para favorecer el manejo de expresiones simbólicas, arribando a que el impacto de las mismas fue positivo y

concluyendo que es posible promover una mayor competencia en los estudiantes en la utilización de símbolos matemáticos.

Conjugando el estudio de significado de símbolos matemáticos a través funciones semióticas, Distéfano, Pochulu y Font (2015), analizan la complejidad cognitiva de distinto tipo de expresiones simbólicas, identificando categorías en los tipos de respuestas de los estudiantes ante tareas con esas expresiones simbólicas. También analizan, en términos de las funciones semióticas, algunos errores frecuentes que presentan los estudiantes vinculados a cuestiones simbólicas.

Por otra parte, los artículos de Pino-Fan, Guzmán, Duval, y Font (2015) y de Godino, Wihelmi, Blanco, Contreras, y Giacomone (2016) dan cuenta de la complementariedad entre las herramientas teórico-metodológicas proporcionadas por EOS y TRS. Estos autores observan que desde perspectiva de la TRS la actividad cognitiva de los sujetos se analiza sin realizar valoraciones desde un punto de vista matemático, mientras que con las herramientas del EOS se pueden analizar los objetos matemáticos que intervienen en los procesos de tratamiento y conversión.

Metodología

En el marco de la investigación realizada, se decidió focalizar el estudio sobre seis símbolos matemáticos, que son de uso frecuente en las materias de Matemática de los primeros cursos universitarios: $\in$, $\subset$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$ y $\exists$. Para indagar sobre el proceso de construcción de significado que los estudiantes realizan sobre estos símbolos, se determinaron las prácticas matemáticas que están ligadas a este proceso de significación (Distéfano, Aznar y Pochulu, 2016).

Las prácticas matemáticas, como componentes del significado, involucran asociaciones de objetos. Así, la práctica en la que se observa si un estudiante conoce el símbolo implica la asociación del grafismo del símbolo con el vocablo de la lengua natural que lo identifica. Las prácticas ligadas a la estructura formal de una expresión simbólica que emplea determinado símbolo, requiere la asociación del símbolo a la forma sintácticamente correcta de su uso. Las prácticas vinculadas con la comprensión del contenido semántico de una expresión simbólica implican, en un caso, poder asociar la proposición simbólica con su valor de verdad, y en el otro, asociar la expresión simbólica y la expresión coloquial equivalente. Esta última práctica corresponde a las conversiones entre representaciones realizadas en el registro simbólico-algebraico y el registro coloquial, y es la que se aborda en este trabajo.

Estas asociaciones pueden representarse a través de funciones semióticas, que vinculan los distintos objetos involucrados en las prácticas matemáticas descritas. Teniendo en cuenta los objetos involucrados en las prácticas matemáticas ligadas al proceso de construcción de significado de un símbolo, se definieron tres funciones semióticas a las que se consideró como *principales*, las cuales se describen en la Figura 1, a través de la definición de sus respectivos antecedentes y consecuentes.

Para analizar las conversiones de expresiones entre el lenguaje coloquial y el registro simbólico-algebraico, se definieron dos funciones semióticas, F_{cs} y F_{sc}, cuyos respectivos antecedentes y consecuentes se representan en la Figura 2. Obtener la expresión en lenguaje coloquial, a partir de una simbólica, involucra tanto una conversión como un tratamiento, dado que la respuesta final requiere

construir una oración que manifieste el sentido de la expresión, más allá de la traducción símbolo a símbolo que podría efectuarse con la conversión congruente de los símbolos uno a uno. Por lo tanto, se definió la función semiótica correspondiente al tratamiento, F_t, que también se representa en la Figura 2.

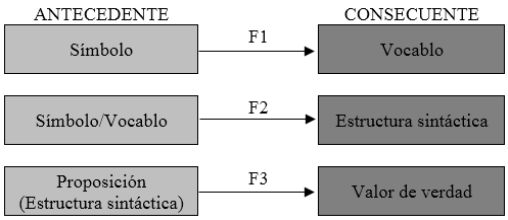


Figura 1. Funciones semióticas ligadas a la construcción de significado de un símbolo

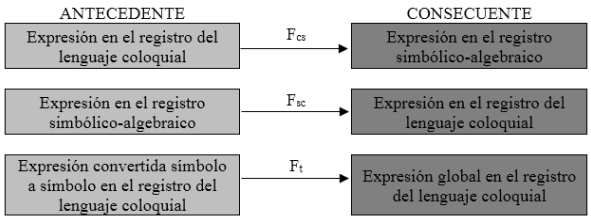


Figura 2. Funciones semióticas definidas para analizar las actividades cognitivas consideradas

Para el relevamiento de datos, se diseñó un instrumento que, a través de distintos tipos de tareas, evalúa las distintas prácticas matemáticas vinculadas a cada uno de los seis símbolos en estudio. Este instrumento fue administrado a 90 estudiantes de distintas carreras (Ingeniería, Profesorado en Matemática, Bioquímica y Licenciatura en Biología), de la Universidad Nacional de Mar de la Plata, Argentina. Entre las mencionadas tareas se encuentran las conversiones de expresiones del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa.

Descripción de las conversiones mediante funciones semióticas

Las funciones semióticas vinculadas a actividades cognitivas, relativas a representaciones en los registros coloquial y simbólico-algebraico, pueden ser expresadas o desagregadas en términos de las funciones F1 y F2, definidas anteriormente.

A modo de ejemplo se representan los esquemas de dos de las conversiones propuestas en el instrumento. En la Figura 3 se representa el esquema correspondiente a la conversión de la expresión $\exists x\ (x \epsilon Z\ \wedge x < 0)$, donde aparecen las funciones semióticas F1 que intervienen en la conversión F_{sc}, que da lugar a la primera parte de la transformación al registro coloquial (conversión SaS) y luego la función semiótica F_t, que permite obtener una expresión coloquial global, similar a la que se utilizaría en forma oral para comunicar la idea que está expresada en la forma simbólica. Las figuras ovaladas muestran los agrupamientos que se producen en los tratamientos dentro del registro coloquial.

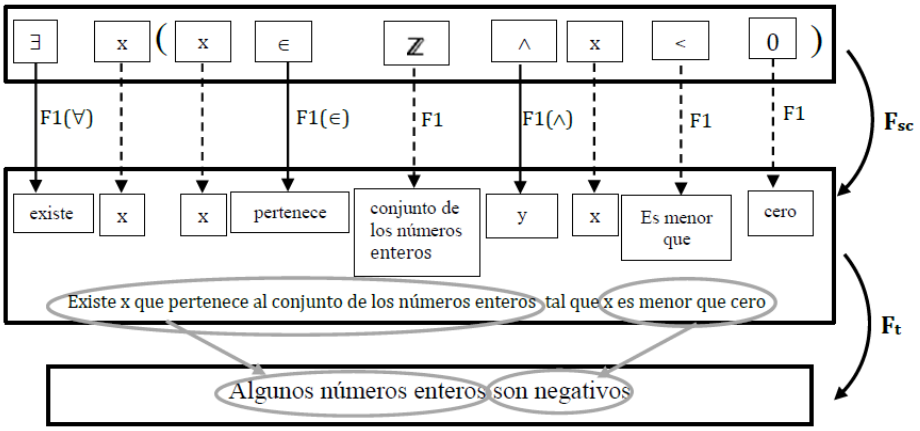


Figura 3. Representación de una conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial a través de funciones semióticas.

En el caso de las conversiones del registro coloquial al registro simbólico-algebraico intervienen las funciones semióticas F1, correspondientes a cada uno de los símbolos que forman parte de la expresión, y la función semiótica F2 (con preponderancia de la correspondiente al símbolo principal) para obtener una fórmula bien formada en el registro simbólico-algebraico. A modo de ejemplo, en la Figura 4 se representa la conversión de la expresión '*Cada número entero es menor que su sucesor'*. En la misma se observan las funciones semióticas F1 de los símbolos que intervienen y la función semiótica F2 correspondiente al cuantificador universal.

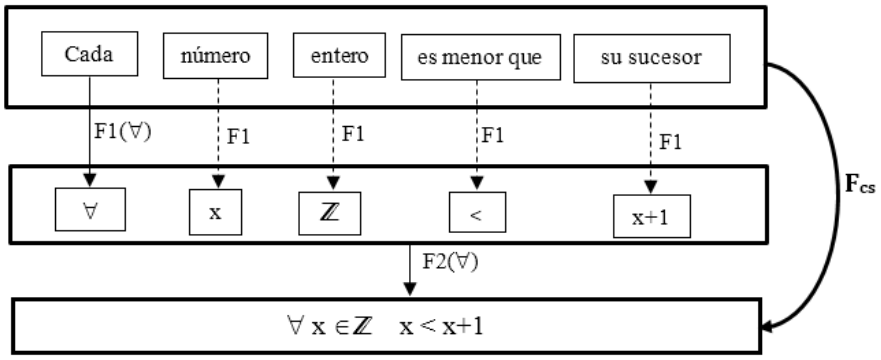


Figura 4. Representación de una conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico a través de funciones semióticas.

Este desagregado se pudo realizar para todas las conversiones propuestas en el instrumento. Esto permitió obtener esquemas generales que describen las conversiones entre el registro simbólico y el coloquial, en cada uno de sus sentidos. Dichos esquemas se presentan en las Figuras 5 y 6.

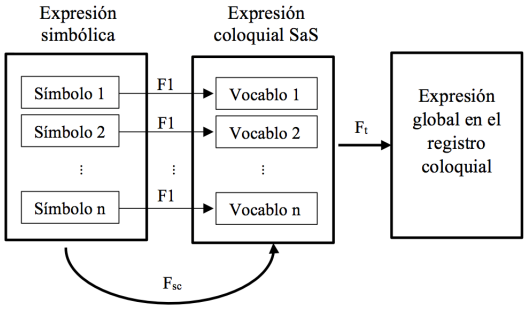


Figura 5. Conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial en términos de las funciones semióticas F1

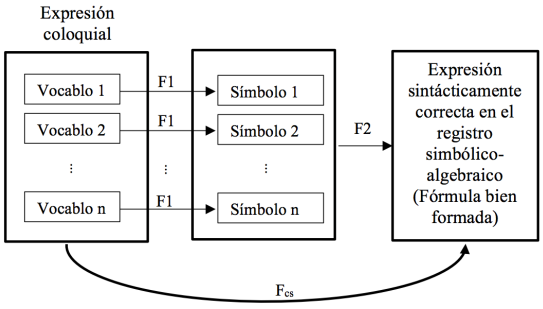


Figura 6. Conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico en términos de las funciones semióticas F1 y F2

En la Figura 5 se esquematiza la función F_{sc}, que interviene en la transformación de una expresión dada en el registro simbólico-algebraico a otra en el registro del lenguaje coloquial. En ella están involucradas las funciones semióticas F1correspondientes a cada uno de los símbolos que conforman la expresión, tanto las de los símbolos en estudio como las funciones semióticas –equivalentes a la F1– para otros símbolos que participen de la expresión. La conversión podría ser entendida como la composición de todas estas funciones F1, que producen vocablos en el lenguaje coloquial. Con esta transformación se obtiene una expresión a la que se denominó conversión *Símbolo a Símbolo* (SaS), produciendo una expresión que es una especie de decodificación de cada uno de los símbolos que participan de la expresión simbólica. Luego participa la función semiótica correspondiente al tratamiento, F_t, para obtener una oración que expresa la idea global en el lenguaje coloquial, tal como las que se utilizan en la lengua oral para comunicarse.

Análogamente, en la Figura 6 se representa el desagregado de la función semiótica F_{cs}, correspondiente a la transformación de una expresión en el registro coloquial al registro simbólico-algebraico. En la misma participan las funciones semióticas F1, para transformar los vocablos en símbolos, y la función F2 para obtener una expresión bien formada en el registro simbólico-algebraico (podría intervenir más de una función semiótica F2, correspondientes a distintos símbolos que forman parte de la expresión, como por ejemplo, en el caso de las expresiones cuantificadas).

Resultados

En el caso de las conversiones del registro simbólico-algebraico al coloquial, la mayoría de los estudiantes efectúa la transformación (en promedio entre el 85% y el 90%). Sin embargo la mayoría de estas transformaciones son efectuadas SaS, pues sólo un 15% de los estudiantes que efectúan la conversión aplican el tratamiento para obtener una expresión que refiera a la idea global representada simbólicamente. Puede observarse que con el establecimiento de la función semiótica *nominal* (F1) de cada uno de los símbolos involucrados en la expresión, sería suficiente para efectuar la conversión SaS, mientras que esto no parece garantizar la compresión del contenido semántico de la expresión.

En cuanto a las conversiones del registro coloquial al simbólico-algebraico, se registró que fueron efectuadas, en promedio, por aproximadamente el 62% de los estudiantes. Esta merma en el porcentaje de

éxito parece indicar que este sentido de conversión es el que resulta de mayor dificultad para los estudiantes. Esto podría deberse a que, en este sentido de conversión, la construcción de la expresión final requiere de la participación de función semiótica relativa a la sintaxis (F2), para obtener una expresión bien formada.

En el caso de las conversiones del registro simbólico al coloquial, los errores más observados están vinculados con la falta de establecimiento de la función semiótica F1 de algunos de los símbolos participantes, es decir que esos estudiantes manifiestan no conocer alguno de los símbolos participantes y no comprenden la idea general a la que se refiere la expresión simbólica. Por ejemplo, de entre las expresiones formuladas en el instrumento utilizado, al realizar la conversión de expresiones simbólicas del tipo $-2 < 0 \wedge -2 \in Z$ se observa que algunos estudiantes confunden la conjunción con la disyunción o bien los confunden con los símbolos de las operaciones de unión o de intersección entre conjuntos. Otro ejemplo, para efectuar la conversión de la expresión cuantificada $\exists x\ (x \epsilon Z \wedge x < 0)$ se observa que algunos estudiantes agregan un condicional 'si' que no corresponde para un cuantificador existencial: *'Si x es entero es menor a cero'*.

En las conversiones en el sentido inverso, es decir del registro coloquial al registro simbólico, los errores más frecuentes están vinculados a la sintaxis, es decir que estos estudiantes no logran obtener una expresión bien formada en el registro simbólico. Por ejemplo, al efectuar la conversión de la expresión '*3 y 5 son números naturales*', algunos estudiantes formulan expresiones simbólicas que son sintácticamente incorrectas como las siguientes: '$3 \wedge 5 \in N$' o '$\{3, 5\} \in N$'. Errores similares se observan en la conversión de la expresión '*4 es un número natural o entero*', para la cual realizan la conversión como si fuera congruente, generando la expresión simbólica que también es sintácticamente incorrecta: '$4 \in N \vee Z$'.

Conclusiones

En el este trabajo se describió a las conversiones entre los registros simbólico-algebraico y coloquial como la composición de funciones semióticas, lo cual establece una vinculación entre los dos marcos teóricos utilizados y permite explicar procesos que acontecen en un sujeto cuando opera con algunos símbolos.

Duval (2004) advierte que las conversiones entre los mismos registros, pero en sentidos inversos, no siempre poseen el mismo grado de dificultad. En la investigación que dio origen a este trabajo se ha observado que las conversiones que van del registro coloquial al simbólico-algebraico son las que presentan mayores dificultades para los estudiantes. Este mayor grado de complejidad podría ser explicado, en este caso, a través de las funciones semióticas que participan en cada una de las conversiones.

Las conversiones que tienen al registro simbólico-algebraico como registro de llegada requieren de la función semiótica correspondiente a la sintaxis (F2), la cual se manifiesta como establecida después que la función nominal (F1). Además, la representación simbólica obtenida en la conversión resulta, en general, no congruente con la representación coloquial, lo que le confiere un mayor grado de dificultad, según Duval (2004, 2006). En cambio, la conversión hacia el registro coloquial, particularmente si se realiza símbolo a símbolo, puede ser efectuada sólo con la decodificación de cada símbolo, aunque no garantiza la comprensión del contenido semántico de la expresión.

Referencias bibliográficas

Camós, C.; Rodríguez, M. (2009). *Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de Matemática superior.* Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VI CIBEM). Chile. Disponible en: http://ebookbrowse.com/articulo-camos-rodriguez-texto-completo-pdf-d36067393.

Colombano, V., Formica, A. y Camós, C. (2012). Enfoque cognitivista. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 115-152). Los Polvorines, Argentina: EDUVIM y Ediciones UNGS.

Distéfano, M., Aznar, M. y Pochulu, M. (2016). Prácticas matemáticas y funciones semióticas en la significación de representaciones simbólicas de la matemática superior. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 11(2), 1-16.

Distéfano, M.L.; Pochulu, M.; Font, V. (2015). Análisis de la Complejidad Cognitiva en la Lectura y Escritura de Expresiones Simbólicas Matemáticas. *REDIMAT- Journal of Research in Mathematics Education*, 4(3), 202-233. DOI: 10.4471/redimat.2015.1568.

Distéfano, M.L.; Urquijo, S., González, S. (2010). Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 23, 59-70.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103-131.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 91-110.

Lacués Apud, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac*, 55-56, 29-35.

Lacués Apud, E. (2014). Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo. *Bolema*, 28(48), 299-318.

Pino-Fan, R.; Guzmán, I.; Duval, R. y Font, V. (2015). The Theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. En K. Beswick, T. Muir y J. Wells. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-40). Hobart, Australia: PME Group.

PROCEDIMIENTOS LÓGICOS DE VALIDACIÓN Y CUANTIFICACIÓN EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Mónica Real, Alejandra Cañibano, Patricia Sastre Vázquez
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Facultad de Agronomía. Campus Azul), Pontificia Universidad Católica Argentina (Facultad de Química e Ingeniería. Campus Rosario), Instituto de Educación Superior N°2. Instituto de formación técnica superior N°19. (Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.com, monireal@gmail.com, mac@gmail.com, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen

El presente trabajo pretende determinar el grado de conocimiento intuitivo sobre el proceso lógico de cuantificación y validación que poseen estudiantes ingresantes a carreras de Ingeniería. Se realizó un trabajo de campo con estudiantes ingresantes a carreras de ingeniería, consistente en la propuesta de dos consignas. Ambas proponían la determinación y justificación de los razonamientos utilizados para la escogencia del valor de verdad de dos proposiciones, una cuantificada universalmente y la otra, existencialmente. Los resultados mostraron solo cierto grado de intuición, que si se direcciona adecuadamente puede ser un disparador para el desarrollo de procedimientos lógicos asociados a razonamientos.

Palabras clave: conocimiento lógico, proceso de cuantificación y validación

Abstract

The present work aims to determine the degree of intuitive knowledge about the logical process of quantification and validation that students who are newcomers to engineering degree courses have. A fieldwork was carried out with newcomers to engineering degrees courses, consisting of the proposal of two slogans. Both of them proposed the determination and justification of the reasoning used to choose the truth value of two propositions, one universally quantified, and the other existentially quantified. The outcomes showed only a certain degree of intuition, which if properly addressed, can be a trigger for the development of logical procedures associated to reasoning.

Key words: logical knowledge, process of quantification and validation

Introducción

El presente trabajo forma parte de un Proyecto de Investigación que se realiza de manera conjunta entre dos facultades de Argentina: Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), en Azul, provincia de Buenos Aires y la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica Argentina, Campus Rosario (PUCA), en Rosario, provincia de Santa

Fe. El objetivo de la investigación es identificar e interpretar los procedimientos lógicos y los cognitivos lingüísticos que utilizan estudiantes universitarios de Ingeniería.

Los procedimientos lógicos están íntimamente ligados al conocimiento de cuestiones esenciales de Lógica Simbólica. Toda proposición matemática está referida a algunos o a todos los elementos de un cierto universo. Esa referencia significa que la función proposicional que involucra la proposición puede estar cuantificada universal o existencialmente.

El objetivo de este trabajo es determinar el grado de conocimiento intuitivo acerca de los procedimientos lógicos de cuantificación y validación que poseen los estudiantes que ingresan a Carreras de Ingeniería.

Bell (1976) se propuso analizar los intentos de los estudiantes por construir demostraciones o elaborar explicaciones en situaciones matemáticas elementales y comparó la forma en que difieren de los usos de la demostración que realiza un matemático profesional. A la luz de este análisis, elaboró una clasificación de los tipos de respuestas que un estudiante puede arrojar, a través de una categorización que distingue entre: empíricas y deductivas. La primera se caracteriza por el uso de ejemplos como factor esencial para la certeza mientras que la segunda se caracteriza por la utilización de la deducción como elemento conector con las conclusiones.

El análisis de las respuestas de los estudiantes frente a procedimientos lógicos de validación se realizó a través de proposiciones elementales, que en su prueba no requerían procesos de abstracción muy complejos como una prueba formal. Para la escogencia de las proposiciones que se les entregó a los estudiantes, se siguió la línea del principio de la verdad (Johnson–Laird, 2001), que describe la tendencia del sujeto a representar los casos verdaderos más que los falsos.

Johnson – Laird (1983) diferencia tres tipos de representaciones mentales: proposiciones, imágenes y modelos mentales. Para este estudio interesa esencialmente lo concerniente a proposiciones. Para este investigador, una representación mental de tipo proposicional es una grafía que puede ser expresada verbalmente, ya que el entendimiento de una proposición tiene que ver directamente con el saber sobre cómo sería el mundo, si éste fuese verdadero. Las representaciones mentales se interpretan y evalúan a través de modelos mentales. Lo expresado precedentemente significa que la proposición será evaluada como verdadera si encaja en los modelos del mundo, reales o imaginarios, disponibles. Las imágenes son producto de la percepción o de la imaginación y representan aspectos perceptibles de los objetos del mundo real. Así mismo, en una tipología que califica de "informal", distingue entre modelos físicos, que son necesarios para comprender el mundo físico y modelos conceptuales, que representan cuestiones más abstractas.

Procesos de validación y funciones proposicionales cuantificadas

Los procesos de validación propios de la Ciencia Matemática están íntimamente ligados al conocimiento de cuestiones esenciales de Lógica Simbólica. Toda proposición matemática está referida a algunos o todos los elementos de un cierto universo. Esa referencia significa que la función proposicional que involucra la proposición puede estar cuantificada universal o existencialmente. En lo referente a esta investigación, las proposiciones que se presentan al estudiante son: una cuantificada universalmente y otra

existencialmente. Ambas son verdaderas. La primera, para ser validada, requiere que se compruebe para cada uno de los elementos del conjunto universal finito que es verdadera la función proposicional que caracteriza la propiedad que postula la proposición, mientras que si este universal es infinito (o finito imposible de ser contado físicamente) se requiere de la prueba abstracta sostenida en argumentaciones que genera una cadena lógica de proposiciones que permiten llegar a establecer y sostener la verdad postulada por la proposición.

Una función proposicional cuantificada existencialmente verdadera requiere para ser validada el encontrar tan solo un valor que haga verdadera a la misma, eso es suficiente para sostener la verdad, independientemente de que el universal sea infinito, finito posible de ser contado físicamente o finito imposible de ser contado físicamente.

Clasificación para las respuestas de los estudiantes

En la introducción, se comentó el análisis que Bell (1976) realiza al proponerse el análisis de los intentos por parte de los estudiantes a la hora de construir demostraciones. En este trabajo se considera solamente la categoría empírica para encuadrar las respuestas de los estudiantes y por otro lado se utiliza la categorización de respuestas adaptadas de Bell (1976) por D´Andrea, Curia & Lavalle (2012) y que se describe a continuación:

1. *Completa*: El estudiante encuentra y comprueba todos los casos requeridos que permiten probar la verdad de la proposición
2. *Visual Completa:* El estudiante encuentra y comprueba todos los casos requeridos que permiten probar la verdad de la proposición, pero lo hace desde la visualización.
3. *Incompleta:* El estudiante detecta la verdad de la proposición, aunque justifica tal verdad con argumentos inconsistentes.
4. *Inconexa*: El estudiante detecta la verdad de la proposición pero intenta justificar con argumentos erróneos.
5. *Inconsistente*: El estudiante detecta la verdad de la proposición sin justificar su decisión.
6. *Incapacidad:* El estudiante es incapaz de detectar la verdad de la proposición.
7. *Extrapolación:* El estudiante infiere la conclusión de un resultado general a partir de un subconjunto de datos suficientemente representativos.

Metodología

El análisis de las respuestas de los estudiantes frente a procesos de validación básicos se realizó a través de proposiciones elementales, que en su prueba no requerían procesos de abstracción muy complejos como una prueba formal. Siguiendo la línea del principio de la verdad (Johnson–Laird, 2001), que describe la tendencia del sujeto a representar los casos verdaderos más que los falsos, se escogió proponer determinar el valor de verdad de dos funciones proposicionales, una cuantificada universalmente y otra existencialmente, ambas verdaderas. La idea central fue analizar cómo el estudiante que ingresa a

ingeniería responde frente a dos casos emblemáticos y diametralmente opuestos en cuanto a proceso de validación se refiere.

El trabajo de campo se realizó en el primer mes de clases a través de un llamado voluntario. El único requisito requerido fue que el estudiante tuviera aprobado el curso de ingreso. Se presentaron 97 estudiantes en total. Se le entregó la consigna con una hoja adicional con las definiciones y propiedades de valor absoluto y el detalle de significados de signos y símbolos. Todo esto, con el objetivo de evitar que el estudiante se distrajera a la hora de resolver los ejercicios con recuerdos de estructuras conceptuales que pudieran requerirse para la realización de estos ejercicios. El interés central era estudiar el razonamiento de los mismos y evitar la distracción del estudiante de su pensamiento en cuestiones conceptuales y del conocimiento de símbolos. La consigna consistió en lo siguiente:

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, indicando luego de la escogencia de tal valor, que razonamientos se siguen para tal elección.

$$1.\ \forall x \epsilon A: x + 1 > x, A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$2.\ \exists x \in R / \exists y \in R / x^2 = y^2 \ \wedge x \neq y$$

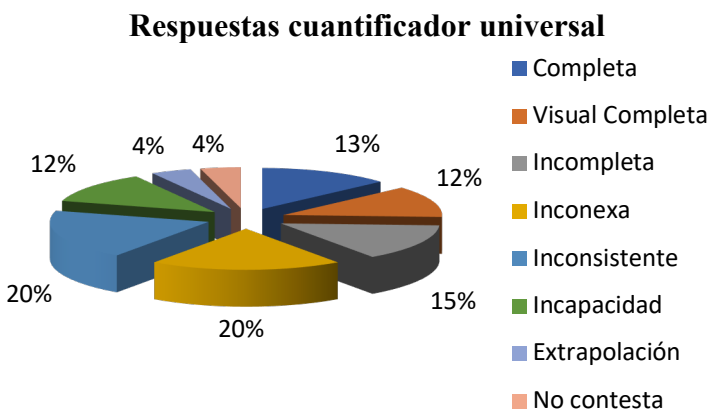
Resultados

Ejercicio 1

La idea de este ejercicio es ver cómo intuitivamente el estudiante procede cuando se encuentra con una función proposicional cuantificada universalmente verdadera pero con un universal finito, posible de ser contado físicamente. Primero ver cómo evalúa su valor de verdad, y luego cómo valida a la misma. Lo esperado de los estudiantes en este caso es un chequeo "elemento por elemento" del conjunto en la proposición, hasta una "*visual proof*" (Hanna, 1995). Esto último consistió en la generación, por parte del estudiante, de una prueba visual, es decir, en la recta real, el estudiante podía ver que para los positivos o negativos, cualquier número aumentado en una unidad supera a ese número. Hoy día, es aceptado naturalmente el uso de la visualización como parte de una prueba.

En el análisis que se detalla a continuación en la Tabla 1, el tipo de razonamiento seguido incluye el tipo de respuesta expresada por el estudiante.

Tabla 1: *Resultados respuestas a ejercicio 1*

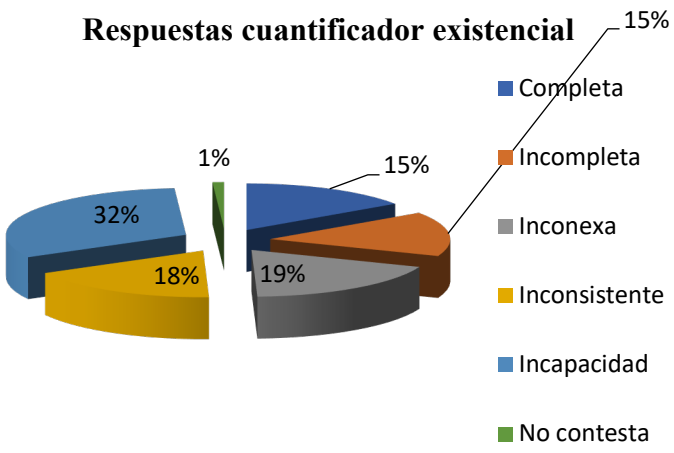
Tipo de Respuesta	Número de Estudiantes	Porcentajes
Completa	13	
Visual Completa	12	
Incompleta	14	
Inconexa	19	
Inconsistente	19	
Incapacidad	12	
Extrapolación	4	
No contesta	4	

Se observa claramente que casi la mitad de los estudiantes pudieron detectar la verdad de la función proposicional cuantificada existencialmente, pero, o no pueden sostener tal verdad, o lo hacen erróneamente. Una cuarta parte de esta muestra puede probarlo, aproximadamente, la mitad de éstos lo hacen chequeando elemento por elemento, y la otra mitad visualmente, mientras que un ínfimo porcentaje de esta cuarta parte puede extrapolar la verdad desde un caso general válido para todos los reales hacia un subconjunto del mismo. Es claro que los estudiantes desde la intuición pueden llegar a establecer la verdad de una proposición, ya que es pequeño el porcentaje del que no puede detectarla. Pero los que la detectan no pueden usualmente sostenerla.

Ejercicio 2: La idea de este ejercicio fue observar como intuitivamente el estudiante procede cuando se encuentra con una proposición verdadera cuantificada existencialmente. Primero se analizó cómo evaluaba su valor de verdad y luego cómo validaba la proposición. Si bien el estudiante al momento de realizar este ejercicio desconocía cuestiones de Lógica Simbólica, se apela a la noción de recuento discreto, que le permite una noción implícita de cuantificación y que se desarrolla entre los estadios del final del período preoperacional y el comienzo de las operaciones concretas (Piaget,1981).

Debe destacarse que en el análisis que se detalla a continuación en la Tabla 2, el tipo de razonamiento seguido incluye el tipo de respuesta expresada por el estudiante.

Tabla 2: *Resultados respuestas a ejercicio 2*

Tipo de Respuesta	Número de estudiantes	Porcentajes
Completa	15	
Incompleta	15	
Inconexa	18	
Inconsistente	17	
Incapacidad	31	
No contesta	1	

Se observa que en su mayoría los estudiantes no pudieron evaluar el valor de verdad de la función proposicional cuantificada existencialmente, confundiendo en muchos casos con el universal y en otros, evaluando correctamente la función proposicional pero sin mediar una justificación o la elaboración de una conclusión. Los estudiantes de esta muestra conocen el símbolo mostrado, simplemente como un símbolo más, pero no necesariamente este conocimiento implica que la lectura del mismo es meditativa y atenta, lo que influye notablemente a la hora de la prueba.

Conclusiones

Se puede pensar que cuando se le propone un problema matemático a un estudiante, éste pone en juego sus modelos mentales para resolverlo. Estos modelos, en algunos casos, posibilitan el descubrimiento de mayor cantidad de relaciones pero insumen mucha energía y tienen un límite, a la hora de la generalización. Particularmente, en las propuestas que se le realizaron a los estudiantes escogidos para la parte experimental de este trabajo, ellos acudieron a un modelo mental recurrente en estos casos (Balacheff, 2000) validando una proposición a través de una verificación para algunos casos particulares pero sin un criterio formado al hacerlo, como "tanteando" y esto para ellos es suficiente para establecer la verdad de una proposición matemática. Los estudiantes, por lo general, entienden qué se espera de ellos cuando se les pide una demostración y reconocen que la verificación es insuficiente como demostración. Sin embargo, tienden a recurrir a la misma como mecanismo de prueba cuando encuentran dificultades. Esto probablemente está asociado al hecho de que en la vida y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba estándar, enfrentándose los estudiantes a un problema epistemológico no menor. (D´Andrea et al, 2012).

Sin embargo, en casos concretos de validación como los presentados, el desconocimiento del lenguaje matemático, manifestado en una lectura inapropiada de los símbolos, más allá de la hoja que se entregó a cada estudiante, no es garantía para el conocimiento del símbolo y su funcionamiento y alcance dentro de la estructura proposicional en que se encontraba inserto.

Es claro también que se está apelando a la intuición del estudiante, pero con esa intuición no basta, porque además se necesita que este tenga claridad en distinguir que es lo que propugna un cuantificador existencial y uno universal. Esta falta de claridad radica en el desconocimiento del lenguaje matemático, lenguaje que en el ciclo medio se limita esencialmente a que el estudiante realice ejercicios de aplicación de algoritmos y que según opinión textual de ellos, Matemática es sinónimo de "sentarse a hacer ejercicios".

De acuerdo con lo postulado por Johnson – Laird (1983), los estudiantes que pudieron evaluar adecuadamente el valor de verdad de las proposiciones que se le entregaron como consignas, lo hicieron porque el mundo concreto de su universo matemático encajó con la realidad percibida de la proposición. Esta percepción no pudo ir más allá de la determinación de ese valor de verdad en la mayoría de los casos, ya que no pudieron extrapolar la percepción hacia la barrera de la justificación, con lo cual la comprensión de la proposición se presume que fue parcial en cada caso.

Atento a los estudios de investigaciones anteriores, nuestro trabajo de investigación concluye que los estudiantes ingresantes a carreras de ingeniería vienen con un bagaje básico y podría presumirse que por debajo de lo que podría considerarse básico y elemental en cuánto a conocimientos de lógica matemática y casi nulos en el caso de su simbología. Esto involucra también todo lo referente al lenguaje matemático y su epistemología, ya que ambos están íntimamente ligados. Esto es un obstáculo que se evidencia en los resultados de nuestra investigación y al que se le agregan los modos intuitivos de proceder que son compatibles con el escaso desarrollo acerca del conocimiento adquirido del lenguaje lógico matemático en la escuela media ya mencionado. Los estudiantes ingresantes a la Universidad manifiestan que para ellos Matemática, y esta es una opinión textual, es 'sentarse a hacer ejercicios'. Esto ya ha sido expuesto párrafos atrás.

Para ellos, hacer estos ejercicios, es un trabajo compulsivo sin reflexión, y esto queda manifestado cuando al estudiante ingresante a la universidad se le pide justificar, explicar o argumentar razones de porque eligen tal o cual método; porque deciden si una proposición es verdadera o falsa. ¿Por qué el estudiante actúa de este modo?;¿Por qué tienen esta imagen de que Matemática es 'sentarse a hacer ejercicios'?;¿Quiénes son responsables de estas acciones?

El estudiante del ciclo medio recibe una formación e ideas que imita, porque es una tendencia de este que está en una edad donde busca modelos y en la generalidad no es creativo, reproduce. Es importante una cuestión clave en esta reflexión, y es la formación del profesorado. Es el docente en clase quien tiene que intentar anclar ciertas ideas y estructuras conceptuales claves en el estudiante en una franja de edad impresionable y que tiene una amplificación de por vida y una extrapolación futura hacia la vida académica, si la lleva a cabo y laboral tanto en este último caso como si no lo hace.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23-40.

D´Andrea, R.E., Curia, L., Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios*. Alemania: Editorial Académica Española.

Johnson – Laird, P.N. (2001). Mental models and deduction. Trends in Cognitive Science, 5, 435 – 442.

Johnson – Laird, P.N. (1983). Mental models. Cambridge. M.A.: Harvard University Press.
Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of mathematics*, *15*(3), 42 – 49.

Piaget, J. (1981). La teoría de Piaget. Infancia y Aprendizaje, *Monografía.* (2), 13 – 54.

EL PROCESO LÓGICO DE VERIFICACIÓN DE HIPÓTESIS EN EL ESQUEMA ARGUMENTATIVO DE LA DEMOSTRACIÓN

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Mónica Real, Alejandra Cañibano, Patricia Sastre Vázquez
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Facultad de Agronomía. Campus Azul), Pontificia Universidad Católica Argentina (Facultad de Química e Ingeniería. Campus Rosario), Instituto de Educación Superior N°2. Instituto de formación técnica superior N°19. (Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.com, monireal@gmail.com, mac@gmail.com, pasava2001@yahoo.com.ar

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar cómo el estudiante universitario utiliza las hipótesis de una proposición verdadera en el proceso de verificación y en el de demostración. Se analizaron las producciones de un grupo de estudiantes universitarios, a quiénes se les propuso la verificación y demostración de dos teoremas. En el esquema argumentativo de la demostración, los estudiantes al momento de utilizar teoremas ya establecidos omiten el chequeo de hipótesis necesarias para su aplicación, procediendo de forma similar en el proceso de verificación, observándose que proponen un ejemplo que satisface la tesis sin efectuar la comprobación de hipótesis.

Palabras clave: conocimiento lógico, verificación de hipótesis

Abstract

The objective of this paper is to analyze how the university student uses the hypotheses of a true proposition in verification and demonstration processes. We analyzed the performances of a group of university students, who were asked to verify and demonstrate two theorems. In the argumentative scheme of the demonstration, students, when using established theorems, omit the verification of the hypotheses needed for the application of the theorems, proceeding in a similar way in the verification process, what let us observe that they propose an example that satisfies the thesis without making the hypothesis testing.

Keywords: logical knowledge, verification of hypotheses

Introducción

El estudiante universitario de ingeniería requiere en su currículum, matemática como una herramienta que debe permitirle desarrollar por un lado el pensamiento lógico y por otro, capacidad heurística sustentada en un contenido teórico. La demostración está implícita en cualquier curso universitario de matemática. De hecho, esto lleva a que el estudiante usualmente deba reproducirlas en los exámenes como uno de los requisitos para la acreditación del curso. Esta reproducción es en general de tipo ritual, pero esto puede evitarse generando un aprendizaje constructivo de la demostración. Aprender a demostrar no es un contenido cualquiera, es una destreza que es propia de un matemático profesional y que tiene poco sentido

exigirle a un estudiante inicial. Es esperable la comprensión, interpretación y explicación de las mismas. La importancia de las hipótesis de una proposición a demostrar y su intervención en las diferentes partes que hacen a la cadena argumentativa de la prueba es trascendente para su comprensión. Cuando los estudiantes no pueden comprenderlas, se apropian de ellas como pueden y reproducen una versión de la prueba compulsiva y memorizada.

De forma muy adecuada, Perry, Samper, Camargo, Echeverry & Molina (2008), manifiestan este hecho referenciando al acto de aprender a demostrar cómo el acto participativo que tienen los estudiantes que realizan cierto curso de matemática y la actividad demostrativa implícita en el mismo. D´Andrea, Curia & Lavalle (2012) proponen una ingeniería didáctica que busca atenuar el problema del estudiante de Ciencias Naturales e Ingeniería frente a la demostración matemática. En esta ingeniería impera la idea de que la demostración de una proposición verdadera no garantiza de forma absoluta la comprensión de la misma, sosteniéndose esencialmente en las tres facetas del lenguaje matemático: coloquial, visual y simbólico. Proponen una serie de estrategias didácticas que se traducen en una secuencia de tareas a los efectos de generar un aprendizaje comprensivo; significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico que pueda ser extrapolado a otras disciplinas específicas. La secuencia de tareas le confiere un papel preponderante al proceso de verificación en el contexto de la tarea de validar una proposición verdadera o teorema a demostrar. Luego de presentarse la proposición a demostrar, la secuencia de tareas consiste en la interpretación coloquial, verificación, visualización (que puede ser su interpretación geométrica) y finalmente la simbolización de la proposición a demostrar. Estos escalones deben ser desarrollados previos a la prueba con el objeto de facilitar la comprensión de la proposición, ya que no tiene sentido un trabajo argumentativo sin la debida comprensión del significado de lo que se quiere probar. El proceso de prueba es inducido a través de la denominada "*Guía Secuenciada*" que consiste en un instructivo general para que el estudiante pueda llevar a cabo la secuencia argumentativa razonando sin apelar a la memoria y la repetición. El proceso lógico de verificación es la primera instancia que el estudiante universitario aborda como una instancia anterior a la protoargumentación, pero lo hace sin ser consciente de ello. Según Balacheff (2000) a esta postura se la denomina empirismo ingenuo. Esta acción procede simplemente desde la intuición y al momento de realizar una verificación, el estudiante universitario de Ingeniería realmente no sabe cómo proceder. Lo hace buscando ejemplos aleatorios 'que funcionen', sin criterio. Lo precedentemente descripto denota dos cuestiones epistemológicas importantes. Por un lado, la confusión del estudiante frente a las acciones de demostrar y verificar. Por otro lado, el desempeño en la actividad de realizar verificaciones, que no es llevada a cabo adecuadamente sino a través de un 'tanteo', pero sin un sostén apropiado y un conocimiento consistente de lo que se está realizando. ¿Será conocida la palabra verificación por el estudiante? Y en tal caso, ¿Se comprenderá la palabra en el contexto epistemológico de la Ciencia Matemática, por lo menos de forma primitiva? "*Verificar una proposición matemática verdadera es exhibir un ejemplo que compruebe para ese caso particular que la proposición se cumple*". (D´Andrea et al, 2012).

Un test piloto realizado en un grupo de ingresantes a Ingeniería, corrobora este desconocimiento. Se le propuso al grupo mencionado que en una tabla de doble entrada vincularan la significación de una serie de términos que hacen a la epistemología de la Ciencia Matemática. Resultó notable que la palabra ejemplo, de un uso tan cotidiano y habitual, fuera solamente reconocida en un 50% aproximadamente de la muestra analizada. (Sastre Vázquez & D´Andrea, 2011)

La supresión de desarrollos teóricos en el ciclo medio ha limitado la cursada en este estadio, a la realización de una práctica consistente en ejercicios donde la única dificultad que poseen es la aplicación de un algoritmo concreto, sin que medie la reflexión y la justificación de los procedimientos. Esto lleva a que el proceso de maduración intelectual, se retrase, de modo que el ingresante universitario, se encuentra con un universo diferente al del ciclo medio. Los cursos universitarios de Matemática requieren del sustento de la teoría para realizar la práctica, hábito no desarrollado en el ciclo medio, donde según expresión textual del estudiante: 'Matemática es sentarse a hacer ejercicios'. Esta praxis, tan alejada del método matemático, persiste en la estructura mental del estudiante, aún al ingresar a la Universidad y luego de un tiempo de estancia en esta e inclusive luego de recibir instrucción sobre la forma adecuada de trabajo en Matemática, predominando así un conocimiento ingenuo (Perkins, 1995). Esta actitud puede ser debida a que, aún cuando pueda parecer que los estudiantes conocen la prueba de una proposición matemática verdadera no axiomática, siguen sintiendo la necesidad de una verificación. (Vinner, 1983).

Healy y Hoyles (2000) sostienen que los estudiantes necesitan realizar ensayos de verificación – inclusive después de realizada la demostración – porque precisamente, la demostración no los convence y la exhibición de ejemplos les refuerza la idea conceptual propugnada por la proposición demostrada. Más allá del hecho de que una prueba formal confiere validez general a un enunciado matemático, para confirmar esa validez, necesitan de controles posteriores (Fishbein, 1982). La elección adecuada de ejemplos es una tarea que requiere reflexión y su práctica cotidiana contribuye a la construcción del razonamiento del estudiante. Wason y Mason (2005) establecen como definición de ejemplo, a un procedimiento a partir del cual el estudiante podría establecer una generalización y definen al proceso de ejemplificación, como la representación de una categoría genérica con la que el estudiante necesita entrar en contacto para extraer un caso particular. Lo que se postula a través de estas aproximaciones es precisamente establecer que el uso de ejemplos ayuda al estudiante a la generalización. Esta, permite la abstracción de situaciones concretas, constituyéndose en el puente para la construcción de argumentaciones. La elección adecuada de ejemplos y contraejemplos y la guía del docente en tal búsqueda en las instancias iniciales, constituiría un disparador para la producción de demostraciones. Lo postulado hasta el momento hace referencia a la verificación como un proceso de exhibición de ejemplos simples que hagan verdadera a la proposición para ese caso particular, que es el ejemplo propuesto. Particularmente nos proponemos en este trabajo indagar sobre el proceso lógico de verificación de hipótesis.

El objetivo de este trabajo es analizar cómo el estudiante universitario utiliza las hipótesis de una proposición verdadera en el proceso de verificación y en el proceso de demostración.

La cuestión se enfoca específicamente a la siguiente situación: Una proposición que tiene la estructura lógica de implicación o condicional y su antecedente, que constituye la hipótesis de la proposición posee varias condiciones o proposiciones conectadas a través de una conjunción, y se requiere para el establecimiento de su validez que el antecedente sea verdadero para la concreción de la verdad de la tesis. De manera entonces que el problema de verificación de hipótesis es un problema mayor que trasciende la acción de verificar como la exhibición de un ejemplo que 'encaje' como caso particular de una cierta proposición.

Consideremos a continuación los dos teoremas siguientes:

Teorema del valor intermedio de las funciones continuas: f una función continua en $[a, b]$ y sean $x_1, x_2 \in (a, b)/x_1 < x_2\, y f(x_1) \neq f(x_2)$ y considérese un valor $k/f(x_1) < k < f(x_2) \Rightarrow \exists c \in (a, b)/f(c) = k$

Verificar el teorema en cuestión, equivale a exhibir como ejemplo, una función continua en un cierto intervalo cerrado y encontrar dentro de este intervalo un par de valores tales que satisfagan lo siguiente: los valores deben estar en la relación de menor estricto y las imágenes de la función escogida en estos valores deben ser distintas y debe escogerse un valor arbitrario k de la imagen que oscile entre los dos valores de imagen diferentes. Bajo estas condiciones es posible verificar la tesis de manera inmediata, pero todas las hipótesis (condiciones) expuestas deben cumplirse inexorablemente. Esta cuestión también se requiere para el proceso de prueba, ya que la función auxiliar que se propone para concretar tal proceso requiere del cumplimiento de todas las hipótesis descriptas para poder aplicarle el teorema de Bolzano, lo que permite en tal caso, la concreción de la tesis. Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Teorema de Lagrange:
f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces ∃ c ∈ $(a, b)/f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.

Las hipótesis a satisfacerse en este teorema no son tantas como en el teorema del valor intermedio de las funciones continuas, pero necesarias que se cumplan para el establecimiento concreto de la tesis.

Experimentación

La parte experimental de este trabajo se realizó durante dos momentos diferentes de un curso anual de Cálculo I, es decir, un curso de Cálculo en una variable. El primer momento se ubica en la unidad didáctica correspondiente a Límite y Continuidad y el segundo se ubica en la unidad didáctica correspondiente a las Aplicaciones del Cálculo Diferencial. Se les pidió a los estudiantes que primero verificaran y luego demostraran dos teoremas clásicos del Cálculo. La escogencia no fue al azar. La prueba puede llevarse a cabo de una manera simple por el estudiante que habiendo llegado a esos contenidos tiene cierto entrenamiento

Mientras se desarrollaba la unidad didáctica de Límite y continuidad, el teorema del valor intermedio de las funciones continuas y mientras se desarrollaba la unidad didáctica de Aplicaciones del Cálculo Diferencial, el teorema de Lagrange o valor medio del Cálculo Diferencial. La idea de pedirles a los estudiantes que verificaran y que luego demostraran fue para comparar el proceso de comprobación de hipótesis en diferentes contextos: uno concreto como es el proceso lógico de verificación y otro abstracto como es el proceso de prueba. La muestra analizada fue de 92 estudiantes ingresantes realizando un curso anual de Cálculo en una variable. Los trabajos analizados fueron producciones realizadas por los estudiantes en clase, de manera que no hubo una convocatoria para la realización del trabajo. Se les hizo la propuesta en clase y se recogieron las producciones pidiéndoles a los estudiantes que con sus dispositivos móviles les tomasen una instantánea a sus trabajos, de modo de poder cotejar su trabajo con la exposición posterior del profesor en el pizarrón, además de tener bien presente lo realizado para intervenir en el debate que se generó a partir de la resolución colectiva en clase. La categorización para las respuestas fue la siguiente:

Para el ítem a. de verificación:

Completa: El estudiante realizó la verificación partiendo de la hipótesis y verificando todos los supuestos necesarios en el ejemplo propuesto de forma que este satisfaga la tesis.

Incompleta o parcial: El estudiante realizó la verificación partiendo de la hipótesis y verificando algunos de los supuestos necesarios en el ejemplo propuesto.

Sobre la tesis: El estudiante realizó la verificación aplicando el resultado de la tesis sobre el ejemplo propuesto sin realizar la verificación de hipótesis.

Inconsistente: El estudiante presenta el ejemplo pero sin realizar el proceso de verificación.

Nula: El estudiante no realiza el proceso de verificación ni presenta ejemplo.

Para el ítem b. de prueba:

Prueba completa: El estudiante realiza la prueba, arribando a la tesis por aplicación del teorema indicado en la guía secuenciada previa verificación de las hipótesis del teorema a aplicar sobre la función auxiliar propuesta que permite alcanzar la meta.

Prueba incompleta sin verificación de hipótesis: El estudiante realiza la prueba, aplicándole el teorema indicado en la guía secuenciada sin la verificación de las hipótesis del teorema a aplicar sobre la función auxiliar propuesta que permite alcanzar la meta.

Prueba incompleta con verificación parcial de hipótesis: El estudiante realiza la prueba, aplicándole el teorema indicado en la guía secuenciada con una verificación parcial de las hipótesis del teorema a aplicar sobre la función auxiliar propuesta que permite alcanzar la meta.

Empirismo ingenuo – clasificación extraída de Ballacheff (2000) –: El estudiante se limita a exhibir un ejemplo aleatorio, sin chequeo de hipótesis, considerando esta acción como mecanismo de prueba.

Nula: El estudiante no realiza el proceso de prueba.

Las consignas de los dos ejercicios se detallan a continuación:

Ejercicio 1:

Considerar el Teorema del valor intermedio de las funciones continuas. Se pide: a. Verificarlo. b. Probarlo. Sugerencias para la prueba: Considerar la función auxiliar $g(x) = f(x) - k$ y aplicarle el teorema de Bolzano previa verificación de las hipótesis.

Ejercicio 2:

Considerar el Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Teorema de Lagrange. Se pide: a. Verificarlo. b. Probarlo. Sugerencias para la prueba: Considerar la función auxiliar $h(x) =$

$f(x)(b-a)-x.[f(b)-f(a)]$ y aplicarle el teorema de Rolle en el intervalo del dominio de la función planteada por la hipótesis, previa verificación de las hipótesis de Rolle.

Resultados

Tabla 1: *Resultados respuestas a ejercicio 1.a*

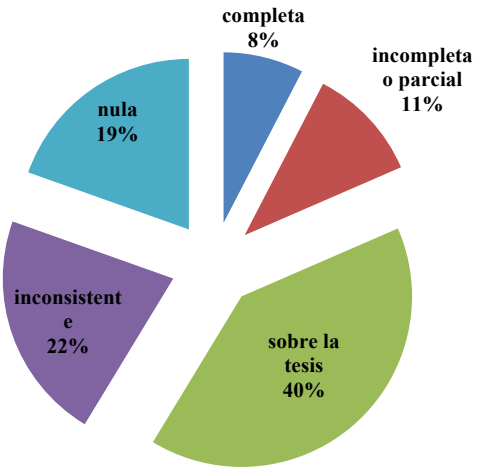
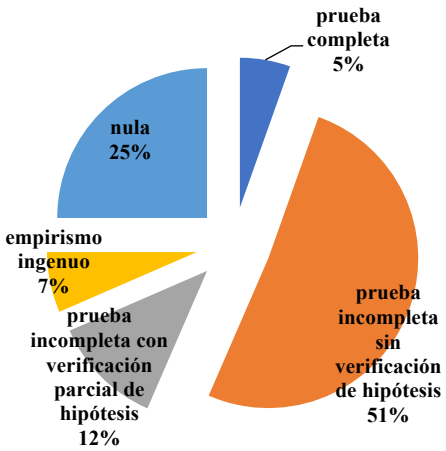
Tipo de Respuesta	Número de Estudiantes	Porcentajes
completa	7	
Incompleta o parcial	10	
Sobre la tesis	37	
inconsistente	20	
Nula	18	

Tabla 2: *Resultados respuestas a ejercicio 1. b*

Tipo de Respuesta	Número de Estudiantes	Porcentajes
Prueba completa	7	
Prueba incompleta sin verificación de hipótesis	47	
Prueba incompleta con verificación parcial de hipótesis	11	
Empirismo ingenuo	6	
nula	23	

Observación: Por razones de espacio no se incluyen los resultados del ejercicio 2, siendo los porcentajes obtenidos bastante similares a los del ejercicio 1.

Conclusiones

El procedimiento llevado a cabo por el estudiante, en general, fue el que se describe a continuación con uno de los dos teoremas propuestos. Consideremos el ejercicio 1: Con el teorema de Lagrange, en general (obsérvense los resultados obtenidos) el estudiante cuando lo verifica, propone un ejemplo, aplica el teorema al ejemplo pero lo hace sin comprobar previamente las hipótesis que se requieren para que se cumpla la tesis. En el proceso de prueba, debe aplicar el Teorema de Rolle a una función auxiliar para poder llegar a establecer el resultado de Lagrange. Aplica el resultado de Rolle directamente a la función auxiliar, pero sin chequear las hipótesis que son las que posibilitan la concreción de su tesis. Este tipo de respuesta es la que predominó en las producciones de la muestra de estudiantes analizada. Aproximadamente un 15% de los estudiantes realizaron las acciones esperadas tanto para la verificación como para la demostración. Muy pocos casos solo realizaron la comprobación de hipótesis para la verificación y no para la prueba. En el caso último ocurrió o porque no realizaron la prueba o al realizarla, obviaron la comprobación de hipótesis.

En general, el estudiante opera como si no comprendiera que la tesis de un teorema se concreta bajo ciertas hipótesis. Va al resultado, sin importarle las condiciones bajo las cuales se produce ese resultado. El estudiante tiene fuertes creencias sobre una Ciencia Matemática que consiste según su propio lenguaje 'en hacer ejercicios' en el peor de los casos; y en el mejor, que permite resolver problemas que tienen que ver con la cotidianeidad, pero sea como sea, su epistemología es algo muy lejano y hasta inexistente. La verificación resulta un método usual de la vida cotidiana y las ciencias fácticas, y probablemente la actitud esté asociada a este hecho. Se presume que el proceso de verificación de hipótesis pueda ser ignorado por lo enunciado, ya que, por ser un método usual, este se limita a aplicar el resultado concreto, ignorando la importancia que revisten las hipótesis que sostienen a la tesis. Esto es concordante con el empirismo ingenuo postulado por Balacheff (2000). La elección de ejemplos es aleatoria y sin criterio. Este proceso se extrapola también en la cadena argumentativa de una prueba. A los efectos de sanear estos problemas, juega un papel trascendente la formación del Profesorado para la comprensión y aplicación dela epistemología propia de esta Ciencia ya que no basta con que el profesor de Ciencias en general y de Matemática en particular conozca muchísimos contenidos sobre la ciencia sino que conozca más allá de tales contenidos y comprenda a estos desde la filosofía, la historia y su didáctica específica. Los resultados obtenidos y el debate realizado en clase, llevan a observar que el estudiante cuando se enfrenta a una propiedad cuya estructura lógica es la de una implicación, les interesa solo el resultado, es decir, ignoran la importancia que revisten la o las hipótesis. Piensan que el resultado o la tesis de la propiedad opera independientemente de las hipótesis. Esto necesita de una educación en la epistemología de esta ciencia, no con una educación bourbakiana, que poco tiene que ver con los tiempos que corren de la posmodernidad, pero requiere que el estudiante conozca el lenguaje y el método que le es propio a esta ciencia, que se insiste, tiene mucho que ver con el conductor del aprendizaje, las ideas que imprima en el estudiante y sus propias creencias y su propia formación.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente. Universidad de Los Andes.

D´Andrea, R.E., Curia, L. & Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios*. Alemania: Editorial Académica Española.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics.* 3(2), 9 – 24.

Healy, L. y Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education.* 31(4), 396 – 428.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente.* Barcelona: Gedisa.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., & Molina, Ó. (2008). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En Cano, Alfredo; Contreras, Fidel; Olvera, Ernesto (Ed.), Libro electrónico del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas: "Innovando la enseñanza de las matemáticas" (pp. 1-18). Toluca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Sastre Vázquez, P. & D´Andrea, R.E. (2011). Análisis del lenguaje matemático en estudiantes ingresantes a Carreras de Ingeniería. En: Borsa, E., Irassar, L., Pavioni, O. (Ed.). *Anales XVI EMCI (Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería) Nacional y VIII Internacional.*Olavarría: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Vinner, S. (1983). The notion of proof some aspects of students' views at the senior high level. En: R. Hershkowitz, ed. *Proceedings of the 7th Conference of the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 289 – 294). Shoresh, Israel.

Wason, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

CONSIDERACIONES DE LA PRÁCTICA DOCENTE EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

María Rosa Rodríguez, Sandra Noemí Franco
Facultad de Ciencias Económicas – Universidad Nacional de Tucumán. (Argentina)
mrrodriguez@face.unt.edu.ar, sandranfranco@hotmail.com

Resumen

Para la enseñanza de la Geometría, el docente debe tener un nivel de competencia suficiente para llevar a cabo su práctica en el nivel donde imparte. También, analizar y valorar la actividad de los alumnos en la identificación de los objetos y sus significados, con el fin de mejorar su aprendizaje. En este trabajo se muestra el desarrollo de un Taller destinado a docentes del nivel medio referido al tema "Cuerpos Geométricos" donde se realizó una autoevaluación. Las respuestas permitirán al docente realizar los cambios necesarios para optimizar el proceso educativo. Como reflexión del alumno, el docente le propone un autointerrogatorio durante el planteo y la resolución de problemas para identificar la estrategia usada, reconociendo sus debilidades y sus fortalezas. Pensamos que ambas tareas cooperan en el crecimiento y el análisis introspectivo del proceso educativo.

Palabras clave: taller, poliedros, autoevaluación, interrogatorio

Abstract

For teaching Geometry, the teacher must have appropriate competence to carry out his practice at the level he teaches. He must also be able to analyze and evaluate the students' activity in the identification of objects and their meanings, in order to improve their learning. This work shows the development of a high school teacher's workshop referred to the topic "Geometric Bodies" by applying self-assessment. The answers will allow the teacher to make the necessary changes to optimize the educational process. For the students to reflect on, the teacher asks them to make self-questioning while posing and solving problems to, recognizing their weaknesses and strengths. We believe that both tasks contribute to the improvement and introspective analysis of the educational process.

Keywords: workshop, polyhedra, self-evaluation, cuestionaire

Introducción

Es destacable la importancia de la Geometría en la formación académica de los estudiantes de carreras científicas porque fomenta la creación del razonamiento lógico, desarrolla las capacidades de pensamiento abstracto y formal para generalizar, elaborar hipótesis y operar con símbolos. También, se argumentan y demuestran propiedades y teoremas por medio de la deducción, recurriendo a tres procesos cognitivos: de visualización, de construcción y de razonamiento.

Interesadas en el "saber hacer" de los docentes formadores del nivel secundario se recurrió a una estrategia pedagógica que además de abordar contenidos de Geometría dirige sus acciones hacia su práctica. La

metodología de trabajo es el Taller que se caracteriza por la investigación, el aprendizaje a través del descubrimiento y el trabajo en equipo.

Para la enseñanza de la Geometría, el docente debe:

a. Tener un nivel de competencia suficiente para llevar a cabo la práctica formal, operativa y discursiva, en el nivel donde imparte.
b. Poder analizar y valorar la actividad de los alumnos en la identificación de objetos y sus significados, con el fin de mejorar su aprendizaje e incrementar su desempeño.

Este análisis permite al docente prever conflictos de significados y establecer distintas posibilidades de adquisición de los conocimientos implicados. (Godino J., 2009).

En este trabajo se muestra el desarrollo de un Taller destinado a docentes del Nivel Medio de la Provincia de Tucumán, interesados en capacitaciones de temas de Geometría, donde se consideraron las competencias que adquiere el alumno.

La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. (Gutiérrez Ocerín L. et al, 2008)

Las competencias en Geometría son las habilidades de visualización, de comunicación y de dibujo, que suelen darse en forma conjunta. Es una disciplina eminentemente sensorial y sus conceptos son reconocidos y comprendidos a través de la visualización. Está muy relacionada con la imaginación espacial porque la visualización puede ser mental. La habilidad de comunicación es la capacidad de interpretar, entender y comunicar información; en forma oral, escrita o gráfica, usando símbolos y vocabulario propios de la Geometría. La de dibujo está relacionada con las reproducciones o construcciones gráficas de los objetos geométricos. (Gaona Vargas, G., 2012)

Para favorecer el aprendizaje de la Geometría, el docente propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas y materiales manipulativos, con la presunción de que ellas constituyen modelos de los conceptos geométricos y de las estructuras en las cuales se organizan. El uso de representaciones es necesario no solo para comunicar las ideas geométricas, sino también para su propia construcción.

En el taller se trató el tema “Cuerpos Geométricos” con el propósito de que sus alumnos reconozcan los elementos, las propiedades y la clasificación. Utilicen correctamente las fórmulas en los problemas propuestos, descubran relaciones y propiedades de los cuerpos a partir de su desarrollo plano, calculen correctamente área lateral, total y volumen y adquieran destreza en el planteo y resolución de situaciones problemáticas.

Los objetivos generales que se persiguieron en esta propuesta fue que los docentes participantes logren que sus alumnos adquieran conceptos para explicar un procedimiento y destreza en los distintos caminos

de solución; desarrollen habilidades de medir, trazar, imaginar relaciones geométricas planas y espaciales y generen actitudes de investigación y trabajo grupal.

Como reflexión sobre la enseñanza de la Geometría se propuso a los docentes la resolución y discusión de un trabajo práctico que cubrió todos los conceptos adquiridos y la realización de una *autoevaluación* relacionada con la planificación de la actividad docente y la propia práctica docente en el aula. Con respecto al estudiante, se sugirió al docente que le permita reflexionar a través de un *autointerrogatorio* durante la resolución de un problema, reconociendo sus debilidades y fortalezas en la solución.

Pensamos que ambas tareas cooperan en el crecimiento y el análisis introspectivo del proceso educativo favoreciendo el desempeño de sus alumnos.

Desarrollo de la Experiencia

Consistió en el desarrollo de un Taller destinado a 60 docentes del nivel medio de la provincia de Tucumán, interesados en el tema "Cuerpos Geométricos". Los contenidos didáctico – geométricos implicados fueron la conceptualización y el uso de diagramas y recursos manipulativos, que impliquen procesos de visualización y de razonamiento.

Para optimizar del desarrollo de esta modalidad se propuso la siguiente Estrategia:

1) Reconocimiento de los diferentes cuerpos geométricos y sus elementos.
2) Planteo y discusión sobre la clasificación de los cuerpos según sus características.
3) Constitución de equipos de trabajo para la discusión y exposición sobre el planteo y resolución de problemas, distinguiendo los lenguajes visual, gráfico y analítico.
4) Presentaciones grupales y discusiones sobre el desarrollo de sus prácticas en el aula.
5) Reflexiones sobre las prácticas docentes a través de una autoevaluación individual.
6) Respuestas del alumno a preguntas en planteo, solución y verificación de problemas.

Definiciones Elementales

Se denominan *cuerpos geométricos* a aquellos entes reales o ideales, que existen en la realidad o pueden concebirse mentalmente, que ocupen un volumen en el espacio. Requieren tres dimensiones alto, ancho y largo y lo componen figuras geométricas.
Se recordaron las definiciones de caras, aristas y vértices del cuerpo. También, se reconocieron los cuerpos convexos y cóncavos.

Clasificaciones de los cuerpos geométricos

1.- Los cuerpos geométricos se clasifican principalmente en dos tipos dependiendo de que sus caras sean planas o superficies curvas: *Poliedros y Redondos o No Poliedros.*

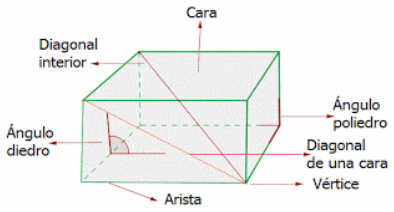


Fig. 1. Elementos Principales de un Poliedro

2.- Se recordó que un poliedro es *convexo* si se puede apoyar en todas sus caras; en caso contrario es *cóncavo*.

3.- Poliedro *regular* es aquel cuyas caras conforman polígonos regulares iguales, y todos sus ángulos diedros y poliedros también iguales. Estas condiciones se cumplen en el poliedro convexo, porque en los cóncavos los ángulos diedros no son todos iguales.

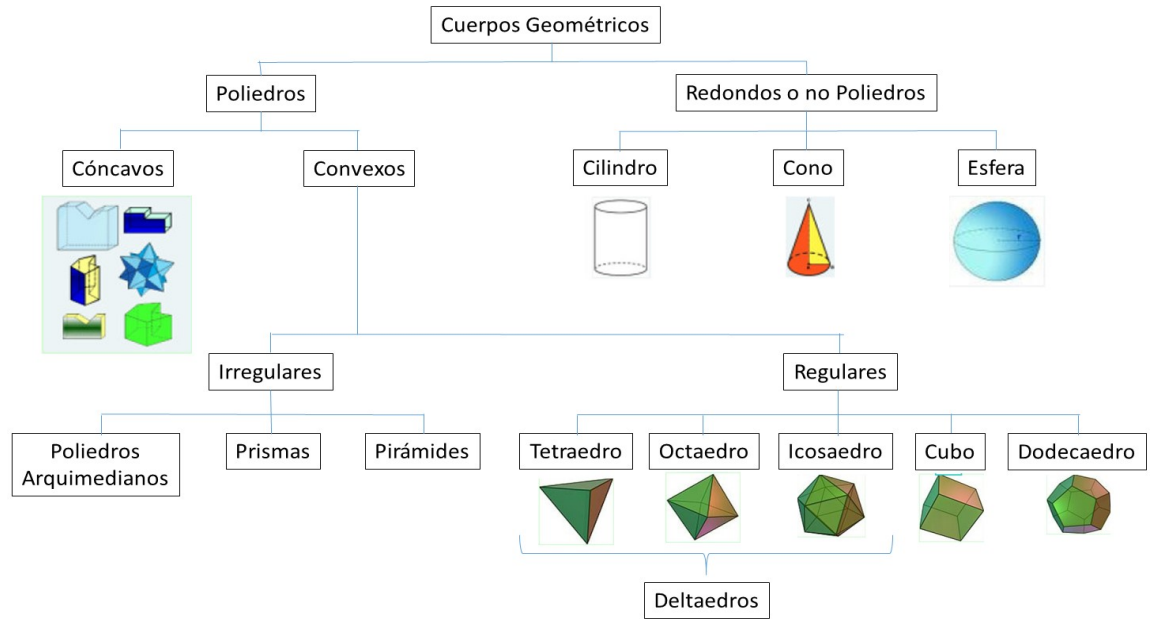
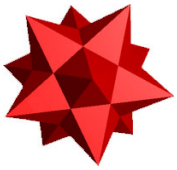


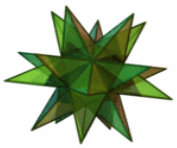
Fig. 2. Clasificación de los Cuerpos Geométricos

Existen nueve poliedros regulares, que se dividen en dos grupos: cinco son convexos y corresponden a los sólidos perfectos o platónicos (tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro) los cuatro restantes son cóncavos (pequeño dodecaedro estrellado, el gran dodecaedro estrellado, el gran dodecaedro y el gran icosaedro).

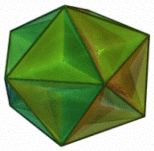
Los poliedros regulares convexos son los únicos poliedros puramente regulares.



Pequeño Dodecaedro Estrellado



Gran Dodecaedro Estrellado



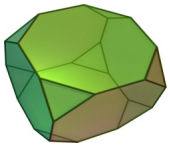
Gran Dodecaedro

Fig. 3. Poliedros Cóncavos Regulares

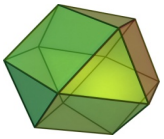
Un poliedro es *Irregular* si tiene caras o ángulos desiguales. Entre ellos, prismas, pirámides y arquimedianos. Los *prismas* y las *pirámides* pueden ser rectos u oblicuos. Si la altura pasa por el centro de la base, es recto y en caso contrario oblicuo.

Los poliedros *Arquimedianos* son convexos, cuyas caras son polígonos regulares (no necesariamente el mismo polígono) y sus vértices uniformes (en todos los vértices del poliedro convergen el mismo número de caras y en el mismo orden). Fueron ampliamente estudiados por Arquímedes y sólo hay 13 poliedros arquimedianos: el Tetraedro truncado, el Cuboctaedro, el Cubo truncado, el Octaedro truncado, el Rombicuboctaedro, el Cuboctaedro truncado, el Cubo romo, el Icosidodecaedro, el Dodecaedro truncado, el Icosaedro truncado, el Rombicosidodecaedro, el Dodecaedro rombo y el Icosidodecaedro truncado. De los cuales once se obtienen truncando los poliedros regulares o platónicos.

Tetraedro Truncado



Cubo Truncado



Cuboctaedro

Fig. 4. Algunos de los trece Poliedros Arquimedianos

El *Deltaedro* es un poliedro cuyas caras son triángulos equiláteros iguales. El nombre tiene su origen en la letra delta. Existen 12 Deltaedros regulares, tres convexos y nueve cóncavos. Los convexos son los sólidos platónicos: tetraedro, octaedro e icosaedro.
Dos poliedros son *Duales* si el número de vértices del primero coincide con el número de caras del segundo y viceversa. Ambos deben tener el mismo número de aristas. Se construye uno a partir del otro uniendo con segmentos los centros de dos caras contiguas del primero. Una propiedad de los sólidos platónicos es que están relacionados entre sí por la dualidad. Por ejemplo, el dual del tetraedro es el propio tetraedro, el dual del cubo es el octaedro y el dual del icosaedro, el dodecaedro

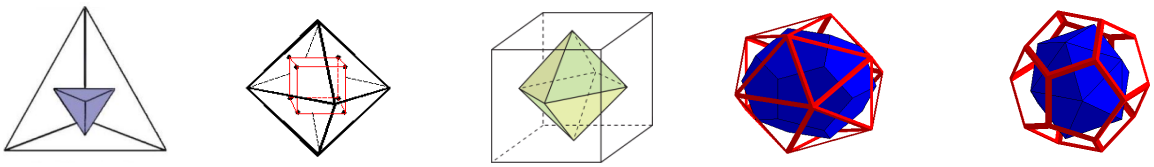


Fig. 5 Poliedros Duales

Propiedades de los Poliedros

Fórmula de Euler

Descubierta en 1752 por el matemático suizo Leonhard Euler $V + C - A = 2$ donde V: N° de vértices C: N° de caras y A: N° de aristas
Este resultado es útil para optimizar la capacidad visual y los procesos aritméticos en los estudiantes usando la estrategia didáctica de la construcción y posterior corte de un poliedro para que el estudiante verifique con algunos ejemplos la validez de la fórmula.

Prismas rectangulares

El volumen de un prisma rectangular es la raíz cuadrada del producto de las áreas de las tres caras distintas.
$A_1 = a\ b$, $A_2 = a\ h$ y $A_3 = b\ h$
Donde a: largo de la base b: ancho de la base y h: altura del prisma

$$A_1\ A_2\ A_3 = a\ b\ a\ h\ b\ h = a^2\ b^2\ h^2 = V^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{A_1\ A_2\ A_3}$$

Justificaciones Empíricas

Área de la Esfera

El área total de los cuerpos se obtiene realizando sus desarrollos planos, pero en la esfera surge que no puede desarrollarse sobre un plano.
Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual al área lateral de un cilindro que tenga el mismo radio y cuya altura sea el diámetro de la esfera.
Se considera una esfera envuelta por un cilindro que se ajusta por completo a ella, un cilindro de radio r y altura 2 r. Entonces el área de la esfera es igual al área lateral del cilindro: $A_{\text{Esfera}} = A_{\text{Lat. Cilindro}} = 4\ \pi\ r^2$

Relaciones entre los Volúmenes de algunos Cuerpos

1) Si se llena una pirámide con arena y se vierte todo el contenido en un prisma de bases y alturas congruentes, es necesario llenar otras dos pirámides para completar el volumen del prisma. Vol. Pirámide = 1/3 Vol. Prisma

2) Se considera un cono y un cilindro con bases y alturas congruentes. Se necesitan tres conos para llenar el cilindro. Vol. Cono = 1/3 Vol. Cilindro

3) Se considera un cilindro y un cono de radio r y altura $2r$ cada uno y una esfera de radio r. Se llena el cilindro con el agua de la esfera y el cono.

Vol. Cono = 1/3 Vol. Cilindro y Vol. Esfera = 2/3 Vol. Cilindro = $4/3\ \pi r^3$

Discusión de Resultados

Como se sabe, las competencias enfatizan el saber hacer, el saber convivir, el saber ser y el saber conocer; integran la teoría con la práctica; relacionan los conocimientos, habilidades y actitudes y promueven la autorrealización humana.

La metodología de enseñanza basada en competencias supone:

1º Que el profesor modifique su papel en el proceso enseñanza-aprendizaje y se concentre en las tareas de organización, seguimiento y evaluación del aprendizaje.
2º Que a los estudiantes se les exija dedicación constante y sistemática al aprendizaje y que reflexionen en la planificación y aplicación de los conocimientos adquiridos.

En el Taller se desarrolló un trabajo práctico a través de exposiciones grupales que condujeron a valiosas discusiones, logrando monitorear (supervisar, analizar, revisar, modificar) y controlar (dirigir) sus prácticas docentes. También, se propuso a los docentes una *autoevaluación individual* que permitió reflexionar sobre sus habilidades.

La autoevaluación del docente estuvo orientada a reconsiderar los siguientes ítems:

A. Definiciones de las habilidades de visualización, de comunicación y de dibujo.
B. Las principales dificultades técnicas que presentan los estudiantes para abordar un problema geométrico.
C. Los conceptos geométricos que sus alumnos no comprenden con facilidad.
D. ¿Se detectan y se registran las dificultades que presenta el alumnado en relación con aprendizajes básicos no adquiridos?
E. ¿Cómo distingue que un alumno ha adquirido habilidades y las emplea con fluidez?
F. ¿Se planifican explícitamente y llevan a cabo actividades en el aula en las que se desarrollan las competencias básicas?
G. ¿La corrección de las actividades que se realizan contribuyen al conocimiento y reflexión del alumno sobre su propio aprendizaje?

Para un aprendizaje significativo, no basta la aplicación reiterada de un procedimiento para resolver un problema, sino la reflexión de los recursos aplicados en su resolución. Para ello, el docente propone al alumno un *autointerrogatorio* donde se formule las siguientes preguntas para la realización de una tarea, tales como:

a. Al inicio: ¿Qué conozco acerca del problema propuesto? ¿Cuáles conceptos aplico para resolverlo? ¿Cómo puedo aplicarlo?;
b. Durante la resolución: ¿Qué, para qué y cómo lo estoy resolviendo? ¿Hacia dónde me conduce este procedimiento?;
c. Al final: ¿Hay coherencia entre las respuestas y las preguntas? ¿Hay otro camino para resolverlo? ¿Es general el método que apliqué? ¿Es posible el resultado encontrado? ¿Cumple las condiciones iniciales del problema?.

Este autointerrogatorio incrementa la destreza del alumno en resolución de problemas, reconociendo sus debilidades y fortalezas.
Estos recursos didácticos, extensibles a otros aprendizajes, favorecen la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Conclusiones

Consideramos que el profesor de Geometría debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos, sistemas de representación y sus relaciones sinérgicas en la práctica para, a posteriori, diseñar y gestionar los procesos de particularización y de generalización.

La autoevaluación de la práctica docente parte de una actitud favorable a un cambio y centra la mejora del proceso en el aula. Esto abarca los procesos de planificación y evaluación de los resultados porque ambos son partes inseparables de la práctica docente. Pensamos que las respuestas obtenidas permiten identificar las fortalezas y las debilidades en la enseñanza de la Geometría, realizando los cambios necesarios y pertinentes para optimizar el proceso. Esta estrategia tiene un sentido instrumental y se convierte en un factor decisivo para el cambio y la innovación, favoreciendo los procesos de reflexión personal y colectiva; siempre que su desarrollo sea continuo.

La resolución de problemas se complementa con el análisis epistémico – cognitivo provocada por las consignas: ¿Qué geometría se necesita en la resolución de un problema? ¿Qué conceptos usa el alumno? Las respuestas al interrogatorio propuesto al alumno optimizan su aprendizaje reconociendo que puede existir más de un método de resolución, o que no hay ningún método disponible o que no es aplicable o que resulta inadecuado para el problema propuesto. También, identifica los aspectos positivos y negativos de la estrategia usada, estableciendo condiciones para su aplicabilidad y creando bases para su generalización y transferencia.

Estas técnicas permiten reconocer la complejidad de los objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos del aprendizaje.

La importancia de la manipulación de los cuerpos geométricos se manifiesta en la combinación de poliedros regulares en diseño industrial, en mallas espaciales, en cúpulas geodésicas y también aparecen en la naturaleza, en la estructura de diversos minerales y en elementos estructurales de seres vivos.

Referencias bibliográficas

Gaona Vargas, G. (2012). Desarrollo de Competencias en Geometría en *Guía de Unidad de Aprendizaje Disciplinar 3.* Guanajuato, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Gutiérrez Ocerín L., Martínez Rosales E. y Nebreda Saiz T. (2008). *Cuadernos de Educación. N°5. Las competencias básicas en las áreas de Matemática.* España: Consejería de Educación Cantabria.

Pimienta Prieto, J. (2012). *Estrategias de Enseñanza-Aprendizaje. Docencia Universitaria Basada en Competencias*. México: Pearson Educación.

EL MODULOR COMO AGENTE CONSTRUCTOR DE CONOCIMIENTO: EL NÚMERO ÁUREO Y USOS EN LA ARQUITECTURA

Emmanuelle Peralta Orbenes; Jaime Huincahue Arcos
Universidad de Playa Ancha. (Chile)
emmanuelle.93@outlook.com, jaime.huincahue@upla.cl

Resumen

La Teoría Socioepistemológica afirma la necesidad del uso del Conocimiento Matemático de comunidades de conocimiento, como la del arquitecto, y en la construcción social del conocimiento matemático para rediseñar el discurso matemático escolar. Para este RdME debemos construir marcos de referencia. En este trabajo se analiza la construcción epistemológica de la comunidad de arquitectos y cómo hacen uso del CM, para la conformación de un MR de los usos de la optimización del número áureo y de una situación de aprendizaje, logrando así una matemática funcional en estudiantes de 8° grado y permitiendo la permanente confrontación y rediseño del dME.

Palabras clave: número áureo, teoría socioepistemológica

Abstract

The Socio-epistemological Theory states the need of using Mathematical Knowledge in communities of knowledge, like the architect's one, and in the social construction of the mathematical knowledge to redesign the school mathematical discourse. For such redesign, we must build reference frameworks. In this paper, we analyze the epistemological construction of architects' community and how architects make use of the mathematical knowledge for building the frame of reference of the uses of optimization of the auric number and of a learning situation It allows achieving a functional mathematics in eight-grade students and the systematic evaluation and redesign of the school mathematical discourse.

Key words: golden number, socioepistemological theory

Introducción

La existencia de un sujeto olvidado, el discurso matemático escolar (dME) y la negación de una pluralidad epistemológica por parte de la sociedad misma, son los tres fundamentos por el cual la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas hoy en día es un problema. El dME por su lado reconoce dos epistemologías diferentes que existen pero que no se entrelazan, la matemática escolar y el cotidiano. En este contexto se legitima la existencia de tres fenómenos producidos por el dME: la exclusión, la adherencia y la opacidad. Para una afrontación de los fenómenos que en éste dME se produce, debemos rediseñar el dME, a través del estudio de los usos del conocimiento matemático, mediante una Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM), y donde la funcionalidad de la matemática

es lo primordial. Para lograr esta CSCM es necesario diseñar Marcos de referencia (MR), y para ello estudiaremos la transversalidad del conocimiento de la escuela, del trabajo y de la ciudad, con el objetivo de rescatar los usos del conocimiento matemático. Por otro lado, está el sujeto olvidado, el cual se interpreta como la ausencia de la matemática funcional en el aula, ya que los usos del conocimiento matemático fueron soslayados por el dME.

En la actualidad sabemos que existe una brecha muy grande entre la matemática escolar y el cotidiano de la gente, es entonces que nace una problemática inminente: el conocimiento adquirido por la gente en el cotidiano no se parece al de la escuela, y el conocimiento de la matemática escolar no responde al cotidiano de la gente, pero aun así el conocimiento adquirido por la matemática escolar es legitimado por la misma sociedad produciéndose una opacidad epistemológica. Es entonces que nace la necesidad de construir una situación de aprendizaje centrado en los usos de un concepto matemático, usos que fueron olvidados en el tiempo, y en los planes y programas es considerado como una construcción matemática.

Esta investigación hace referencia a la resignificación del número áureo, a través de los usos de este en la comunidad de arquitectos. Si nos centramos en Fhi, a través de los planes y programas actuales, podemos decir que se realiza una construcción matemática para Φ en donde los usos de este son totalmente excluidos del proceso enseñanza – aprendizaje y es tratado como un objeto matemático, adjudicándole un estatus de elemento matemático que ensancha la lista de los números irracionales. Por otro lado, el número de oro, desde un estudio epistemológico, se reconocen diversas comunidades de conocimiento que fueron capaces de hacer uso de este conocimiento. Es por ello que, para esta investigación, es importante considerar los usos del conocimiento matemático en el cotidiano del arquitecto, a partir de una situación de aprendizaje, en la que se utilizará El Modulor para comprobar los usos funcionales del número áureo en el cotidiano del estudiante. De esta forma también poder entregar a los docentes, propuestas para que estos realicen su práctica docente apuntando a un rediseño del dME.

Marco Teórico

Teoría Socioepistemológica

La Teoría Socioepistemológica (TSE) se centra en la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM), la cual busca intervenir en el sistema educativo mediante un rediseño del discurso Matemático Escolar. Por ello se han realizado estudios de la matemática escolar, de la obra matemática, de los docentes y de los estudiantes (Cordero, 2001; Cantoral, 2013). Además, esta también afirma la necesidad del uso del Conocimiento Matemático de comunidades de conocimiento, comunidades que no son necesariamente la del matemático, y en la construcción social del conocimiento matemático para rediseñar el discurso matemático escolar (Cordero, 2001, 2016).

Para poder Rediseñar el dME debemos construir marcos de referencia los cuales son fundamentales. Estos MR deben de reconocer la funcionalidad, multidisciplinariedad y transversalidad del conocimiento matemático (Cordero, 2016). Así, la TSE menciona que el problema fundamental es la exclusión del cotidiano en la matemática escolar. La existencia de estas dos epistemologías, la del cotidiano y la matemática escolar, presentan un problema en la enseñanza – aprendizaje, ya que, si bien lo ideal es que

estas estuvieran en un mismo estatus, la sociedad considera la matemática escolar como lo importante y lo fundamental, siendo este el legitimado por la sociedad, opacando el cotidiano de la matemática escolar.
El discurso Matemático Escolar (dME)

La socioepistemología afirma la existencia de un discurso Matemático Escolar (dME) que es capaz de beneficiar a una epistemología dominante, la matemática escolar, y soslaya a la del cotidiano, y por consecuencia no hace funcional los usos del conocimiento matemático de la gente. Para esto, la socioepistemología plantea un Rediseño del dME, rediseño que es capaz de relacionar la matemática escolar con la del cotidiano basado en la construcción social del conocimiento (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Marco de Referencia de la Optimización

Al mencionar una resignificación de los usos de la optimización a través de un Marco de Referencia que estima la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimientos y el cotidiano de las comunidades que usan la optimización, originan un rediseño del dME. Es por ello que este MR demanda que el dME de la optimización sea transversal a su uso en otros dominios de conocimiento y en el cotidiano de la gente.
Los usos de Fhi en la arquitectura: una descripción de Le Corbusier.

Para este estudio, se pretende resignificar los usos del número phi, Φ, en la comunidad de conocimiento (Cordero, 2016) de arquitectos, específicamente en la construcción de herramientas propias de la comunidad, para que construyan conocimiento en su quehacer, la Arquitectura. Desde tal indagación, es que Le Corbusier, un referente en la arquitectura moderna del siglo XX, plantea el cuestionamiento de la medida por la llegada del sistema métrico decimal (el metro), buscando una humanización de ésta. Fue entonces que utilizando elementos matemáticos como Φ y Geometría Euclidiana, se reconocen instrumentos como el Modulor (Le Corbusier, 1961) para sostener una visión de equilibrio armónico entre la obra arquitectónica y el entorno y también entre la obra y el humano, además de que las construcciones son hechas en torno a la persona, a lo que Le Corbusier le llama la humanización del conocimiento, por último establece un orden en la obra mediante el trazado regulador que impone el Modulor en la obra.

Articulación de Le Corbusier con el Marco de Referencia de la Optimización

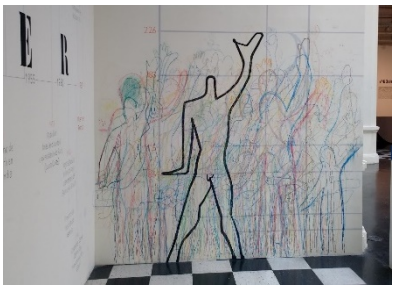
La construcción de una obra arquitectónica centrada en los principios de Le Corbusier y el Modulor, además de la conformación de instrumentos de medición basados en el Modulor, corresponden a unos de los funcionamientos y formas correspondientemente, así es que, generando un enfrentamiento entre ellos, fuimos capaces de generar las significaciones los procedimientos y la herramienta que le es útil al humano. La situación de selección de los elementos de la obra, busca patrones de adaptación para que posea un equilibrio armónico, orden y el sentido de humanización esté inmersa, para poder distinguir cualidades dirigido al proceso de selección en la búsqueda de lo estable. “De este modo, todos los procesos de adaptación y distinción que realice el humano en su cotidiano para seleccionar lo más próximo a lo estable, serán Arg(op) justificadas a la luz de una epistemología de usos” (Del Valle, 2015, p. 84), argumentaciones que corresponden a la optimización.

Marco Metodológico

Se propone la elaboración de un MR en la obra matemática del número áureo y en la resignificación de los usos en la optimización en la comunidad de conocimiento de arquitectos (Del Valle, 2015), y aplicando de manera conjunta una situación de aprendizaje (Cordero, 2016) a estudiantes de 8° grado, rediseñando de esta manera el dME. Por otro lado, la elaboración de la situación de aprendizaje se justifica en el estudio preliminar de la micro-ingeniería didáctica y, en la modelación que plantea Cordero (2016), dándole énfasis al no adherirse al discurso matemático escolar. Además, la forma de implementar la modelación matemática en el aula, se realizará de tal manera que el docente es aquel que posee el rol como agente en la identificación y diseño de situaciones.

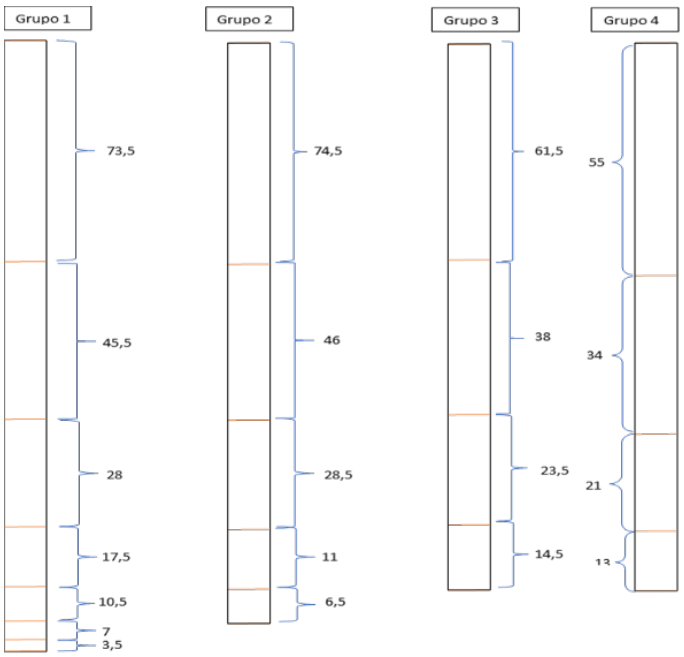
La metodología implementada consiste en un estudio cualitativo, de carácter experimental. La experimentación se desarrolló en un curso de 8° básico, del Colegio Sunnyland School, tipo particular subvencionado, de la comuna de San Felipe, región de Valparaíso. El colegio posee un Proyecto educativo centrado en un "currículo Socio – Cognitivo centrado en el aprendizaje social que potencie el aprender a aprender en el marco de la sociedad del conocimiento y la información, a través del desarrollo del modelo que responde a la arquitectura del conocimiento anterior en la escuela." (Sunnyland School, 2017). El colegio cuenta con una jornada escolar completa, que va desde pre – básica hasta cuarto medio, con una cantidad de 949 estudiantes, de los cuales 501 son varones y 448 corresponden a damas. El curso al cual se decidió realizar situación de aprendizaje consta de 29 estudiantes, además ellos no conocían el concepto de número áureo, lo cual fue primordial para la toma de datos. De esta manera la situación de aprendizaje se diseñó de 4 momentos en donde el primero consistía simplemente de preguntas abiertas, y lo que se les presentó fue lo siguiente:

Actividad Grupal (Momento 2)



Instrucciones: En grupos que será asignado por el profesor, se ubicarán donde haya un lienzo de papel y seguir los siguientes pasos:
1° Un integrante de cada grupo (el cual será designado por el profesor) se pondrá sobre el lienzo de papel con un brazo alzado, y otro integrante calcará su silueta con el plumón negro (tal y como muestra en la imagen de referencia).
2°Tomen la huincha de medir y midan al boceto desde los pies hasta la mano alzada. Cuando tengan esto, dividan el resultado en dos.
3°Con el plumón de color azul construir un cuadrado con medidas iguales al resultado del paso 2°, este cuadrado debe de tener su base en los pies del boceto.
4°Construir otro cuadrado con medidas iguales, pero este tendrá su base en la parte superior del cuadrado anterior.
5°Luego en el cuadrado inferior ubicar el punto medio de uno de sus lados laterales.
6°Tomar la medida desde el punto realizado en el paso 5° hasta la esquina superior opuesta al punto del mismo cuadrado (el cuadrado inferior), y copiar esa medida desde el punto del paso 5° hacia el cuadrado superior (debe de ser el mismo costado del punto del paso 5°).
7°Construir una recta perpendicular al lado del cuadrado superior y que pase por el punto creado en el paso 6° (apoyarse con la escuadra).
8°Construir un cuadrado con las mismas medidas que los dos anteriores, pero este será construido partiendo de la recta del paso 7° hacia abajo.
9°Trazar una diagonal del cuadrado inferior que comience del vértice inferior derecho de este. Trazar una diagonal del cuadrado superior que comience del vértice inferior izquierdo de este.
10°Ubicar los puntos de intersección entre las diagonales y el cuadrado que se creó en el paso 8°.
11°Trazar una recta que pase por estos dos últimos puntos.
12°Extender la recta que se encuentra al costado izquierdo del boceto, y también hacer la extensión de la recta que se dibujó en el paso anterior hasta el punto en que estas dos se intercepten. (deberán pegar más papel en este paso).
Actividad:
1.Con ayuda del video seguir la secuencia de triángulos rectángulos en el trabajo que realizaron anteriormente.
2.En un rollo de papel que será entregado uno por grupo, realizar unas marcas tal y como se mostrará en el video con el plumón rojo. A este rollo le llamaremos “huincha blanca”.
3.También en la huincha blanca se deberá de anotar cuanto mide cada marca desde el comienzo de esta hasta la marca misma.
Datos Relevantes de las huinchas blancas de cada grupo (Momento 3)

1) Comprueben sus resultados con la de otros grupos y contesten la siguiente pregunta: ¿En qué se diferencian? ¿en qué se parecen?
2) ¿En qué medida estaría la marca número x+1? (x corresponde a la cantidad de marcas que realizo cada grupo en su propia huincha blanca). ¿Y la X+2?, ¿X+3?
3) ¿Existe alguna relación entre una marca y la siguiente?
4) Expliquen con sus propios medios como podrían obtener la medida que se encuentra en la marca con posición número x+10, x+40 o x+60.
5) Realizar un momento de reflexión a las marcas x+10, etc. entre los grupos. De esta manera llegar a un consenso en el método del cálculo de las medidas de la huincha blanca. Mencione a continuación a que resultado en común llegó el curso entero.



Modificando La sala de Clases (Momento 4)
Supongamos que yo (el profesor) en estos momentos soy un arquitecto (en ese instante saco una huincha blanca confeccionada con mis medidas). Viendo esta sala noto que algo no anda bien, por lo que con mi huincha mido toda la sala (alto, largo y ancho de ella), y con ella obtengo las siguientes conclusiones dependiendo de las medidas que haya obtenido:
a) La sala es muy grande para mí solo.
b) La sala es muy alta para mí, si tomo en consideración que deben de existir un grupo grande de estudiantes en ella.
c) La sala está muy bien para mí.
d) La sala me queda chica para mí.
Ahora les toca a ustedes: Medirán con sus huinchas la altura de la sala y la de la puerta, contestando a las siguientes preguntas:
1. ¿Es alta, o no, la sala?
2. ¿El alta, o no, la puerta?

Resultados

Para el momento 1 la mayoría de los estudiantes estaban de acuerdo con que la sala de clases era grande por el hecho de que caben más de 30 personas en ella. Además, un alumno mencionó que el salón debería de ser cómodo para ellos y que debería de estar en proporciones a sus alturas. Por último, mencionaron que medir consistía en que con una huincha obtener números de distancias ya sea de altura o no. Estos resultados dan la certeza de que por lo menos la mayoría de los estudiantes realizó una comparación de su cotidiano con las medidas de la sala, y uno fue capaz de relacionarla matemáticamente con las proporciones.

Para el momento 2, se realizaron 6 grupos de trabajo, de los cuales lograron terminar las huinchas solamente 4, esto fue producido porque el lenguaje utilizado en las instrucciones no era conocido, aun cuando ellos si lo poseen en los planes y programas como aprendizaje previo.

Para el momento 3 se les entregó a los grupos que terminaron tablas que poseían las medidas de sus propias huinchas y además de las de los otros grupos de trabajo (cabe mencionar que los estudiantes que no lograron terminar la huincha se les integró a los grupos que sí terminaron. Los estudiantes lograron responder todas las preguntas, y en la pregunta 5 el consenso realizado por todos fue que para poder obtener una medida de una marca que no se conoce solamente basta con sumar las dos marcas anteriores (de la forma de la sucesión de Fibonacci), además todos quedaron de acuerdo que al realizar el cociente entre una marca y la anterior a ella resulta ser 1,6 , y que el grupo 3 menciona que a ellos les resulto el número 1,618030842 (obteniendo de esta manera una aproximación muy cercana a fhi).

Para el momento 4, los estudiantes lograron determinar cómo era la manera correcta de medir con esas huinchas, y determinaron que la puerta de la sala era alta por ser pequeños, y que además la altura de la sala era demasiado alta, ya que utilizando la huincha y ellos al lado sobraban muchas marcas desde sus dedos (con la mano alzada) hasta el cielo de esta. Aquí además hubo algunos comentarios de que la sala debería de ser adaptada a ellos para que de esta manera estuvieran más cómodos.

Así es como se determinó que se logró construir el concepto de número áureo en estos estudiantes, donde para lograrlo tuvieron que construir la huincha el Modulor (instrumento de la comunidad de arquitectos para la construcción de obras basada en el número áureo), además de poder determinar que elementos matemáticos existían en ella (la sucesión de Fibonacci y el número de oro), en donde por ultimo lograron usarla para determinar si la obra arquitectónica por la que ellos estan tan familiarizados, es o no apta para sus proporciones. Logrando de esta manera una significación, en estudiantes de 8° básico, del número áureo a través de los usos que éste posee en la comunidad de conocimiento de arquitectos.

Conclusiones

Esta investigación a problematizado sobre como el discurso matemático escolar opaca los usos del conocimiento matemático del número áureo, dándole a la matemática escolar un estatus epistemológico más importante que a la matemática existente en el cotidiano. Es así que el tema del número áureo, según el currículo nacional, se encuentra en 2° año de enseñanza media, como un elemento en la enorme lista de los números irracionales. Es entonces que esta investigación reconoce este problema y lo trabaja según la teoría socioepistemológica, que menciona la importancia del uso del Conocimiento Matemático de comunidades de conocimiento, las cuales no necesariamente es la del matemático, y en la construcción social del conocimiento para rediseñar el discurso matemático escolar.

La Investigación ha logrado determinar la importancia de la enseñanza del conocimiento matemático del número áureo mediante los usos que este posee en otras comunidades de conocimiento, como lo es la comunidad de arquitectos, que hacen uso de este número en la creación de herramientas propias de la comunidad, para que construyan conocimiento en su quehacer, la Arquitectura. El Modulor, herramienta propia de los arquitectos, construida a partir de elementos de la geometría euclidiana y el número fhi, es capaz de humanizar la medida, establecer un equilibrio armónico y determinar un orden en la obra.

En la investigación se ha hecho uso del marco de referencia de la optimización, marco que se ha utilizado por única vez por Del Valle (2015), y que ahora en nuestro trabajo nos dimos cuenta de que es coherente con nuestra investigación, siendo este un segundo trabajo que hace uso de él. Por lo que, de esta forma, estaríamos validando el Marco de Referencia de la Optimización.
El discurso matemático escolar se encuentra presente en nuestros procesos de enseñanza – aprendizaje, en donde la falta de marcos de referencia que ayudan a resignificar el conocimiento es otra problemática. En este trabajo se analiza la construcción epistemológica de la comunidad de arquitectos y cómo hacen uso del CM, para la conformación de un MR de los usos de la optimización del número áureo y de una situación de aprendizaje, logrando así una matemática funcional, permitiendo la permanente confrontación y rediseño del dME.

Referencias bibliográficas

Buscador de Arquitectura (2012). Proyecto: Toda House. [imagen] Recuperado de: http://images3.arq.com.mx/noticias/articulos/16407-04.jpg

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.
Corbusier, L. (1961). *El Modulor*. Buenos Aires: Editorial Poseidón.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. & Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona: Gedisa.
Cordero, F. (2016) *Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano.* En Díaz y Arrieta (Eds). Investigaciones latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa. México: Gedisa.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. Revista Latinoamericana de Investigaciones en Matemática Educativa, 4 (2), 103-128.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica*. Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Franco, J. & Manuel, J. (1997). *El Modulor de Le Corbusier (1943-54)*. Boletín Académico. Escola Técnica Superior de Arquitectura da Coruña, vol. 1, núm. 20. 20-30. Recuperado de: http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/5278/ETSA_20-6.pdf?sequence=1.

Fubini, E. (1990). *La estética musical desde la antigüedad hasta el siglo XX.* Madrid: Alianza.

Sunnyland School. (2017). Proyecto educativo. Disponible en: http://www.sunnylandschool.cl/images/PEI-2017.pdf

DETECCIÓN DE ERRORES Y CONTRADICCIONES EN UN PROBLEMA DE UN LIBRO DE TEXTO DE MATEMÁTICAS: UNA EXPLORACIÓN INICIAL DEL PENSAMIENTO CRÍTICO DE LOS MAESTROS

Honorina Ruiz-Estrada, Josip Slisko, Juan Nieto-Frausto
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. (México)
hruizestrada@gmail.com, josipslisko47@gmail.com, jfrausto@fcfm.buap.mx

Resumen

Se reportan los resultados de una investigación inicial diseñada en base de un problema tomado de un libro de texto de tercero de secundaria, donde se describe el enfriamiento de una taza de café a 80 °C expuesta a una temperatura ambiente de 20 °C. Los datos contradictorios y erróneos del proceso de enfriamiento aparecen en una tabla y una gráfica. Se les pidió a siete maestros de matemática que asuman ser los revisores de tal libro y que dictaminen con argumentos si la gráfica representa correctamente la información cuantitativa dada en la tabla. Los maestros revelaron varios elementos del pensamiento crítico.

Palabras clave: pensamiento crítico, conocimiento analítico del maestro de matemáticas, errores en los libros de texto, detección de errores.

Abstract

We report the results of an ongoing research that was based on a problem taken from a textbook for third- year of junior high-school. The problem describes a coffee cup cooling at 80 °C exposed to room temperature of 20 °C. The cooling process contradictory and wrong data are shown in a table and a graph. Seven mathematics teachers were asked to take on the role of supervisors of the textbook and to evaluate with arguments if the graph represents correctly the quantitative information given in the table. The teachers revealed various elements of critical thinking.

Key words: critical thinking, analytical knowledge of the math teacher, mistakes in textbooks, error detection.

Introducción

Actualmente, hay un consenso amplio que el pensamiento crítico forma parte de las habilidades del siglo XXI (Trilling & Fadel, 2009) y que, consecuentemente, debe ser el objetivo importante en todos los niveles educativos. Según Black (2012), los procesos básicos que constituyen el pensamiento crítico son: (a) analizar argumentos; (b) evaluar la relevancia y el significado de la información; (c) construir argumentos claros y coherentes y (d) formar juicios y decisiones bien razonados.

Es claro que los estudiantes de matemáticas no pueden practicar y mejorar esos procesos del pensamiento crítico sin que sus maestros los conozcan, dominen e integren en el diseño de las actividades de aprendizaje. Por eso, las habilidades del pensamiento crítico de los futuros profesores de matemáticas

fueron exploradas en varios estudios (Ozen & Cakiroglu, 2015; Applebaum, 2015). Algunas investigaciones reportaron resultados preocupantes (Aktaş & Ünlü, 2013). Una razón más para preocuparse es el hecho que varios proyectos de intervención, con el propósito de mejorar el pensamiento crítico de los estudiantes, no lograron resultados satisfactorios (Niu, Behar-Horenstein & Garvan, 2013).

Recientemente, los libros de texto de matemáticas se perfilan como una línea emergente de investigación en la educación matemática (Fan, 2013). De acuerdo a Fan, quien se reconoce como un promotor importante de tal línea, los libros de texto pueden ser considerados como variables independientes que inciden, por ejemplo, en la enseñanza y el aprendizaje. También pueden abordarse como variables dependientes que se ven influenciadas por otros factores: las políticas educativas nacionales de cada país o la preparación profesional de los autores. La propuesta investigativa de Fan permite llevar el análisis de libros de texto más allá de la identificación de sus características o como están estructurados, planteando preguntas de tipo causal (relación causal entre dos variables) o correlacional (cómo dos o más variables están correlacionadas). Fan ha propuesto agregar una posibilidad más, denominada: "otras preguntas". Él recomienda hacer este tipo de preguntas porque hay pocos datos en esta dirección y porque permitiría explorar el efecto de los libros de texto en el aprendizaje de los alumnos. En resonancia con las propuestas de Fan, dirigimos nuestra investigación hacia la exploración crítica de algunas actividades de aprendizaje matemático propuestas para los estudiantes de las escuelas secundarias de México.

En tal sentido, resulta interesante analizar los libros de texto de matemáticas de la Educación Secundaria, porque son materiales básicos de trabajo para alumnos y maestros y porque han sido sometidos a una exhaustiva revisión por parte de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG) que depende de la Secretaría de Educación Pública de México (SEP), con lo que esperarían materiales de muy alta calidad educativa. Sin embargo, en los libros de texto de matemáticas para la educación básica (grados 1, 2 y 3 de las escuelas secundarias) se han detectado varios errores sustanciales (conceptuales y numéricos) en los contextos relacionados con la física (Slisko, Corona, Ruiz, y Pastrana, 2016). También, se han encontrado un gran número de errores en ejemplos y problemas relacionados con el uso de la balanza en libros de texto de matemáticas (Zamora, 2017) y otros tantos en las Pruebas Nacionales Mexicanas, ENLACE y PLANEA (Jiménez, 2017). En estos dos trabajos de tesis se dan evidencias de que, incluso, algunos estudiantes de secundaria son capaces de detector los errores en los problemas seleccionados de estas tres fuentes.

Es oportuno mencionar que hay algunos trabajos relacionados con el análisis de libros de texto de la CONALITEG. Recientemente, Quiroz y Rodríguez (2015) siguieron una línea de investigación diferente a la propuesta por Fan y analizaron las praxeologías de modelación matemática usadas en los seis libros de texto de matemáticas de la educación primaria en México, correspondientes a la edición 2009. Las autoras consideraron los contenidos de probabilidad y estadística. Encontraron que la modelación matemática no está presente en la mayor parte de las lecciones de matemáticas de estos los libros de texto.

En este contexto, la pregunta de investigación es: ¿son capaces los maestros de matemáticas en servicio de detectar errores y contradicciones en un problema de matemáticas que describe un fenómeno físico? El objetivo es: explorar la activación y la calidad de los procesos del pensamiento crítico que ellos usan al evaluarlo. Con este fin, seleccionamos un problema de un libro de texto de matemáticas, que contiene omisiones, errores y contradicciones y diseñamos una tarea de lápiz y papel que permite explorar el pensamiento crítico de los maestros.

Un problema matemático relacionado con el enfriamiento

De un libro de texto de matemáticas de tercero de secundaria (Villaseñor, García, Montes, 2011) se seleccionó un problema relacionado con el fenómeno de enfriamiento: una taza de café que ha sido calentada en un horno de microondas hasta los 80°C, se saca del horno y se deja a una temperatura ambiente de 20°C. En el problema se aclara que, la temperatura de la taza disminuirá conforme pase el tiempo y como consecuencia, hay una relación decreciente entre estas dos cantidades. Se pregunta si se puede suponer que la temperatura cambia de manera constante y se pide argumentar a favor o en contra. Se proporcionan tres gráficas "aproximadas", en las que se observa una relación decreciente entre la temperatura y el tiempo y se pregunta cuál de esas gráficas representa la variación entre estas dos cantidades. Se menciona que, para verificar lo anterior se tomaron los datos del enfriamiento de una taza, se proporcionan las temperaturas del café en los primeros 30 *minutos* del proceso de enfriamiento (vea la Tabla 1) y se pregunta cómo es la variación de la temperatura en intervalos de cinco minutos, si disminuye esta variación de manera constante o cambia de un intervalo a otro. Pide que se grafiquen los datos para tener una idea de la forma de la línea de enfriamiento.

Tabla 1. *Temperatura de la taza de café como función del tiempo de enfriamiento*
La temperatura inicial de la taza es de 80°C.

Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatura (grados centígrados)	80	65	54	46	39	35	32

Esta tabla fue elaborada según la tabla del libro de texto.

De las tres gráficas ofrecidas en el libro de texto, la única que podría considerarse como "idónea" (vea la Figura 1) contiene varias omisiones, errores y contradicciones en relación con los datos de la Tabla 1. Se observa que en ella se omiten las escalas que representan las marcas, tanto en el eje de las temperaturas como en el eje de los tiempos. En este último solo aparecen cinco marcas, en lugar de siete, como se esperaría, ya que en la Tabla 1 aparecen siete instantes de tiempo. Además, la temperatura inicial es menor a 80°C, y a partir de la segunda marca (10 minutos) llega a ser menor a los 20°C. Esto es una contradicción porque de ser así, la temperatura de la taza de café disminuiría de manera incesante e independiente de la temperatura del aire que la rodea. De nuestra experiencia cotidiana sabemos que esto no es posible.

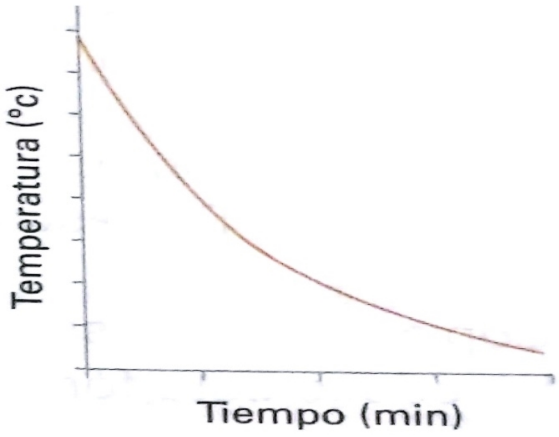


Figura 1. Gráfica de la temperatura de la taza de café en función del tiempo transcurrido

La gráfica se elaboró según la gráfica del libro de texto de matemáticas.

Basados en estas omisiones y consideraciones físicas incorrectas, diseñamos una tarea de papel y lápiz, con la intensión de explorar el pensamiento crítico de los lectores de este problema. En especial, nos interesa saber si los maestros (en servicio) son capaces de encontrar errores cuando se les proporcionan las condiciones adecuadas. Esta actitud crítica no la realizan muchos maestros espontáneamente, porque si así fuera, ya se habrían detectado los errores en los libros de texto de matemáticas arriba señalados.

El método y la población

Diseñamos una tarea, de papel y lápiz, en la que se narra lo siguiente:

El autor de un libro de texto de matemática para tercero de secundaria propone un problema relacionado con el enfriamiento de una taza de café caliente a la temperatura de 80℃*, que se expone a una temperatura ambiente de* 20℃ *. Él proporciona la siguiente tabla de datos para el proceso de enfriamiento (se da la Tabla 1). La acompaña con una gráfica que representa la variación de la temperatura del café en función del tiempo (se proporciona la Figura 1).*

Supón que eres la revisora técnica o el revisor técnico de tal libro y que tu función es dictaminar si la gráfica representa correctamente la información cuantitativa dada en la tabla.

¿Cuál, de los tres dictámenes breves dados a continuación, sería el tuyo? Antes de decidir, lee cuidadosamente cada uno de los tres dictámenes breves. Acompaña tu dictamen de tu justificación.

1. La gráfica *representa correctamente* la información cuantitativa dada en la tabla.
2. La gráfica *no representa correctamente* la información cuantitativa dada en la tabla.
3. No es posible determinar con precisión si la gráfica *representa correctamente* la información cuantitativa dada en la tabla.

Esta tarea se aplicó a siete maestros de matemática (en servicio), que en ese tiempo atendían grupos de estudiantes de primaria y secundaria de escuelas públicas del Estado de Puebla, México, y que, al mismo tiempo, cursaban la Maestría Profesionalizante en Matemática Educativa que se imparte en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Ellos resolvieron la tarea en una sesión de una hora y quince minutos, en un salón de clases de esta universidad. Primero la resolvieron individualmente (45 minutos) y enseguida de manera grupal (30 minutos). Se formaron un grupo de tres maestros y dos grupos de dos maestros.

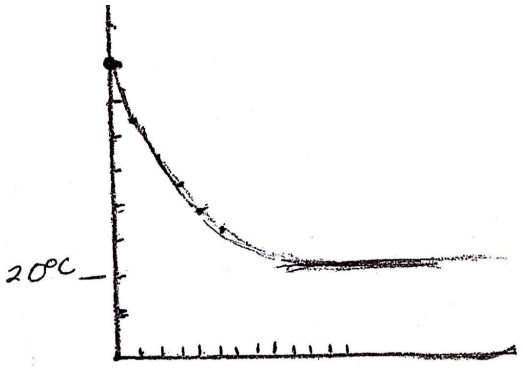
Resultados

De las respuestas y argumentaciones elaboradas por los siete maestros, concluimos que ellos determinaron que *la gráfica no representa correctamente los datos de la tabla*. La información para llegar a esta afirmación, la pudieron haber obtenido de: (1) del texto, (2) de la tabla o (3) de la gráfica, dados en la tarea. De los documentos generados por ellos, observamos que trabajaron preferentemente en la gráfica (seis realizaron al menos tres anotaciones). Menos atención le dedicaron a la tabla (cuatro hicieron una

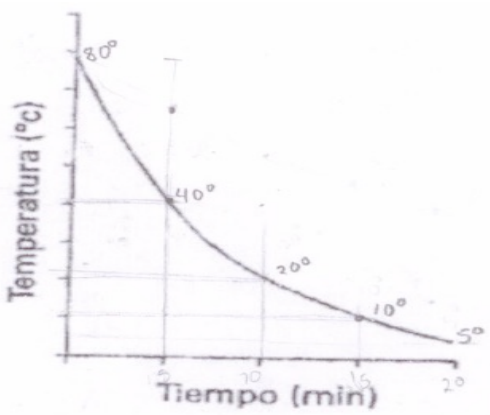
anotación), mientras que solamente un maestro trabajó sobre el texto, subrayando la frase "temperatura ambiente de 20°C" y usando esta información para dar su dictamen.

En relación con la gráfica, seis maestros descifraron con facilidad que las marcas del eje de las temperaturas estaban espaciadas 10°C y cuatro de ellos usaron esta información, junto con la curva de enfriamiento, para respaldar su dictamen. En el trabajo grupal, solo uno de los tres equipos usó esta misma ruta de solución. Cuatro maestros argumentaron que la temperatura del café no podía ser menor a 20°C y que en la gráfica llegaba a ser menor a ésta. Ellos llegaron a esta conclusión basándose en la magnitud de la temperatura ambiente. Esta afirmación crucial fue compartida completamente en la resolución grupal.

Que la temperatura de la taza de café no sea menor a los 20°C, no es un dato visible en la redacción del problema, sino que debe desprenderse del contexto en el que el problema matemático está inmerso. El proceso de enfriamiento se desencadena cuando una sustancia se expone a un medio ambiente que está a una temperatura menor. Es un fenómeno al que se enfrentan cotidianamente las personas. Sin embargo, tres maestros no activaron este conocimiento para elegir y justificar su dictamen. Es un resultado inesperado porque, de acuerdo cona Palm (Palm, 2009), un problema en contexto, como experimentado por los alumnos, logra que su matemática de fuera de la escuela sea usada en las aulas. Se requiere generar más datos empíricos, con una mayor cantidad de maestros, que permitan identificar las causas de este resultado.

De los documentos generados por los maestros, se observa que ellos consideraron a los datos de la tabla como la información cierta y analizaron si eran representados fielmente en la gráfica. Solo uno de los siete maestros graficó los datos de la tabla y observó que su dibujo no coincidía con la gráfica "idónea" (vea la Figura 2). En el trabajo grupal, esta propuesta de trabajo no fue considerada.	 ***Figura 2.*** Dibujo de uno de los maestros encuestados, obtenido al graficar los datos de la Tabla 1

Otro maestro concluyó que las marcas, en el eje de las abscisas, debían estar separadas 5 min. A cada marca le asoció su temperatura (acorde con la curva de enfriamiento) y concluyó que las temperaturas calculadas no correspondían a los datos de la tabla. Esta observación fue el elemento básico que usó para concluir que la gráfica no representa fielmente los datos dados en la tabla.

En su justificación anotó: *Independientemente que no se escribe la escala que se maneja al graficar los datos de la tabla; se puede determinar que en el eje del tiempo cada intervalo dado es de 5 minutos, y los datos no corresponden con los proporcionados en la tabla. Además, al observar la gráfica se identifica que la temperatura disminuye de forma exponencial*. En la Figura 3 se observa su trabajo en la gráfica. Vea que está considerando que, las marcas en el eje de las ordenadas, están separadas 10°C.	 ***Figura 3.*** A la altura de la marca correspondiente a los 5 min se observa un punto sobre la curva de enfriamiento con coordenadas (5,40) y otro punto más arriba con coordenadas (5, 65). Esta información no se usó para dictaminar.

Estos dos maestros son los únicos que no usaron suposiciones sin fundamento o elementos contradictorios. En la visión de Black sobre el pensamiento crítico (2012), ellos entendieron el significado de la información y usaron argumentos claros y coherentes en la elaboración de su dictamen.

Los otros cinco maestros argumentaron de manera inconsistente, como enseguida se narra. Ellos no consideraron a la gráfica como la representación de los datos de la tabla. Un maestro pensó que la gráfica debería tender a una asíntota horizontal en 20°C y sobre esta base, graduó el eje de las temperaturas. Como consecuencia, la temperatura inicial de enfriamiento no coincidió con la dada en la tabla. Este resultado lo usó para emitir su dictamen (vea la Figura 4). Observe que este maestro, por un lado, ubicó al origen del sistema coordenado cartesiano en el cruce de los ejes de la temperatura y el tiempo (anotó el punto s: (0,80)) y, como consecuencia, aceptó que el espaciamiento entre marcas consecutivas es de 10°C; y por otro, cambió el valor de la separación de estas mismas marcas al anotar el punto m: (t, 20). En consonancia con el marco de Black (2012), este maestro no detectó la incoherencia en sus argumentos y su decisión no fue bien razonada.

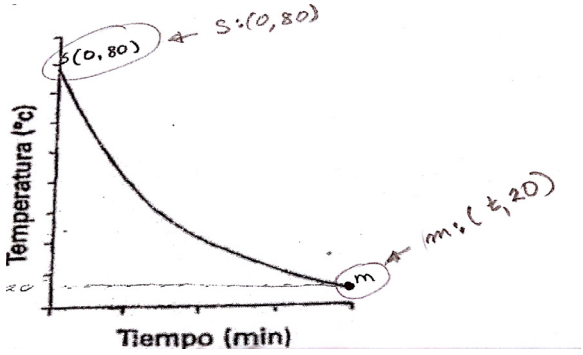


Figura 4. Este maestro no se percató que, dadas las coordenadas cartesianas del punto s, las del punto m, no son las que anotó en su dibujo.

Los cuatro maestros restantes anotaron las temperaturas de la tabla en el eje de las ordenadas y usaron el trazo de la curva de enfriamiento para obtener los tiempos correspondientes. Concluyeron que éstos no coincidían con los de la tabla y eligieron el Dictamen 2 (la gráfica no representa correctamente los datos de la tabla). En la Figura 5 se presenta uno de estos trabajos. Observe que el último punto de la curva de enfriamiento corresponde a un tiempo de 60 minutos y que este tiempo no está reportado en la tabla.

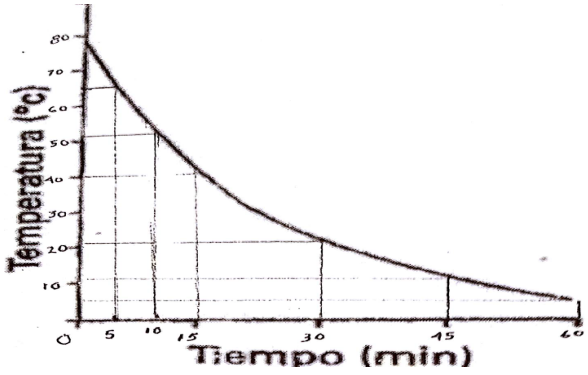


Figura 5. Este maestro usó el segundo dato de la temperatura y usando de la curva de enfriamiento, encontró el intervalo en el eje del tiempo; justificó la elección del Dictamen 2 argumentando que solo los primero puntos de esta gráfica se correspondían con los datos de la tabla.

Ahora, hay que comentar las anotaciones que realizaron en la tabla los siete maestros encuestados. Cuatro de ellos calcularon la variación de la temperatura en los seis intervalos de tiempo, dados en la tabla. De sus anotaciones pudieron llegar a inferir que, a medida que el tiempo de enfriamiento se incrementa, la temperatura disminuye con más dificultad, y que, por este motivo, se requieren tiempos de observación más grandes que los dados en la tabla para detectar la forma en que la curva de enfriamiento se acerca asintóticamente a la recta T=20°C. Estos maestros no se percataron de la relevancia y el significado de la información que generaron y no la usaron para justificar su conclusión. En particular, uno de ellos esperaba que la gráfica "idónea" mostrara este comportamiento asintótico. En su justificación señaló (refiriéndose a la gráfica):

> *Representa parcialmente el comportamiento de la curva de descenso de temperatura con respecto al tiempo. Pero conforme avanza el tiempo, la temperatura tiende a permanecer constante y en la gráfica no representa el momento en que la variación de temperatura con respecto al tiempo tienda a infinito. Además, que la temperatura ambiente es de* 20°C*, y en la gráfica representa una disminución mayor a esa temperatura*.

Solo uno de estos cuatro maestros proporcionó valores negativos para las seis variaciones de la temperatura en intervalos de cinco minutos. Eso es correcto porque corresponde al hecho que la temperatura de la taza de café va disminuyendo conforme transcurre el tiempo.

Reflexiones

Con la actividad descrita en este trabajo fue posible generar en siete maestros (en servicio), una actitud crítica hacia la contextualización del problema que obviamente faltaba en los verdaderos revisores técnicos de la editorial y los evaluadores expertos de la Secretaria de Educación Pública que autorizaron la impresión del libro de texto en cuestión y su uso en las escuelas públicas de México. Concretamente, de manera individual, los maestros detectaron dos errores relevantes en la gráfica "idónea" en relación a los datos de la tabla:

- la temperatura de la taza de café inicia en un valor menor a los 80°C ; y
- la temperatura de la taza llega a ser menor a los 20°C, que es la temperatura del medio ambiente.

De los argumentos presentados por los siete maestros en servicio, se observó que algunos no se dieron cuenta de la incoherencia de sus argumentos, que basaron en consideraciones contradictorias entre sí. No lograron pensar en la gráfica como la visualización de los datos de la tabla. El trazo continuo de la curva de enfriamiento pudo dar la impresión que, en la gráfica "idónea" hay más datos que los que aparecen en la tabla. En consecuencia, llegaron a generar datos erróneos que no están en la tabla.

Siguiendo la propuesta de Fan (2013) en el sentido de analizar los efectos de los libros de texto en la enseñanza de la matemática escolar, hemos mostrado que es posible generar en los maestros en servicio un pensamiento crítico. Tal pensamiento debería estar más presente tanto en los que generan los libros de texto (autores y revisores) de la CONALITEG como en los que los usan en el proceso de enseñanza de las matemáticas (maestro y estudiantes).

Nota

La investigación forma parte del proyecto “Aprendizaje activo de la física y de las matemáticas: El diseño y la implementación de actividades y posibles predictores del desempeño estudiantil” financiado por la VIEP de la BUAP en el año 2017.

Referencias bibliográficas

Aktaş, G. S., & Ünlü, M. (2013). Critical thinking skills of teacher candidates of elementary mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *93*, 831-835.

Applebaum, M. (2015). Activating pre-service mathematics teachers’ critical thinking. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(1), 77-89.

Black, B. (2012). An overview of a programme of research to support the assessment of Critical Thinking. *Thinking Skills and Creativity*, *7*(2), 122-133.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, *45*(5), 765-777.

Jiménez, B. A. (2017*). La autenticidad de los problemas de matemáticas en la prueba ENLACE y PLANEA: El caso de los problemas relacionados con los contextos de física* (Tesis de maestría no publicada). Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

Niu, L., Behar-Horenstein, L. S. & Garvan, C. W. (2013). Do instructional interventions influence college students'critical thinking skills? A meta-analysis. *Educational Research Review*, *9*, 114-128.

Ozen, M., & Cakiroglu, E. (2015). *Making sense of statistical and probabilistic information in the media texts: Pre-service teachers' critical thinking processes*. In Krainer, K. & Vondrová, N. (Ed.), CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 727-733). Prague: Charles University & CERME.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In B. Greer, L. Verschaffel, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Word and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 3-19), Rotterdam: Sense Publishers.

Quiroz Rivera, S. & Rodríguez Gallegos, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Educación matemática*, 27, 45-79.

Slisko, J., Corona Cruz, A., Ruiz-Estrada, H., & Pastrana-Sánchez, R. (2016). Problems with Physics-Related Contexts in Mathematics Textbooks for Mexican Secondary School: Some Alarming Examples of Artificial Problem Contextualizations. In T. Greczyło y E. Dębowska (Eds.), *Key Competences in Physics Teaching and Learning.* Proceedings of the International Conference GIREP EPEC 2015 (pp. 225-233). Wroclaw: Institute of Experimental Physics, University of Wroclaw.

Trilling, B., & Fadel, C. (2009). *21st century skills: Learning for life in our times*. New York: John Wiley & Sons.

Villaseñor, R., García, V., Montes, D. (2011). *Matemáticas en contexto 3*, segunda edición. Naucalpan de Juárez, Estado de México, México: Editorial Esfinge.

Zamora Corona, Y. *El uso de la balanza para el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado: el caso de los libros de texto autorizados* (Tesis de maestría no publicada). Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA RELACIONADA A LAS CONCEPCIONES DE FRACCIÓN

Milagros Edith Carrillo Yalán
Universidad Antonio Ruiz de Montoya. (Perú)
milagros.carrillo@uarm.pe

Resumen

El inicio de esta investigación surgió de la gran dificultad que muestran los alumnos en la compresión de las fracciones. Esta dificultad, presente tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, se observa principalmente en los niveles básicos de educación. Para identificar uno de los posibles factores que influyen en tal problema se analizó la organización matemática (OM) relacionada con las concepciones de fracción presente en un texto escolar de matemática. En el tema de fracciones, se enfatiza en la concepción parte todo cuya técnica es la del doble conteo de las partes, dejando de lado otras concepciones importantes como: cociente, medida, entre otras. Por tanto, el análisis se fundamenta en el estudio de las OM vinculadas a las concepciones de fracción en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Finalmente, esta investigación, que es cualitativa y de tipo bibliográfica, describe una realidad en su contexto natural, el cual constituye una fuente rica y estable para otras investigaciones.

Palabras claves: fracción, TAD, organización matemática

Abstract

This investigation is based on the great difficulty students have to understand fractions. This difficulty, which is present in both the teaching and the learning of fractions, is mainly observed at the basic levels of education. To identify one of the possible factors that originate such problem, we analyze the mathematical organization (MO) related to the conceptions of fraction stated in a math textbook. In the topic related to fractions, the textbook emphasizes the part-whole conception which technique is the double count of parts, putting aside other important notions such as: quotient, and measure, among others. Therefore, this analysis is based on the study of MO linked to conceptions of fraction within the framework of the Didactic Anthropological Theory (DAT). Finally, this is a qualitative bibliographic research mainly because it describes reality in its natural context, and it constitutes a valuable and stable source to further investigations.

Key Words: fraction, TAD, Mathematical organization

Introducción:

Uno de los temas de mayor dificultad, tanto para su enseñanza como para su aprendizaje (Perera y Valdemoro, 2007) es la comprensión de las fracciones. Silva (2005) y Perera et al. (2007) coinciden en que las dificultades para su aprendizaje se deben a las diversas concepciones que admite este objeto matemático; entre los cuales, tenemos: parte-todo, cociente, razón operador y medida. A partir de mi experiencia docente he podido detectar tales dificultades y el predominio de la concepción parte todo, cuya técnica es la del doble conteo de las partes en superficies totalmente divididas en partes congruentes,

lo que podría conducir al fracaso cuando el objeto representado se escape de ese patrón. Gómez (2009) afirma que el texto escolar es el principal instrumento curricular utilizado por el profesorado para enseñar matemáticas en el aula; sin embargo, es también, generador de potenciales inconsistencias, ambigüedades, omisiones y otros conflictos a la hora de presentar los contenidos matemáticos. Por tal motivo, esta dificultad ha sido abordada a través del análisis de organización matemática (OM) del texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria (relevante por ser de distribución obligatoria a nivel nacional) en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En ese sentido, la pregunta que orienta la presente investigación es: ¿Cuál es la organización matemática (OM) relacionada a las concepciones de fracción que se presentan en el texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria?

Marco teórico

Con el propósito de analizar la OM del objeto matemático fracciones, se ha tomado como referente teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999). Este enfoque señala que la actividad matemática debe ser interpretada (modelizada) como una actividad humana, en lugar de ser considerada únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. Además, la TAD admite que toda actividad humana regularmente realizada, puede describirse como un modelo único, que se resume con la palabra praxeología. El término praxis hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos; el término logos se identifica con el saber e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que es la explicación detallada de las afirmaciones hechas en el discurso tecnológico, o en la tecnología. OM se constituye alrededor de uno o varios tipos de tareas matemáticas (objeto relativamente preciso). Esta tarea, t, tiene cabida en el tipo de tarea T y se puede decir que $t \in T$. Además, desde este punto de vista, expresiones como "calcular", "demostrar" se consideran un género de tareas. Las tareas, conducen a la creación de técnicas matemáticas (determinada manera de hacer las tareas $t \in T$), las cuales se justifican por tecnologías matemáticas (discurso racional) desarrolladas en el marco de una teoría matemática (explicación detallada de las afirmaciones hechas en el discurso tecnológico, o en la tecnología).

Metodología

La presente, es una investigación cualitativa de tipo bibliográfico debido a que se va a describir una realidad en su contexto natural: un libro de texto. Cuba y Lincoln (1981) citados en Gonzales (2014) manifiestan que las ventajas de trabajar con esta metodología se deben a que estos documentos constituyen una fuente rica y estable, y pueden ser la base de diferentes estudios en los que podemos obtener evidencia para fundamentar las afirmaciones y declaraciones del investigador; por ello, resultan una fuente natural de información. Procedimiento Metodológico: Primero, se buscó información referente a investigaciones relacionadas con nuestro objeto matemático: fracción, debido a las dificultades en el aprendizaje que presentan los estudiantes cuando realizan tareas sobre dicho objeto matemático; a su vez, se consultaron investigaciones relacionadas con la TAD por ser el marco teórico que fundamenta el trabajo de investigación. Luego, se seleccionó el texto relevante a investigar para analizarlo en base a los elementos de la OM de nuestro marco teórico, la TAD: los tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Adicionalmente, se definieron los criterios para realizar el análisis de las praxeologías de nuestros objetos matemáticos en el libro de texto seleccionado; y, finalmente, se realizó la descripción y el análisis de la OM de las fracciones, considerando los criterios definidos previamente.

Análisis de datos

En el texto escolar predomina la concepción parte-todo y la técnica que apoya a este tipo de tarea es la del doble conteo de partes; sin embargo, hay evidencias de situaciones en las que la técnica del doble conteo de las partes puede constituir un obstáculo didáctico para construir otras técnicas. Si bien, en la enseñanza escolar el tipo de tareas presentada en las figuras permite solamente el desarrollo de la técnica del doble conteo de las partes, no permitirá a los alumnos la construcción de otras técnicas y consecuentemente sus acciones estarán limitadas a ese tipo de tareas. Para su mejor comprensión, se muestra algunas situaciones asociadas a la concepción parte todo:

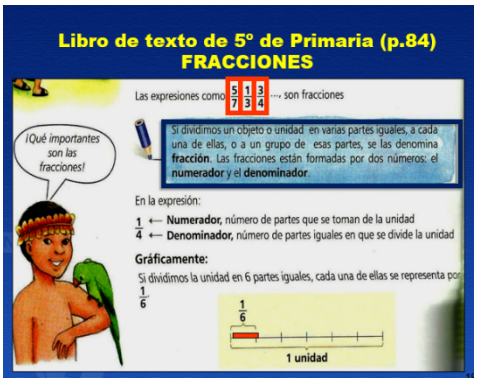


Figura 1: Evaluando lo aprendido.
Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

En la figura 1, la fracción está definida a partir de la idea parte-todo. Además, se usa el segmento de recta como representación figural, para vincular la concepción de fracción como parte-todo. Pues se ha dividido el segmento en 6 partes congruentes y se le asigna una fracción igual a 1/6 a cada parte.

Por otro lado, hay situaciones que requieren de otras concepciones de fracción. Por ejemplo, la concepción cociente, especialmente cuando se requiere la representación gráfica de la fracción impropia, pues el hecho de querer representarla bajo la concepción parte todo puede llevar a los alumnos a una confusión, ya que se visualiza la representación de dos unidades, entrando en contradicción con la concepción de fracción como parte-todo.

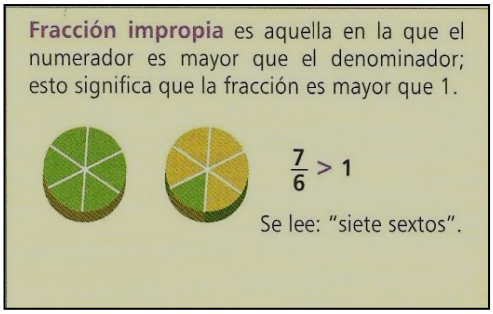
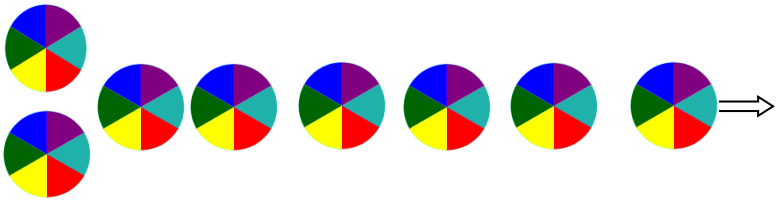


Figura 2: Evaluando lo aprendido
Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

En la figura 2, se observa un error en la representación gráfica, pues se visualiza la representación de dos unidades, entrando en contradicción con la definición general de fracción como parte-todo. Este es un ejemplo clave de que para algunas situaciones la concepción parte todo no es suficiente. Ahora bien, si quisiéramos representar 7/6 se necesitaría de la concepción cociente, ya que se necesita 7 unidades para su correcta representación gráfica. Por ejemplo, si quisiéramos dividir 7 pizzas entre 6 personas a cada una le tocaría7/6. En la representación gráfica bajo la concepción parte-todo una persona tendría que tomar todas las seis partes en las que se dividió la unidad, más una sexta parte de otra unidad, es decir 1+1/6 =7/6 de pizza para una persona y para las cinco personas restantes le tocaría solo 1/6 de la otra unidad, por lo cual la repartición no sería correcta. En ese sentido, se muestra dos técnicas asociadas a la concepción cociente, relacionadas a esta tarea:

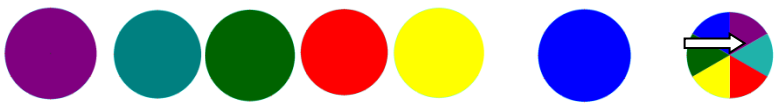
Distribuir 7 pizzas entre 6 personas: La primera técnica, dividir cada unidad (cada pizza) en 6 partes iguales, destinando a cada persona 1/6 de cada pizza y como son 7 pizzas recibiría en total 7/6. Una segunda técnica seria distribuir una unidad entera para cada persona y dividir la última unidad en seis partes iguales, concluyendo que a cada persona le corresponde 1 + 1/6 que es igual a 7/6.

Técnica1:



$$7 \div 6 = \frac{7}{6} = 7x\frac{1}{6}$$

Técnica 2:

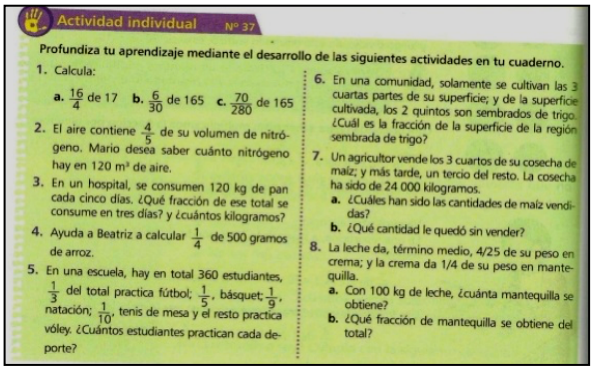


$$7 \div 6 = 1\frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{6}$$

Se puede identificar, en las tareas y técnicas, diferentes concepciones como: determinar la fracción de un entero (concepción parte –todo, la cual predomina), transformar las cantidades por la acción de un operador fraccional (operador), distribuir en partes iguales un objeto a "n" personas (cociente) y, si bien,

estas no son explícitas, dado que no se definen, aparecen implícitamente en algunas actividades propuestas por el texto escolar.

Así, en la figura 3 y figura 4 se presentan algunas tareas: "Actividad individual" y "evaluando lo aprendido" donde el dominio de las concepciones de parte todo, cociente, operador y medida son fundamentales para el desarrollo de las mismas



Actividad individual Nº 37

Profundiza tu aprendizaje mediante el desarrollo de las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Calcula:
   a. $\frac{16}{4}$ de 17 b. $\frac{6}{30}$ de 165 c. $\frac{70}{280}$ de 165
2. El aire contiene $\frac{4}{5}$ de su volumen de nitrógeno. Mario desea saber cuánto nitrógeno hay en 120 m³ de aire.
3. En un hospital, se consumen 120 kg de pan cada cinco días. ¿Qué fracción de ese total se consume en tres días? y ¿cuántos kilogramos?
4. Ayuda a Beatriz a calcular $\frac{1}{4}$ de 500 gramos de arroz.
5. En una escuela, hay en total 360 estudiantes, $\frac{1}{3}$ del total practica fútbol; $\frac{1}{5}$, básquet; $\frac{1}{9}$, natación; $\frac{1}{10}$, tenis de mesa y el resto practica vóley. ¿Cuántos estudiantes practican cada deporte?
6. En una comunidad, solamente se cultivan las 3 cuartas partes de su superficie; y de la superficie cultivada, los 2 quintos son sembrados de trigo. ¿Cuál es la fracción de la superficie de la región sembrada de trigo?
7. Un agricultor vende los 3 cuartos de su cosecha de maíz; y más tarde, un tercio del resto. La cosecha ha sido de 24 000 kilogramos.
   a. ¿Cuáles han sido las cantidades de maíz vendidas?
   b. ¿Qué cantidad le quedó sin vender?
8. La leche da, término medio, 4/25 de su peso en crema; y la crema da 1/4 de su peso en mantequilla.
   a. Con 100 kg de leche, ¿cuánta mantequilla se obtiene?
   b. ¿Qué fracción de mantequilla se obtiene del total?

Figura 3: Actividades individuales
Fuente: Quiroz y Salgado (2009)

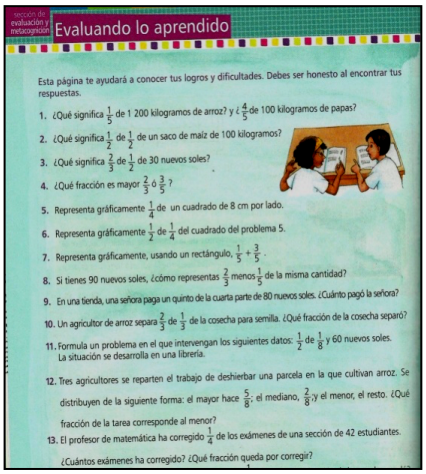
En la Figura 3, se presentan actividades individuales al finalizar el tema de fracciones que requieren emplear no solo la concepción parte-todo, sino otras como: cociente, operador, razón y medida. Con respecto a las representaciones, estas se presentan como representaciones verbales como por ejemplo: los 3 cuartos, un tercio, etc. y sus respectivas representaciones numéricas. Se muestran tareas, pero no se proponen técnicas:

- En la tarea 1 se pide resolver operaciones básicas de división y multiplicación, haciendo uso de la concepción de fracción como operador.

- En la tarea 2 se transmite el desarrollo de la concepción operador lo que requiere el uso de la técnica de división y multiplicación.

- En la tarea 3 se induce a la concepción parte-todo, con el tipo de tarea reconstruir un entero. Para ello se usará la técnica de reversibilidad del doble conteo de las partes, es decir, un todo será 120kg x 5 partes= 600 kg, la parte tomada del todo será 120kg x 3 = 360kg, logrando así la fracción buscada.

- De la tarea 4 a la 8 se pide resolver operaciones básicas de división y multiplicación, aquí vuelve la concepción de operador. No se observa presencia de teorías ni tecnologías.



sección de evaluación y metacognición

Evaluando lo aprendido

Esta página te ayudará a conocer tus logros y dificultades. Debes ser honesto al encontrar tus respuestas.

1. ¿Qué significa $\frac{1}{5}$ de 1 200 kilogramos de arroz? y ¿$\frac{4}{5}$ de 100 kilogramos de papas?
2. ¿Qué significa $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de un saco de maíz de 100 kilogramos?
3. ¿Qué significa $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de 30 nuevos soles?
4. ¿Qué fracción es mayor $\frac{2}{3}$ ó $\frac{3}{5}$?
5. Representa gráficamente $\frac{1}{4}$ de un cuadrado de 8 cm por lado.
6. Representa gráficamente $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ del cuadrado del problema 5.
7. Representa gráficamente, usando un rectángulo, $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$.
8. Si tienes 90 nuevos soles, ¿cómo representas $\frac{2}{3}$ menos $\frac{1}{5}$ de la misma cantidad?
9. En una tienda, una señora paga un quinto de la cuarta parte de 80 nuevos soles. ¿Cuánto pagó la señora?
10. Un agricultor de arroz separa $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$ de la cosecha para semilla. ¿Qué fracción de la cosecha separó?
11. Formula un problema en el que intervengan los siguientes datos: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{8}$ y 60 nuevos soles. La situación se desarrolla en una librería.
12. Tres agricultores se reparten el trabajo de deshierbar una parcela en la que cultivan arroz. Se distribuyen de la siguiente forma: el mayor hace $\frac{5}{8}$, el mediano, $\frac{2}{8}$ y el menor, el resto. ¿Qué fracción de la tarea corresponde al menor?
13. El profesor de matemática ha corregido $\frac{1}{4}$ de los exámenes de una sección de 42 estudiantes. ¿Cuántos exámenes ha corregido? ¿Qué fracción queda por corregir?

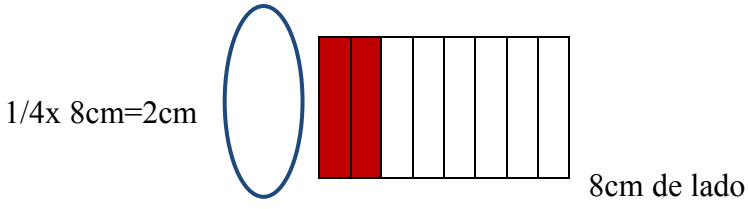
Figura 4: Evaluando lo aprendido
Fuente: Quiroz y Salgado, (2009)

En la Figura 4, se presentan tareas que requieren emplear las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida. En el desarrollo del texto se hace referencia a la concepción de operador en todas las preguntas. Con respecto a la técnica o técnicas que se presentan, no se observa la utilización de alguna técnica, ya que son problemas que sólo están propuestos.

Con respecto a las tareas 1, 2 y 3, se observa que dichas preguntas son ambiguas, pues el término ¿Qué significa? se puede entender como ¿Qué entiendes por esta fracción? por ejemplo, en la primera pregunta 1/5 de 1200 ¿Cuál es tu interpretación? se presta a múltiples técnicas e interpretaciones : Un alumno podría decir en el primer caso, significa la quinta parte de 1200, otro podría resolverlo y decir que 1/5 de 1200 significa 240, otro podría decir que dividimos 1200 en cinco partes de las cuales nos quedamos con una. Y aunque todas las reflexiones serian correctas, se sugiere especificar qué se espera que haga el alumno ¿Que interprete y dé su opinión o que opere y halle su respuesta o resultado?

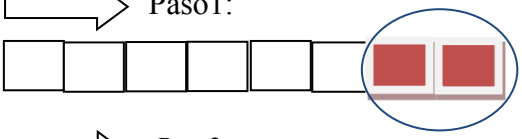
Con respecto a la tarea 4, se pide la comparación de fracciones heterogéneas, lo que no fue explicado en la sección proceso, ya que sólo se encargó de la comparación de fracciones homogéneas. Ahora, para su resolución, se plantea las siguientes técnicas: convertir a fracciones homogéneas que sean equivalentes con dichas fracciones dadas.
Así: 2/3 y 3/5 podemos hallar fracciones equivalentes a estas solo multiplicando a la primera fracción por 5/5 y a la segunda fracción por 3/3, y de esta manera lograr las nuevas fracciones (2x5)/(3x5)=10/15 y (3x3)/(5x3)=9/15 entonces 10/15>9/15.

Con respecto a la tarea 5, su posible representación figural sería:



Con respecto a la pregunta 6 su representación figural: 1/2 de 1/4 de 8cm de lado

Paso1:



$\frac{1}{4}x8 = 2$

Paso2

Ahora: $\frac{1}{2}$ x2 =1. Por lo tanto su respuesta sería 1 cm.

Con respecto a la tarea 7 su representación figural sería: = $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

Con respecto a la tarea 8 su resolución se puede realizar usando la concepción operador.

$$\frac{2}{3}\text{ x } 90 \text{ - } \frac{1}{5}x\,90 = 60 - 18 = 42$$

Con respecto a las tareas 9 y 10 los estudiantes podrán hacer uso de la concepción como operador (tratado en esta unidad como fracción de un número) para responder a dichas preguntas.

Tarea 9:

$$\frac{1}{5}\text{ de }\frac{1}{4}de\,80 = \frac{1}{4}de\,80 = 20$$

$$\frac{1}{5}\text{ x}20 = 4$$

Tarea10:

$$\frac{2}{3}\text{ de }\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\text{ x }\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Con respecto a la tarea 11 se pide la formulación de un problema con los datos dados. Dichos datos son entregados en el problema, facilitando así su elaboración.

Con respecto a la tarea 12, se pide la resolución de operaciones con fracciones homogéneas. Dichas fracciones fueron estudiadas en la sección de proceso. Así se pide sumar las fracciones homogéneas para obtener la unidad.

Para ello se suma: $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}+\frac{a}{b}=\frac{8}{8}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{8}$

Con respecto a la tarea 13 se podrá hacer uso de la concepción como parte todo, sin embargo por tratarse de exámenes, el resultado esperado sería un número entero.

Finalmente, con respecto a la tarea 14, aquí es necesario del dominio de operaciones de fracciones para obtener el resultado: Se vendió 3/4 de la cosecha de papas, entonces nos queda 1/4de dicha cosecha. Luego se vendió 1/3 de lo queda, osea 1/3 de 1/4 = 1/12. Quedando: 1/4–1/12=(1x3)/(4x3)-1/12 = 3/12 – 1/12 = 2/12 = 1/6

Resultados

En el texto escolar analizado se ha identificado el uso de dos concepciones de fracción: como parte-todo y como operador. Cabe destacar que la concepción de fracción como parte-todo es la que predomina, se oficializa mediante la definición de fracción y es el que está presente en la mayoría de las tareas. Sin embargo, la concepción de fracción como operador, aunque no se la define de esta manera sino como fracción de un número, se oficializa a través de la técnica de dividir las cantidades por el denominador y multiplicar el resultado por el numerador del operador y está presente en algunas tareas. Las concepciones de fracción como razón y cociente no son considerados explícitamente, aunque aparecen en forma eventual en otras tareas. La praxeología predominante en el texto analizado es la del saber hacer, constituido por los siguientes tipos de tareas y técnicas: Determinar la fracción de un entero (vinculada al concepto de fracción como parte-todo) cuya técnica empleada fue la de división y del doble conteo de las partes. Transformar las cantidades por la acción de un operador fraccional (vinculada a la concepción de fracción como operador) cuya técnica empleada fue la de dividir las medidas iniciales por el denominador y multiplicar el resultado por el numerador del operador Distribuir en partes iguales un objeto a "n" personas (vinculada a la concepción de fracción como cociente) cuya técnica empleada fue la de la operación de división. Con respecto a las representaciones figurales, se observa la presencia de algunas, por ejemplo: los círculos divididos y el segmento de recta, que tienen como propósito representar la concepción parte-todo. El uso de otras representaciones sería más adecuado, porque ayudarían a un mejor entendimiento de dicho objeto matemático. Por ejemplo, para la representación de la fracción impropia sería mucho más apropiado emplear la concepción de cociente, ya que representarlo bajo la concepción parte-todo, implicaría entrar en contradicción con la definición de fracción como parte-todo. Realizar la representación adecuada favorecería enormemente el aprendizaje de los alumnos puesto que ellos podrían visualizar correctamente la representación de acuerdo a cada tipo de fracción.

Por otro lado, el análisis de las concepciones de fracción como: Parte-todo, operador, cociente, razón nos permitió identificar las praxeologías (tipos de tareas y técnicas empleadas para resolver las tareas vinculadas a tales conceptos, así como las tecnologías que justifican esas técnicas) que están presentes en el texto escolar.

Conclusiones

Aunque el texto escolar privilegia la concepción parte-todo, esta concepción de fracción se restringe al caso de fracción propia, dejando de lado la posibilidad de analizar el caso de fracción impropia. Además, se observa una representación figural no adecuada en relación a la fracción impropia bajo la concepción parte-todo, en tal caso, la manera adecuada de representarla figuralmente sería bajo la concepción cociente. Se infiere la presencia de dos concepciones de fracción (operador, cociente) en algunas tareas propuestas de manera implícita, sin embargo, el hecho de no explicarlas apropiadamente podría influir negativamente en el aprendizaje del objeto matemático en estudio y de otros a enseñarse con posterioridad.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1999). L´analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique Du didactique. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 14(72), 9-42.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a La noción de fracción en la Educación Secundaria*. Tesis de Maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional. México.

Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. En M. J. González, M T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (21-35). Santander, España: SEIEM.

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú.

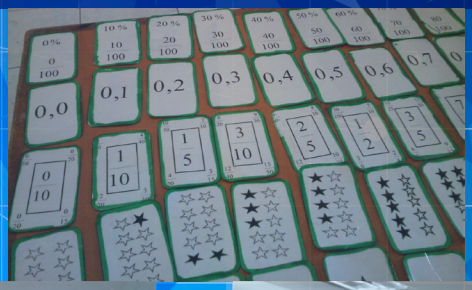
Perera, P. y Valdemoros, M (2007). *Propuesta Didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de Educación Primaria*. Investigación en Educación Matemática. México.

Quiroz, E. y Sagredo, M. (2009). *Matemática Quinto Grado de Educación Primaria. Editorial Bruño*. Perú.

Silva, M. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. Tesis doctoral no publicada, São Paulo. Brasil.

SECCIÓN 2

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



EL RIESGO COMO CONTEXTO EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Carmen Batanero y Mª Magdalena Gea
Universidad de Granada. (España)
batanero@ugr.es, mmgea@ugr.es

Resumen

Aunque nuestra experiencia con la probabilidad condicional es amplia -debido a la necesidad de utilizar la información disponible para asignar probabilidades- y estudiamos la probabilidad condicional en varios niveles educativos, la investigación didáctica señala numerosos errores sobre este concepto. En esta conferencia paralela analizamos alguna de las causas de estos errores y proponemos algunos recursos para mejorar la interpretación de la probabilidad condicional y la toma de decisiones. Igualmente sugerimos que la toma de decisión en situaciones de riesgo, que son frecuentes en la vida diaria puede ser un contexto motivador para el estudio de la probabilidad condicional.

Palabras clave: probabilidad condicional, sesgos de razonamiento, situaciones de riesgo, recursos didácticos.

Abstract

Although our experience with conditional probability is wide -due to our need to use available information to assign probabilities- and we study conditional probability at different educational levels, didactic research points to numerous errors related to this concept. In this parallel lecture we analyse some of the reasons of these errors and propose some resources to improve the interpretation of conditional probability and decision making. We also suggest that decision making under risk situations, which are frequent in everyday life is a context that helps motivate students towards conditional probability study.

Key words: conditional probability, reasoning biases, risk situations, didactical resources.

Introducción

El motivo de centrarnos en este trabajo en las situaciones de riesgo es considerarlas un contexto motivador, por la atención que dichas situaciones reciben actualmente por parte de la prensa, políticos, responsables de salud o seguridad o gestores de empresas de seguros y financieros (Borovcnik, 2015). Además, fueron los contextos de riesgo, asociados a las apuestas en los juegos de azar, los que originaron el cálculo de probabilidades. Finalmente, la competencia para manejarse en estas situaciones se considera actualmente una parte importante de la cultura estadística (Gigerenzer, 2002). Por este motivo los estudiantes requieren estrategias elementales para modelizar las situaciones de riesgo y para verbalizar y comunicar dichas situaciones.

Ejemplos de situaciones de riesgo comprensibles para los estudiantes pueden encontrarse en multitud de contextos, como, por ejemplo, accidentes (domésticos, laborales, viajes), desastres naturales, efectos secundarios de tratamientos médicos u operaciones, epidemias, situaciones psicológicas (depresión, estrés, mobbing) o legales (juicios, contratos). Estos riesgos pueden ser también positivos, por ejemplo, riesgo de overbooking, popularidad excesiva, consecución de un crédito o un proyecto, o promoción a un puesto de responsabilidad. Otros ejemplos se describen en Batanero, Ortiz, Serrano y Albanese (2017).

Marco teórico

Slovic (2000) define el riesgo como un suceso incierto que puede producir un efecto negativo o positivo sobre una persona o grupo. Borovcnik (2015) diferencia entre riesgos personales (que afectan sólo a una persona) o sociales, que en casos como epidemias o desastres naturales se dan simultáneamente. Según dicho autor, la gestión del riesgo implica cualquier acción dirigida a eliminar o controlar impacto no deseado a un nivel aceptable. Gigerenzer (2003) indica que un riesgo lleva asociada una probabilidad que puede ser frecuencial (información de una larga serie de observaciones del suceso), subjetiva (grado de creencia personal), o basada en la propensión (tendencia de un fenómeno). En estos trabajos, así como en Till (2014), se destaca el papel de la probabilidad condicional como base de la comprensión de las situaciones de riesgo, por lo que será importante que el estudiante adquiera competencia con dicho concepto para manejarse en situaciones de riesgo.

En lo que sigue, en primer lugar resumimos las principales dificultades de comprensión de la probabilidad condicional y seguidamente describimos algunos recursos didácticos que pueden mejorar la comprensión de este concepto. Finalizamos con algunas implicaciones para la enseñanza de la probabilidad.

Dificultades con la probabilidad condicional

Numerosos autores, como, por ejemplo, Díaz y de la Fuente (2005) o Díaz, Batanero y Contreras (2010), muestran que algunas decisiones incorrectas en situaciones de riesgo son debidas a sesgos de razonamiento asociados a la probabilidad condicional, que resumimos a continuación. Ello es debido a las diferentes relaciones entre dos sucesos que pueden darse cuando se evalúa una probabilidad condicional y que se confunden (Tomlinson y Quinn, 1997).

Algunos de los sesgos de razonamiento relacionados con la probabilidad condicional ocurren al suponer que una relación condicional $P(A|B)$ implica siempre una relación causal, lo que no es cierto, en general (Falk, 1986). Por ejemplo, encontramos probabilidades condicionales para evaluar relaciones diagnósticas: cuando B es un síntoma asociado a una posible enfermedad A, si la persona tiene el síntoma B, la probabilidad de que la persona sufra la enfermedad $P(A|B)$ es mayor que la probabilidad de que la sufra otra persona cualquiera $P(A)$; pero un síntoma no es una causa, sino una consecuencia de la enfermedad.

Por otro lado, algunos estudiantes tienen problemas para calcular una probabilidad condicional $P(A|B)$ si la condición B sucede después de que haya ocurrido A, aunque en la vida diaria encontramos muchas situaciones que están condicionadas por un suceso posterior a las mismas. Por ejemplo, si una prueba de

paternidad indica una alta probabilidad de que una persona sea el padre biológico de otra, la prueba genética en sí no es una causa de la supuesta paternidad sino un indicio de ella y además es posterior a la paternidad en sí misma. Otros ejemplos se dan en los juicios, donde una evidencia se encuentra después de que ocurre el delito, pero se usa como condición para emitir un veredicto sobre la posible culpabilidad del acusado. En general, siempre que aplicamos el teorema de Bayes invertimos el orden de ocurrencia en el tiempo de los sucesos condición y condicionado, y ello puede explicar la dificultad de resolver problemas que implican este teorema.

Es difícil también diferenciar las probabilidades condicionales $P(A|B)$ y $P(B|A)$, sobre todo cuando se enuncian en lenguaje ordinario (probabilidad de aprobar un examen si se ha estudiado o probabilidad de haber estudiado si se aprobó el examen). Esta confusión se conoce como *falacia de la condicional transpuesta* (Falk, 1986) y se da con frecuencia al interpretar el nivel de significación α en un contraste de hipótesis, donde α = P(Rechazar una hipótesis, siendo cierta) se confunde con P(Hipótesis cierta, cuando se ha rechazado). La falacia de la condicional transpuesta puede llevar al médico a recetar un tratamiento innecesario (a veces doloroso o agresivo) si se confunde la probabilidad de tener una enfermedad, dado un síntoma, con la probabilidad de tener el síntoma, dada la enfermedad.

Dificultades con la idea de independencia

El concepto de independencia está relacionado con la probabilidad condicional. Mientras que su definición es muy sencilla (A y B son independientes y solo si se cumple: $P(A \cap B) = P(A)xP(B)$), en la práctica no sabemos cuándo la debemos aplicar. Un ejemplo claro es la frecuencia con que las personas se abonan a un mismo número de lotería y juegan a él todos los años, aunque los números premiados anteriormente, no se retiran del bombo; por tanto, el hecho de que un número nunca haya resultado ganador no aumenta su probabilidad.

La aplicación de la inferencia estadística o la ley de los grandes números exigen que las repeticiones de un experimento sean independientes entre sí; pero en la práctica es difícil asegurar esta independencia: ¿Cómo sabemos, por ejemplo, que al lanzar sucesivamente un dado no vamos mejorando nuestra habilidad para conseguir el número que deseamos? ¿Podemos considerar a todos los votantes de un partido político o a todos los conductores de una cierta ciudad como el resultado de una serie de experimentos aleatorios idénticos e independientes? A pesar de la duda, cuando analizamos estadísticamente los resultados de las votaciones o se estudia la póliza a pagar en una compañía aseguradora, aplicamos la distribución binomial que asume la independencia de ensayos. Esto se explica porque los modelos matemáticos (en este caso la independencia) son simplificaciones de la realidad. Un modelo matemático no es nunca verdadero ni falso; lo utilizamos por su utilidad para describir una situación (Chaput, Girard y Henry, 2011).

Recursos didácticos para el estudio de la probabilidad condicional y la independencia

Hemos visto que la probabilidad condicional, importante en situaciones de riesgo, es un concepto difícil. En lo que sigue describimos algunos recursos, que podemos usar en el aula, para ayudar a los estudiantes a mejorar su razonamiento en probabilidad condicional. Dichos recursos están siendo experimentados en la enseñanza (véase, por ejemplo, Martignon y Kraus, 2009).

Consideraremos el ejemplo siguiente: En una gran ciudad una de cada 1000 personas sufre narcolepsia. Si seleccionamos al azar una persona en esta ciudad, la probabilidad de sufrir narcolepsia será $P(N)$= 1/1000. Hacemos a la persona pasar una prueba que da positiva en 99 de cada 100 personas enfermas y también en 2 de cada 100 personas sanas, es decir $P(+|N) = 0{,}99$ y $P(+|S) = 0{,}02$. A la persona en concreto la prueba le dio positiva, ¿Cuál es la probabilidad de que la persona tenga narcolepsia $P(N|+)$?

Frecuencias absolutas y tablas de contingencia

Una forma de facilitar la resolución de problemas de probabilidad condicional es cambiar el formato en que se dan los datos del problema, pasando estos datos, cuando sea posible a frecuencias absolutas, en lugar de darlos en probabilidades o en porcentajes. Ello se debe, según sugieren Gigerenzer y Edwards (2003) a que nuestra mente está mejor equipada para razonar con frecuencias absolutas (que llama frecuencias naturales) que con probabilidades o porcentajes.

Un método de simplificar los cálculos para encontrar la probabilidad pedida es pensar qué ocurriría en una muestra de 100000 personas a las que pasamos la prueba. Supongamos que las personas no tienen síntomas (es decir, estamos en una situación de revisión masiva de la población o screening). En la Tabla 1 hemos realizado los cálculos; comenzamos calculando el número de enfermos (100) en la población, de los cuáles 99 obtendrán un resultado positivo y 1 un resultado negativo. Nos quedan 99900 personas sanas, de las cuales el 2% (1998) tendrán un resultado positivo; fácilmente completamos las celdas que faltan y hemos transformado todas las probabilidades en frecuencias.

El cálculo de la probabilidad $P(N|+)$ es ahora sencillo, pues podemos simplemente aplicar la regla de Laplace dividiendo el número de enfermos en la fila de personas con resultado positivo por el número total de resultados positivos: $\mathrm{P(N\,|+)} = \frac{99}{2097} = 0{,}0472$; un resultado que sorprende a muchos. La probabilidad de estar sano, aunque la prueba en un screening sea positiva, es muy alta; en el ejemplo, el complementario del anterior, es decir, 0,9527. La explicación es que, aunque la prueba sea muy fiable, son muchas las personas sanas que se someten a ella y, por tanto, hay muchos *falsos positivos*.

Tabla 1. *Número de personas sanas y enfermas en una muestra de 100000 personas según el resultado de una prueba (prevalencia= 0,001)*

	Test +	Test -	Total
Sufren narcolepsia	99	1	100
No sufren narcolepsia	1998	97902	99900
Total	2097	97903	100000

Diagramas en árbol y visualizaciones

La traducción de los datos de la Tabla 1 a un diagrama en árbol es aún más efectiva, pues nos ayuda a pensar en la secuencia temporal de los sucesos y separa claramente las dos subpoblaciones en estudio. En

la Figura 1 trabajamos directamente con frecuencias absolutas y llegamos a la misma conclusión que con la tabla, pero de un modo más visual. En realidad, cualquiera de los dos métodos nos ha hecho transformar un problema típico de aplicación del teorema de Bayes en un problema de cálculo de probabilidades simples (regla de Laplace).

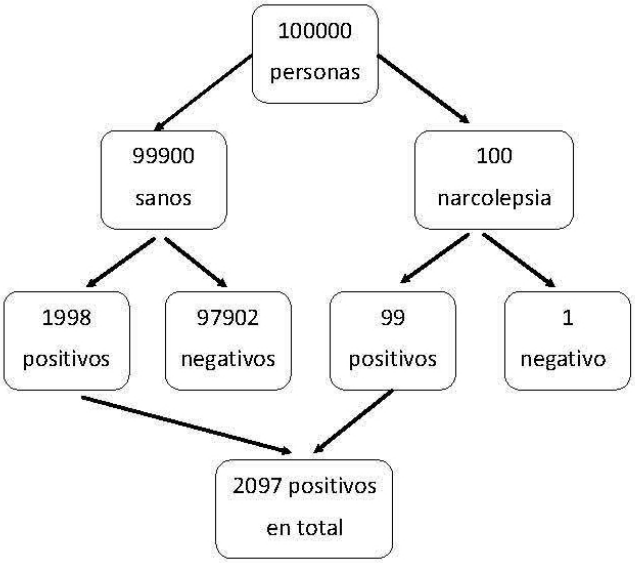


Figura 1. Visualización del problema mediante diagrama en árbol del ejemplo de narcolepsia

Por otro lado, la visualización de los datos en un diagrama de barras apilado (Figura 2) nos permite introducir la idea de riesgo relativo, comparando dos riesgos:

- Riesgo de obtener una prueba negativa cuando se sufre de narcolepsia $P(-|N) = 0{,}01$;
- Riesgo de obtener una prueba negativa cuando se está sano. $P(-|S) = 0{,}98$;

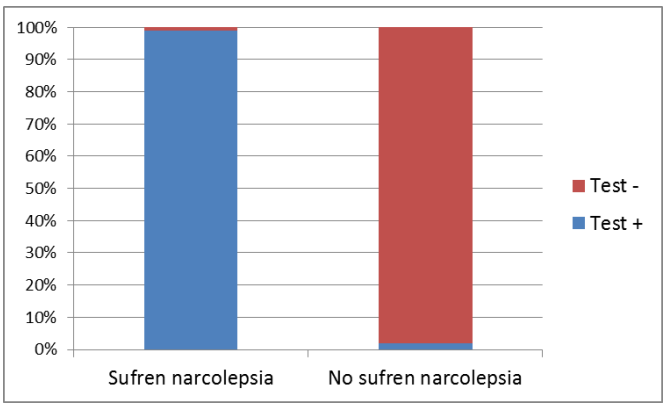


Figura 2. Visualización del problema mediante diagrama de barras apilado del ejemplo de narcolepsia

Estos riesgos pueden expresarse y compararse de diversas formas, que no tienen igual impacto en la persona que recibe la información; por ejemplo:

- $\frac{P(-|S)}{P(-|N)} = \frac{0{,}98}{0{,}01} = 98$; La razón entre el riesgo de un resultado negativo en las personas sanas respecto a las enfermas es 98 a 1;
- Por el contrario $\frac{P(+|S)}{P(+|N)} = \frac{0{,}02}{0{,}99} = 0{,}0202$: La razón entre el riesgo de un resultado positivo en las personas sanas respecto a las enfermas es 202 por cada 10000.
- Por cada 10000 resultados positivos en personas enfermas obtenemos 202 en personas sanas;
- Hay una reducción de 798 resultados positivos por cada 10000 en las personas sanas respecto a las enfermas.
- Se reduce el 7,98% de resultados positivos en las personas sanas, etc.

Estas actividades ayudan también a interpretar correctamente, en una situación de riesgo, las probabilidades pequeñas, que con frecuencia se desestiman, pero pueden ser importantes cuando un experimento (como es la prueba médica) se repite con frecuencia. Así, por ejemplo, supongamos que el riesgo de un accidente de tráfico tiene una probabilidad P(A)= 0,00002 (2 en 100000 viajes). Este riesgo es casi despreciable. Pero si consideramos una operación de tráfico de salida de vacaciones, cuando se producen, digamos un millón de desplazamientos, la probabilidad de que no se produzca ningún accidente sería:

$$P(\bar{A}) = (1 - P(A))^{1000000} = (0{,}99998)^{1000000} = 0{,}0000000020607$$

Por tanto, con casi toda seguridad (0,999999998) se producirá al menos un accidente, a pesar de la baja probabilidad en cada vez aislada que realizamos la actividad.

Simulaciones y programas de cálculo

Otra ayuda importante son los numerosos programas de cálculo y applets disponibles en Internet que nos permiten introducir una metodología exploratoria y activa en el aula, reduciendo los cálculos tediosos. Tienen un papel importante en los casos en que las soluciones de probabilidad chocan con nuestra intuición. Por ejemplo, se puede utilizar uno de los numerosos programas de cálculo del teorema de Bayes, como el disponible en http://www.ugr.es/~jsalinas/bayes.htm para analizar el problema de la narcolepsia, pudiendo incluso variar las probabilidades implicadas.

Es importante también recordar que en toda simulación se lleva a cabo una actividad de modelización (Chaput, Girard y Henry, 2011). Por ello el profesor debe poner atención al aprendizaje de los diferentes pasos en la modelización: Observación de la realidad; construcción del modelo matemático, trabajo con el modelo e interpretación de los resultados del modelo.

Conclusiones

Las reflexiones anteriores nos llevan a concluir la importancia de reforzar la enseñanza de la probabilidad condicional y conectarla con contextos que el estudiante experimenta en su vida cotidiana. Este puede comprender la importancia de saber interpretar correctamente un diagnóstico o tomar una decisión sobre un posible tratamiento; comprende que cuando se acude a una consulta médica, el diagnóstico depende de los diferentes síntomas, estilo de vida del paciente, edad y otros factores. Estudios sobre el posible efecto de riesgos como el fumar, tomar drogas o estar en sobrepeso sobre la salud se pueden utilizar para motivar el estudio de la probabilidad, a la vez que contribuir a la educación para la salud.

Otros contextos cotidianos engloban desde el pronóstico del tiempo, resultados de partidos o votaciones, calificaciones en exámenes, veredictos en juicios, o cambio climático. No tenemos excusa para seguir repitiendo únicamente problemas sobre juegos de azar o, lo que es peor, problemas sin ningún contexto, en que la finalidad es puramente adquirir una erudición matemática.

Como indica Borovcnik (2015), las situaciones de riesgo pueden enriquecer la enseñanza de la probabilidad, pero aún necesitamos encontrar caminos para introducirla en las aulas y ayudar a los estudiantes a mejorar su percepción del riesgo y la forma de afrontarlo.

Algunos investigadores, como Sánchez y Orta (2015), han realizado experiencias docentes utilizando estos contextos y evaluando el nivel de razonamiento de los estudiantes y su evolución en las experiencias. Sus resultados son alentadores y nos indican la posibilidad de utilizar estas situaciones para mejorar el razonamiento probabilístico de los estudiantes. Esperemos que otros profesores e investigadores contribuyan en el diseño de este tipo de tareas y su incorporación en el aula.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Ortiz, J., Serrano, L. y Albanerse, V. (2017). Razonamiento sobre probabilidad condicional en situaciones de riesgo. *Suma, 83,* 73-80.

Borovcnik, M. (2015). Risk and decision making: The "logic" of probability. *The Mathematics Enthusiast, 12*(1), 113-139.

Chaput, B., Girard, J. C. y Henry, M. (2011). Frequentist approach: modelling and simulation in statistics and probability teaching. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 85-95). New York: Springer.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon, 59*, 245-260.

Díaz, C., Batanero, C. y Contreras, J, M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 26*(2), 149-162.

Falk, R. (1986) Misconceptions of statistical significance, *Journal of Structural Learning, 9(*1), 83-96.

Gigerenzer, G. (2002). *Calculated risks: how to know when numbers decieve you*. New York: Simon & Schuster.

Gigerenzer, G. (2003). *Reckoning with risk: learning to live with uncertainty*. Penguin UK.

Gigerenzer, G. y Edwards, A. (2003). Simple tools for understanding risks: from innumeracy to insight. *British Medical Journal*, *327*(741-744).

Martignon, L. y Krauss, S. (2009). Hands on activities with fourth-graders: a tool box of heuristics for decision making and reckoning with risk. *International Electronic Journal for Mathematics Education, 4*(3), 117–148.

Sanchez, E. y Orta, A. (2015). Levels of reasoning of middle school students about data dispersion in risk context. *The Mathematics Enthusiast, 12*(1), 275-289.

Slovic, P. E. (2000). *The perception of risk.* Londres: Earthscan Publications.

Till, C. (2014). Fostering risk literacy in elementary school. *Mathematics Education, 9*(2), 83-96.

Tomlinson, S. y Quinn, R. (1997). Understanding conditional probability. *Teaching Statistics, 19*(1), 2-7.

EL PROCESO DE TRANSNUMERACIÓN CON PROFESORES DE MATEMÁTICA EN EL ANÁLISIS DE DATOS

Solangela Natividad López Huayhualla, Katia Vigo Ingar
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
solangelalopez@hotmail.com, kvigo@pucp.pe

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo analizar los procesos de transnumeración en profesores de matemática en el análisis de datos, como parte del Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999). La metodología de la investigación fue de tipo cualitativa, específicamente un Estudio de Caso. El estudio conforma una tesis de Maestría, en la cual se implementaron tres actividades y participaron 14 profesores de matemática de la Educación Básica Regular (EBR) del nivel secundario. En el documento presentamos el análisis de la tercera actividad realizada con los profesores, partir de la cual podemos afirmar que los grupos percibieron la variación mediante el trabajo con dos conjuntos de datos y movilizaron diferentes nociones estadísticas, logrando comprender información relevante mediante el análisis de datos.

Palabras claves: pensamiento estadístico, variación, formación docente.

Abstract

The present research aims to analyze the processes of trans-numeration in mathematics teachers' data analysis, as part of the Wild and Pfannkuch's Statistical Thinking (1999). A qualitative methodology was used, specifically a Case Study. The study consists of a Masters' degree thesis. In the study, 14 mathematics teachers of the Regular Basic Education (EBR) at the secondary level participated in three implemented activities. In the report we present the analysis of the third activity performed with the teachers, from which we can affirm that the groups perceived the variation by working with two sets of data and mobilized different statistical notions. So, they could understand relevant information through data analysis.

Key words: statistical thinking**,** variation, teacher training.

Introducción

El presente es el reporte de una investigación de la Maestría Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y forma parte del proyecto internacional desarrollado entre los grupos de investigación DIMAT de la PUCP y PEAMAT de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo – Brasil (PUC-SP) titulado: "Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes

Tecnológicos PEAMAT/DIMAT" y aprobado por la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo 2013/23228-7 y por PI0272 (PUCP).

El estudio surge a partir de lo establecido en diversas investigaciones, con respecto a la importancia de la formación de profesores en la enseñanza de la estadística, sugiriendo el énfasis en la comprensión y percepción de qué es y de qué trata la variación, desde una perspectiva didáctica (Cooper y Shore, 2010). La enseñanza de la estadística debe implicar más que solo realizar la construcción de tablas con su respectivo gráfico, o realizar el cálculo de medidas de resumen. Es necesario que el estudiante comprenda por qué es necesario pasar de una representación a otra, así como comprender la relación que hay entre la representación de un concepto estadístico y su propio significado dentro de un contexto. En base a tales dificultades decidimos investigar con el objetivo de analizar los procesos de transnumeración realizados por profesores de matemática en el análisis de datos.

Marco Teórico

El presente estudio se centra en los procesos de transnumeración realizados por los profesores de matemática en el análisis de datos, al construir e interpretar diferentes representaciones que lleven a reconocer y comprender la información que brinda el conjunto de datos para dar respuesta a una pregunta central. Por ello, el estudio se centra en los fundamentos teóricos Wild y Pfannkuch (1999), quienes definen la transnumeración como "un proceso dinámico para cambiar representaciones que engendren comprensión" (p.6). De esta manera, la transnumeración implica la organización y el resumen de los datos, trata de reconocer que muchas representaciones son necesarias para la comprensión de una situación real y la detección de nueva información. De modo que, en esa búsqueda de información se pueden llevar a cabo muchos procesos de transnumeración, entendiendo que el producto de ello es una forma de representar algo de esa base de datos.

Por ejemplo, entendemos como procesos de transnumeración el ordenar los datos, hacer un recuento, realizar tabla de frecuencias simples, trazar gráficos de dispersión, calcular los coeficientes de correlación, determinar valores de las medidas de los datos, como las medidas de dispersión, centralización o de posición; es decir, comprimir los datos originales mediante un valor único, agrupar y crear nuevas variables o nuevas categorías, en otras palabras, valores que representen elementos significativos de todo el conjunto de datos del sistema real. Cabe decir, que estas representaciones además de poder realizar en el proceso de analizar datos también se pueden generar al final de haber analizado los datos para explicar resultados obtenidos, por ejemplo, mediante una tabla o alguna organización visual como un pictograma.

Además de ello, los investigadores explican que la capacidad para llevar a cabo la transnumeración se verá limitado por las herramientas estadísticas que cada uno posee, es decir, mientras más herramientas se tenga al alcance, se podrá aplicar más técnicas en la búsqueda de información de los datos. Por ejemplo, si el estudiante posee conocimientos de cómo construir una tabla, calcular y comprender las medidas de tendencia central, las medidas de variación, un gráfico de puntos, calcular las medidas de posición, entre otros, tendrá mayor capacidad para realizar más procesos de transnumeración. Por lo que, es importante mencionar la importancia de que los estudiantes, en este caso, comprendan realmente cada uno de los conceptos estadísticos mencionados.

Asimismo, aunque no se sepa de antemano qué herramientas estadísticas serán más útiles en el análisis de los datos, el uso de estas herramientas o técnicas transnumerativas (Chick, 2004) podrá ser guiado por la pregunta que se desea responder y el tipo de datos que se tiene. Por esta razón, es importante la pregunta que se plantee en una situación, porque a partir de ella se considerará qué herramientas estadísticas serán necesarias para explorar el conjunto de datos, entender la información que encierra y responder finalmente al objetivo planteado.

Metodología de Investigación y Sujetos de la Investigación

La presente investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, específicamente el estudio de caso. Se desarrolla con un grupo de profesores de matemática, cuyo foco de atención es responde cómo se presentan los procesos de transnumeración en el estudio de la variación. Los datos en la implementación de la investigación se fueron registrando mediante diversos instrumentos como fichas de observación, fichas de respuestas, así como el empleo de fotografías, audios y videos.

Respecto al tratamiento de los resultados, las unidades de análisis establecidas han sido las acciones de los profesores, aquellas acciones correspondientes a los procesos de transnumeración en el estudio de la variación. Y las sub unidades de análisis, han sido conformadas por las acciones de los profesores seleccionados del total de profesores participantes. Asimismo, realizamos el análisis de los datos en contraste con las proposiciones hechas sobre la transnumeración, y el contraste de los resultados con la misma teoría.

En referencia a ello, nuestro caso, la variación, se caracteriza como descriptivo, y más aún por tratarse de la implementación de actividades sobre variación, tiene carácter exploratorio. Así, en referencia al análisis e interpretación de nuestros resultados, nos enfocamos en validar que los resultados obtenidos realmente revelen las acciones que llevaron a cabo los profesores de matemática, específicamente el cómo se presentó la transnumeración en el estudio de la variación, respondiendo a una validación conceptual e interna. (Ponte, 2006)

Asimismo, el estudio se llevó cabo con 14 profesores de matemática de educación secundaria, conformado por 4 mujeres y 10 varones, profesores con nociones del contenido específico de estadística, quienes se dedican a enseñar sólo a estudiantes de educación secundaria, cuyas edades fluctúan entre los 12 y 16 años. Así, los profesores formaron grupos de dos integrantes, logrando establecerse siete grupos en total, sin embargo, de los siete grupos conformados se analizaron los trabajos de dos de ellos por participar en todas las actividades programadas y haber desarrollado todos los ítems establecidos en cada una, denominándolos Grupo 1 y Grupo 2.

Análisis de la actividad y consideraciones finales

La actividad está conformada por 4 ítems y tiene el objetivo de analizar la variación en dos conjuntos de datos mediante diferentes representaciones, como el gráfico de puntos utilizando el geogebra. En la actividad se presenta una situación relacionada a las notas de dos estudiantes, y la pregunta central de la situación se orienta a determinar quién de ellos debe obtener un reconocimiento por tener un esfuerzo constante mediante sus notas (Figura 1).

Un profesor de matemática quiere reconocer el esfuerzo constante entre dos estudiantes del 4° de secundaria en el área de matemática, Pablo y Raúl. Considerando las notas obtenidas por los estudiantes en el transcurso de las clases, **¿quién de los dos estudiantes cree que tendrá el reconocimiento?**

NOTAS DE MATEMÁTICA	
NOTAS DE PABLO	**NOTAS DE RAÚL**
17	19.5
15.5	17
16	16
17.5	18.5
16.5	13
19.5	20
19	18
20	19
18	

Figura 1. Situación propuesta en la actividad 03

En esta actividad se realizó el trabajo con dos conjuntos de datos para percibir y comparar la variación de ambos conjuntos mediante sus diferentes representaciones. Para su desarrollo inducimos la construcción del gráfico de puntos, solicitando a los grupos que realicen dicha representación con el software geogebra:

> *Según las orientaciones en la guía del geogebra construya un gráfico de puntos sobre las notas de Pablo y Raúl.*

A partir de ello, los grupos orientados por la pregunta central construyeron y analizaron diferentes representaciones sobre las notas de Pablo y Raúl, como por ejemplo: el gráfico de puntos, las líneas visuales verticales, la media, la median, así como la tabla de datos en la hoja de cálculo. (Ver figura 2)

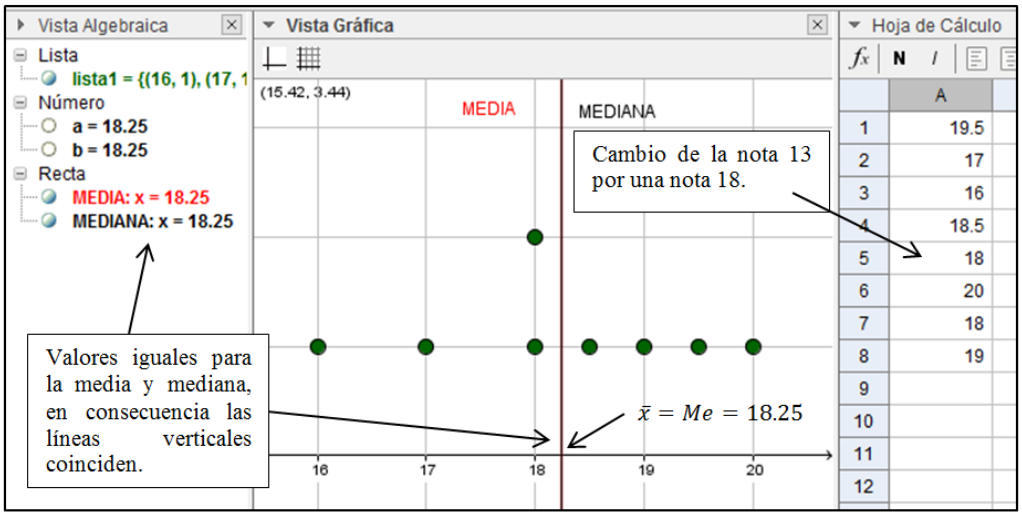


Figura 2. Representaciones realizadas por el Grupo 2 sobre las notas de Raúl

A partir de los valores determinados de la media de las notas de ambos estudiantes, el Grupo 2 comparó sus valores y los relacionó con la distribución en el gráfico de puntos. Al observar que los valores de la media eran muy cercanos, el grupo decidió determinar la mediana con el comando del geogebra, pero también de forma manual, tal como se muestra en la figura 3:

Figura 3. Determinación de la media de las notas de Pablo y Raúl por el Grupo 2

Inicialmente en este ítem el grupo no hizo referencia acerca del significado de cada medida, ni explicó por qué consideró necesario determinar las medidas indicadas. Consideramos que ello se debe a que la comparación entre las representaciones de la media se realizó teniendo en cuenta sólo los valores numéricos. (Ver figura 4)

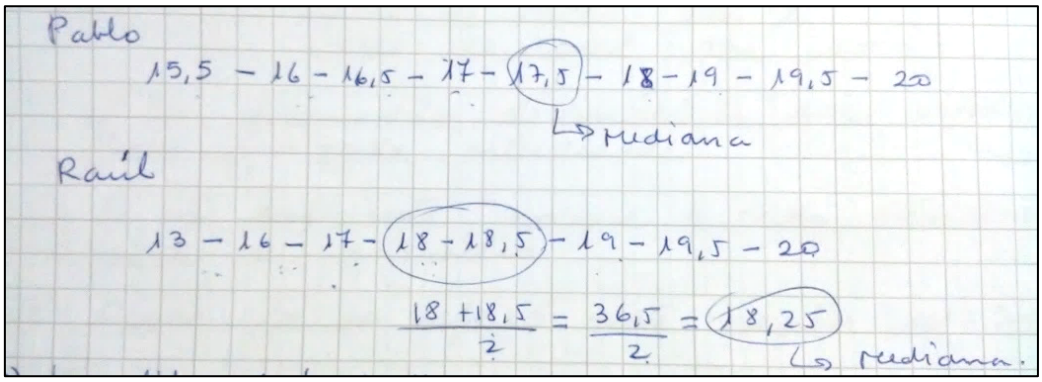


Figura 4. Ordenamiento de los datos realizado por el Grupo 2 para determinar la mediana

Se observó que los grupos iban percibiendo la variación de los datos al analizar las diferentes representaciones y su significado respecto a ello. Por ejemplo, el Grupo 1 realizó una comparación entre la media y la mediana, tanto de sus valores numéricos como de sus representaciones visuales con las líneas verticales en el gráfico de puntos. Asimismo, consideró la distribución de los datos en el gráfico de puntos para determinar que en las notas de Raúl se observa más dispersión debido a la nota 13, lo cual demuestra que el grupo percibió la variación de las notas de cada estudiante. (Ver figura 5)

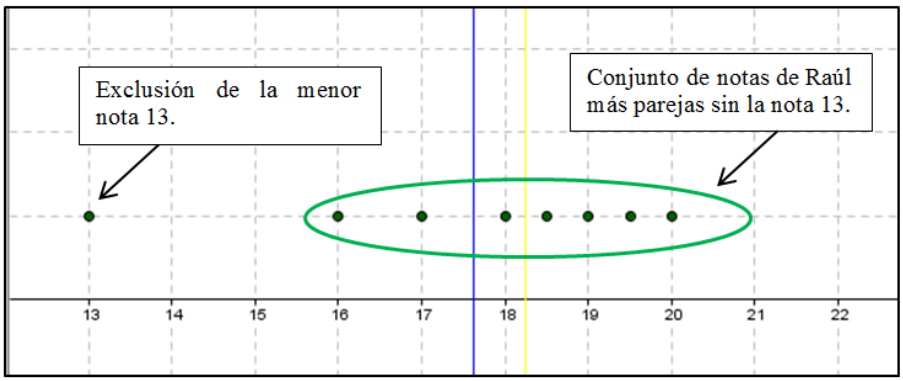


Figura 5. Observación del Grupo 1 sobre las notas de Raúl excluyendo la nota más baja 13

En las respuestas del Grupo 2 observamos por ejemplo el acercamiento de las líneas visuales de cada media y mediana, en el caso de las notas de Pablo (ver figura 6) y las notas de Raúl (ver figura 7).

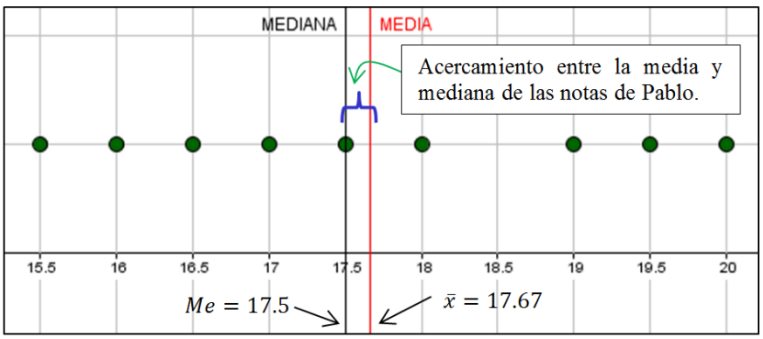


Figura 6. Comparación de los valores de la media y mediana de las notas de Pablo realizadas por el Grupo 2

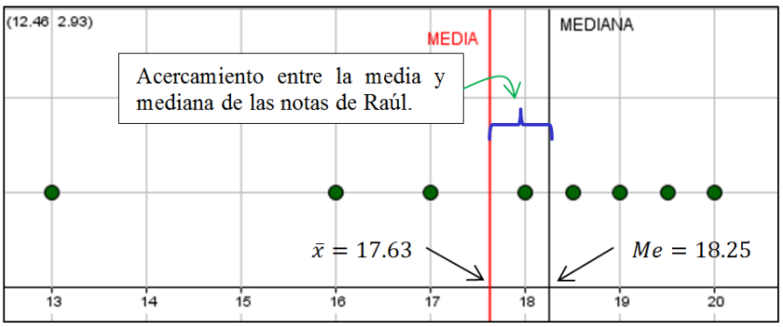


Figura 7. Comparación de la media y mediana de las notas de Raúl realizadas por el Grupo 2

Además de ello, en sus respuestas observamos que el Grupo 2 sí consideró las desviaciones entre las notas. Por ejemplo, observando el gráfico de puntos, mencionó que las distancias entre las notas de Raúl con la media, eran mayores que las distancias entre las notas de Pablo respecto a su media, como se muestra en la figura 8:

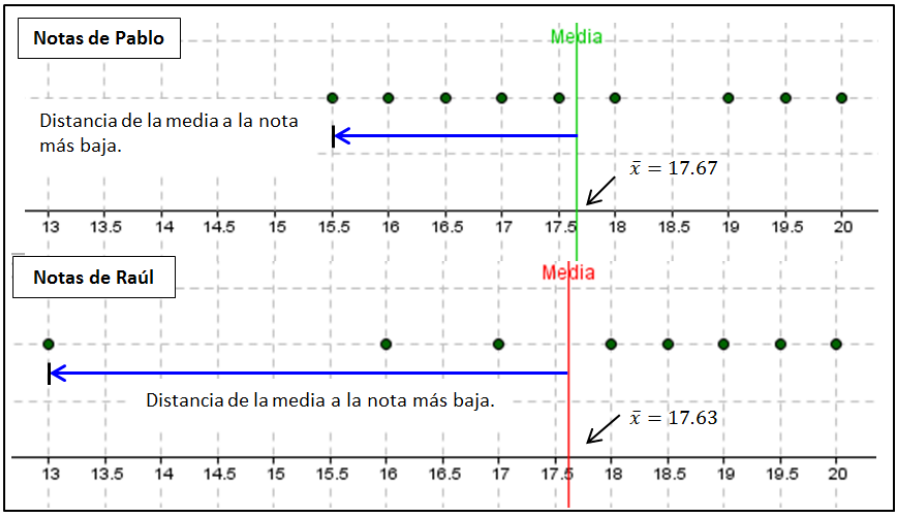


Figura 8. Comparación de las desviaciones entre la menor nota y la media en las notas de Pablo y Raúl realizado por el Grupo 2

De esta manera, consideramos que los grupos analizaron y relacionaron las diferentes representaciones realizadas, analizando la distribución de los datos en el gráfico de puntos, en relación con los valores de la media y la mediana. Así el grupo explicó que en las notas de Raúl había mayor variación que en las notas de Pablo, debido a su nota 13. De acuerdo a ello, podemos afirmar que guiados por la pregunta central, el grupo realizó y analizó las diferentes representaciones del grupo de datos en busca de mayor comprensión, lo que permitió identificar la información que estas brindaban y responder correctamente la pregunta.

En conclusión, los profesores percibieron la variación mediante el análisis de los conjuntos de datos, teniendo una visión completa y clara sobre el conjunto de datos como un todo, comprendiendo además la importancia de relacionar todas las representaciones y entender el significado que tiene cada una, así como la información que brinda. Ello llevó a los profesores a comprender cuál era el sentido de cambiar o recurrir a otras representaciones, es decir, por qué transnumerar. Hemos corroborado que mientras más comprensión se tenga de las diferentes nociones estadísticas, éstas se convierten en herramientas que permiten tener mayor capacidad para transnumerar, tal como lo establece Wild y Pfannkuch (1999). La transnumeración es practicada por los profesores, ellos constantemente transnumeran, por ejemplo construyen tablas, diagrama de barras, pictogramas y medidas de resumen, sin embargo, este proceso de transnumerar no es reflexivo, es decir, se construyen representaciones sin el análisis, ni la concepción de esa representación como un todo, dejando de lado la interpretación del significado de cada representación según el contexto dado.

Referencias bibliográficas

Chick, H. (2004). Tools for Transnumeration: Early stages in the Art of Data Representation. *Mathematics education for the third millennium: Towards* 2010, 167-174. Recuperado de https://www.merga.net.au/documents/RR_chick.pdf

Cooper, L. y Shore, F. (2010). The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of Statistics Education*. *18* (2). Recuperado de http://www.amstat.org/publications/jse/v18n2/cooper.pdf>.

Ortiz, J. (Ed.) (2011). *Investigaciones Actuales en Educación Estadística y Formación de Profesores*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/LIBRO.pdf

Ponte, J. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, *19*(25).

Wild C. y Pfannkuch M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, *67* (223 – 265). [Traducido al castellano del inglés]

CONSTRUCCIÓN DE PENSAMIENTO FUNCIONAL: UNA EXPERIENCIA EN UN PROGRAMA DE ENRIQUECIMIENTO EXTRACURRICULAR

Mónica Adriana Pineda Ballesteros, Solange Roa Fuentes
Universidad Industrial de Santander, EDUMAT, UIS. (Colombia)
monypin23@gmail.com, roafuentes@gmail.com

Resumen

Esta investigación aborda aspectos relacionados con la construcción de pensamiento funcional que desarrolla un grupo de individuos con talento matemático potencial (GTM). Se presentan definiciones y elementos del pensamiento funcional, desde el marco *Early Algebra* y los Principios y Estándares para la Educación Matemática (Thales, 2003). El objetivo de esta investigación es identificar y describir las relaciones funcionales (Recurrencia, Correlación y Covariación) que pueden evidenciar estudiantes entre 9 y 14 años, al resolver Tareas que involucran situaciones funcionales. Estas tareas están diseñadas para motivar una actividad cognitiva centrada en el análisis de cantidades que covarían (Blanton y Kaput, 2011; Smith, 2008). Los estudiantes que participaron en el GTM evidenciaron desarrollo de pensamiento funcional a partir del estudio de las relaciones funcionales Recurrencia y Correlación que se plantearon en las Tareas.

Palabras clave: pensamiento funcional, talento matemático potencial.

Abstract

This research tackles aspects related to the construction of functional thinking developed by a group of students with potential mathematical talent (GTM). Definitions and elements of functional thinking are presented, framed by the Early Algebra and the Principles and Standards for School Mathematics (Thales, 2003). The objective of this research is to identify and describe the functional relations (Recurrence, Correlation and Co-variation) that 9 to 14 -year-old- students have shown, when solving tasks involving these functional situations. These tasks are designed to motivate a cognitive activity focused on the analysis of co-variation amounts (Blanton and Kaput, 2011; Smith, 2008). The students who participated in the GTM demonstrated a functional thinking development based on the research on the functional relations recurrence and correlations, set out in the tasks.

Key words: functional thinking, potential mathematical talent.

Introducción

Este reporte hace parte de una investigación en curso, que estudia el desarrollo del pensamiento funcional, visto desde la perspectiva de Cañadas y Molina (2016) como "un proceso cognitivo… basado en la

construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (p. 3). Al poner en marcha esta propuesta, fue creado un contexto extracurricular al interior de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga, Colombia), llamado Grupo Talento Matemático (GTM - UIS), con el objetivo de generar un espacio de enriquecimiento que en particular potencie el desarrollo del pensamiento funcional. Este tipo de pensamiento es asociado al talento matemático potencial, a partir del estudio de Tareas que involucran relaciones funcionales que están fuera del contexto escolar y que pueden potenciar el desarrollo del talento matemático. Por tanto se propone describir los procesos de Recurrencia, correlación y Covariación que desarrollan individuos en el GTM – UIS. También se busca diseñar Tareas que potencien el pensamiento funcional y fomenten su desarrollo a través de la construcción recursiva de patrones, la covariación y la correlación de variables.

En esta investigación se resalta la necesidad de enriquecer la experiencia matemática en primaria y los primeros años del bachillerato, brindando experiencias que vayan más allá de la aritmética y le proporcione a los estudiantes herramientas para fortalecer su razonamiento matemático. Al respecto el Thales (2003) menciona que "También, aquellos alumnos con especial interés por la disciplina o excepcional talento para ella, pueden necesitar programas más ricos o más recursos para estimularlos y comprometerlos" (p. 14).

A continuación se presentan los aspectos teóricos que fundamentan la investigación. Los elementos conceptuales definen la perspectiva de esta investigación sobre: el pensamiento funcional y el talento matemático; uno de los elementos centrales es el talento matemático potencial. Para este trabajo se ha adoptado la definición que presenta la Organización de Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la cultura (UNESCO, 2004), donde el talento potencial es definido como:

Aquel que aún no se ha desarrollado o evidenciado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su talento o talentos, pero por uno o más factores no lo ha podido afirmar en sus esquemas de acción. (p.27)

Esta postura encaja con la que aquí se propone, pues en ella se considera la familia, la sociedad, la condición económica, el colegio, entre otros, como factores que influyen positiva o negativamente en la evolución o retroceso del talento potencial de un individuo.
Otro elemento de gran relevancia en este trabajo es el pensamiento funcional y el estudio de su desarrollo a partir de las tres relaciones funcionales expuestas por Smith (2008) y trabajadas ampliamente por Blanton y Kaput (2011), Pinto (2016), Bastías (2016), entre otros. La más elemental de ellas, desde el punto de vista de Cañadas y Pinto (2016) es la Recurrencia que implica encontrar el patrón de variación. Esta relación es la más reportada en las investigaciones que implican desarrollo de pensamiento funcional. La segunda relación es la Correspondencia que se basa en la identificación de una correlación entre variables. Según Bastías (2016) esta relación busca que el alumno logre identificar la notación algebraica convencional. La última es la Covariación, vista como la relación que representa mayor dificultad para los estudiantes; esta relación se basa en el estudio de cómo dos cantidades varían simultáneamente y cómo los cabios en los valores de una variable producen cambios en la otra. Esto implica que la atención se centra en los cambios de las variables de manera independiente. Las relaciones funcionales descritas permiten dar cuenta de cómo puede evidenciarse el pensamiento funcional en la producción de los estudiantes que hacen parte del GTM-UIS.

La figura que se presenta a continuación, reúne los principales elementos conceptuales que sustentan esta investigación; en ella se muestra una composición que incluye el talento matemático potencial como foco central; las tres relaciones funcionales propuestas por Smith (2008): Recurrencia, Correspondencia y Covariación, que dan soporte al desarrollo del pensamiento funcional. Y como pilares fundamentales la familia, la escuela regular y los programas extracurriculares. Estos últimos elementos, desde el punto de vista de esta investigación representan una importante y decisiva influencia en el desarrollo del talento matemático potencial de los estudiantes; lo anterior de acuerdo con Feldhusen (2003) quien afirma que "… la influencia de las personas, los recursos, los ambientes es una parte del desarrollo sistemático del talento" (p.44).

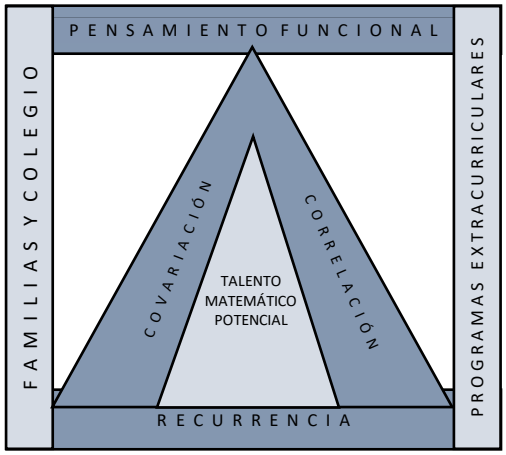


Figura 1. Relación entre los principales elementos que potencian el talento matemático.

Método

Esta investigación es de tipo cualitativo, toma como fundamento el estudio de casos (Stake, 2010). Este enfoque permite analizar a los estudiantes que en el desarrollo de las Tareas evidencian en su actividad la presencia de relaciones funcionales.

Las unidades de estudio serán 7 estudiantes de instituciones públicas de Bucaramanga (Colombia). La elección de tan solo 7 casos se justifica por la necesidad de delimitar las nuevas etapas y categorías, que permiten focalizar la investigación con mayor precisión, hacia las relaciones funcionales presentes en el desarrollo de las Tareas, y la Actividad generada por los estudiantes a la hora de abordarlas. Además esta perspectiva metodológica sustenta el ejercicio investigativo propuesto, que busca identificar y describir lo más explícitamente posible las estrategias que caracterizan el desarrollo del pensamiento funcional; particularmente en el desarrollo de Tareas matemáticas que impliquen la participación de los estudiantes en una situación funcional.

Esta investigación se desarrolla en tres Fases: la primera es la construcción del marco conceptual y el diseño de tareas. En esta fase se busca aclarar el rumbo de la investigación y en segundo lugar, dar peso conceptual y teórico a cada uno de los elementos que la sustentan. El diseño de tareas, entendiendo la

Tarea desde el punto de vista de Diezmann (2004) quien sugiere que: "las tareas matemáticas retadoras para estudiantes dotados deben ser auténticas tareas que les ofrezcan oportunidades para emular la práctica de los matemáticos, en un nivel menos sofisticado" (p. 14); en este sentido, se considera además que cada reto debe ser suficiente para cada individuo, dependiendo de su necesidad y su potencial. La segunda fase es la implementación de tareas que tiene dos aplicaciones: la primera en el segundo semestre de 2016 con un total de 21 estudiantes, esta aplicación se implementó durante quince sesiones de tres horas cada una; la segunda aplicación se dio en el primer semestre de 2017, con 7 estudiantes que fueron escogidos por su rendimiento, grado de compromiso y participación en la primera aplicación, en esta aplicación se trabajó durante diez sesiones de tres horas cada una. La tercera y última fase incluye el análisis de la producción intelectual de los estudiantes, para esta última fase se toman en cuenta grabaciones que fueron hechas a lo largo de la experiencia y las producciones escritas de los estudiantes.

Ejemplo y Análisis

Las tareas que se desarrollaron durante las dos implementaciones del GTM-UIS fueron pensadas y diseñadas con el fin único de desarrollar pensamiento funcional en los estudiantes. Estas Tareas fueron diseñadas para desarrollarse en cuatro momentos: El primer momento consiste en motivar la participación de los estudiantes en una situación funcional, el segundo momento busca centrar la atención de los estudiantes en las relaciones entre variables que se definen en la Tareas; en este momento se plantean preguntas que motiven la búsqueda de relaciones (Recurrencia, Correlación y Covariación). El tercer momento consiste en el registro de los valores correspondientes a las cantidades que varían, estos registros pueden darse mediante una tabla, un dibujo, una representación numérica o verbal, el registro que se elija va a depender de las condiciones de la Tarea y las habilidades del estudiante. El cuarto y último momento es la construcción de una expresión, con este momento no se busca que el estudiante llegue a una expresión algebraica, si no, que pueda comprender la manera en que se va construyendo el patrón y pueda establecer las relaciones que existen entre las variables. La expresión que surja a partir del recorrido por los anteriores momentos puede ser verbal, icónica, numérica, entre otras. A continuación se presenta el análisis de un fragmento de una de las tareas que fueron implementadas en el GTM-UIS, para éste análisis se nombra a los estudiantes como E1, E2, E3 y E4.

1. Participar en una "Situación Funcional". Es posible que inicialmente se evidencie la construcción de relación de Recurrencia por parte de los estudiantes. En el instante en que el estudiante observa las primeras imágenes gráficas, y continúa generando las serpientes correspondientes a los días consecutivos.

Tarea

En el zoológico de reptiles de la Universidad Estatal están estudiando el crecimiento de una serpiente Pitón cada día. Para ayudarlos, debes encontrar el número de partes que tendrá una serpiente en crecimiento cada día. Debes tener en cuenta que cada triángulo equivale a una parte del cuerpo.

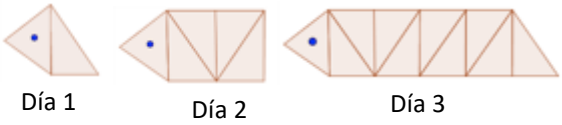
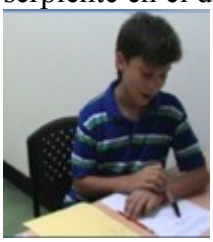


Figura 2. Tarea de la serpiente (Adaptación de Blanton y Kaput, 2011, p.11)

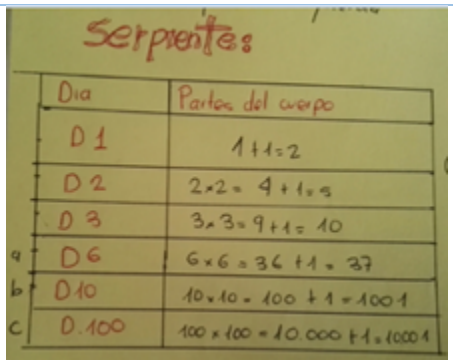
¿Cuántas partes tendrá una serpiente en el día 6, en el día 10, el día 100?
Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 100.
¿Cómo lo harías?

2. Centrar la atención en la relación entre dichas variables. La actividad generada por la Tarea de la serpiente fue analizada mediante la tabla que aparece a continuación. Allí se definen tres columnas: Pregunta (planteada durante una entrevista grabada mediante vídeo-cámara), Evidencia (Transcripción de videos y audios) y Relación Funcional. De tal manera que se da cuenta de la actividad de los estudiantes a la luz de las relaciones funcionales.

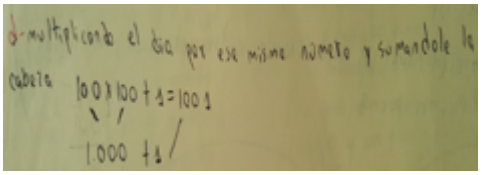
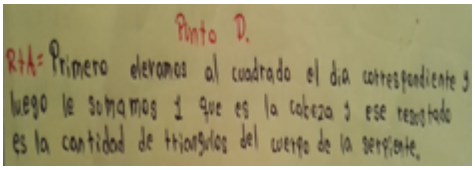
Pregunta	Evidencia	Relación Funcional
¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 6? 	Inv.: ¿Qué idea tenías? E2: Que en el día 1 tenía dos triángulos, a ese le sumaba cuánto le faltaba para llegar al día 2 y a ese le sumaba cuánto le faltaba para el siguiente [Indicaba en su hoja de trabajo]. Pero después vi que si seguíamos así no podríamos terminar, porque no es fácil saber para un número grande. Entonces mi compañera se dio cuenta de otra cosa.	En la primera intervención de E2 se puede observar una relación de **Recurrencia**. El estudiante se centra en encontrar el patrón de variación, tal y como se observa en la figura. Cuando comprende que este método le llevará mucho tiempo decide abandonarlo y acogerse al de su compañera.

3. Registrar valores correspondientes a las cantidades que varían.

Pregunta	Evidencia	Relación Funcional
	E3: Observando la figura y el número de días se eleva a la dos y el resultado es el número de partes del cuerpo. Inv.: ¿Siempre se eleva al cuadrado? E3: Si. E4: El número de días se eleva a la dos y se suma uno.	En este momento, se hace más complicado continuar dibujando las serpientes hasta el día 100, que hallar características que permitan saber el número de partes de la

¿Cuántas partes tendrá una serpiente el día 100?		serpiente de una forma más sencilla. En la intervención del estudiante se evidencia que logra establecer una **Correlación** entre las variables que intervienen en la tarea. Los datos que muestra por medio de la tabla, representan la función que describe la tarea ($y = x^2 + 1$).

4. Construcción de una expresión.

Pregunta	Evidencia	Relación Funcional
Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 100. ¿Cómo lo harías?	E1: Multiplicamos el número del día por ese mismo número y al resultado le sumamos uno que sería igual a la cabeza. [01:21] E2:  [multiplicando el día por ese mismo número y sumándole la cabeza] E7:  [Primero elevamos al cuadrado el día correspondiente y luego le sumamos 1 que es la cabeza y ese resultado es la cantidad de triángulos del cuerpo de la serpiente]	En las dos intervenciones de E1 y E2, se evidencia que logran plasmar verbal y numéricamente la relación que describe la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente para el día 100. Por su parte E7 deja ver un nivel superior al de sus compañeros, al describir de manera más general la forma en que se halla la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente para cualquier día. Con esos ejemplos se evidencia la **Correlación** entre la cantidad de días y el número de partes de la serpiente.

Reflexiones Finales

El estudio del pensamiento funcional en primaria es una corriente que se ha venido trabajando desde hace poco tiempo, lo que dificulta la identificación de elementos e investigaciones que aporten elementos teóricos a esta investigación. Abordar el estudio del pensamiento funcional desde edades tempranas, con

estudiantes que han manifestado cierto agrado o empatía con la matemática y bajo unas condiciones que favorezcan su aprendizaje, puede aumentar la posibilidad de que éstos sujetos tengan un mejor desempeño en sus estudios posteriores.

El espacio que en el GTM-UIS se genera, brinda a los estudiantes potencialmente talentosos, la oportunidad de explorar y desarrollar sus habilidades matemáticas. También proporciona la posibilidad de ampliar sus horizontes respecto a la amplia gama de posibilidades que se abren cuando se decide trabajar en su formación y afianzamiento de conocimiento matemático.

Las evidencias de pensamiento funcional que aquí se presentan, son una muestra del trabajo que se logró con los participantes del GTM-UIS. En los apartes de la entrevista se evidencia que algunos en mayor nivel que otros, establecen de forma clara y convincente la relación que determina la secuencia que se está trabajando. También se evidencia recursividad en los estudiantes, al mostrar en sus producciones diferentes representaciones, entre ellas la tabular, numérica y verbal, para dar solución a la Tarea que se presenta. Con esto, se puede garantizar que se evidencia desarrollo de pensamiento funcional en los estudiantes, a partir del manejo que muestran en la aparición de relaciones funcionales como Recurrencia y Correlación.

Referencias bibliográficas

Bastías, K. (2016). *Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5° curso primaria.* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Blanton, M. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. En Cai, J. & Knuth. (Ed.), *Early Algebraization* (pp. 3-21). New york, Estados Unidos: Springer.

Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco R. (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica.* Santiago (Chile): OREALC-Unesco.

Blanco, R., Rios, C. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En Benavides, M., Maz, A., Castro E. y Blanco, R. *La educación de niños con talento en Iberoamérica.* pp. 49-60. Santiago (Chile): OREALC-UNESCO.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.*), Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Diezmann, C. M., Faragher, R., Lowrie, T., Bicknell, B. & Putt, E. (2004). *Catering for exceptional students in mathematics.* Tomado desde http://eprints.qut.edu.au/1855/1/1855.pdf.

Feldhusen, J. (2003). Beyond General Giftedness: New Ways to Identify and Educate Gifted, Tlented, and Precocious Youth. En Borland J. *Rethinking Gifted Education*. (pp. 34-45), New York: Teachers College Press.

Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación en estudiantes de tercero de primaria.* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. & Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga: SEIEM.

Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. En J. J. Kaput, Carraher, D. W, & Blanton, M. L. *Algebra in the Early Grades*. pp. 133-160. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. (5a Ed.). Barcelona: Labor.

Thales, S. A. E. M. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, SAEM Thales.

SIMBOLOGIA DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS NA PINTURA CORPORAL MEBÊNGÔKRE

Rosiléia de Oliveira Mundoco, José Roberto Linhares de Mattos, Eulina Coutinho Silva do Nascimento
Instituto Federal do Pará, Universidade Federal Fluminense, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. (Brasil)
rosemundoco@hotmail.com, jrlinhares@gmail.com, eulina@ufrrj.br.
batanero@ugr.es, mmgea@ugr.es

Resumo

O presente trabalho apresenta resultados obtidos durante uma pesquisa a respeito da simbologia das pinturas corporais, realizadas pelos povos indígenas da etnia Mebêngôkre, sudeste do Estado do Pará, no Brasil e que teve como público alvo os indivíduos que residem na aldeia Tekrejarôtire, localizada no território indígena Las Casas, na região de Pau D'arco. Buscou-se identificar nas pinturas corporais indígenas dos Mebêngôkre as tradições culturais e conceitos pessoais que se exprimem por meio dessa forma de arte e, ainda, analisar de forma subjetiva, considerando os contextos e referências influenciadoras, as figuras geométricas e a simbologia que estas exprimem enquanto objeto de manifestação cultural.

Palavras-chave: simbologia mebêngôkre, tekrejarôtire, pintura corporal indígena.

Abstract

This work shows results obtained during a research on the symbols of body paintings made by indigenous peoples of the Mebêngôkre ethnic group, from the southeast of Pará State, Brazil, and whose target audience was the individuals living in Tekrejarôtire village, located in the indigenous territory Las Casas in Pau D'arco. It is intended to identify, in the indigenous corporal paintings of the Mebêngôkre, the cultural traditions and personal concepts that express themselves through this art form and, also, to analyze them in a subjective way, considering the contexts and influential references, the geometric figures and symbols expressed as object of cultural manifestation.

Keywords: mebêngôkre symbol, tekrejarôtire, indigenous body painting.

Introduçao

O povo indígena da etnia Mebêngôkre- Kayapó tem preservado com afinco sua cultura e tem conseguido retransmitir às novas gerações grande parte das tradições culturais que remontam aos seus ancestrais, contribuindo assim para a difusão e perpetuação da rica cultura amazônica. Eles são conhecidos

comumente pela designação Kayapó, mas se autodenominam Mebêngôkre, que significa "os homens do lugar entre as águas".

As manifestações artísticas próprias desse povo são muito ricas e admiradas, e não raro são difundidas na sociedade. Durante o desenvolvimento da pesquisa chamou atenção, especialmente, a pintura corporal, mais especificamente as produzidas na aldeia Tekrejarôtire, localizada no sudeste do Estado do Pará, no Brasil, sendo as pinturas sempre ricas em simbologias e representações pertencentes a este povo.

Durante a pesquisa foi possível perceber que a mesma se revelou interdisciplinar, pois abrangeu conceitos da matemática, do português, de artes, de literatura, entre outros. Buscou-se identificar nas pinturas corporais indígenas Mebêngôkre as tradições culturais e conceitos pessoais que se exprimem por meio dessa forma de arte e analisar de forma subjetiva considerando os contextos e referências influenciadoras, as figuras geométricas e a simbologia que estas exprimem enquanto objeto de manifestação cultural.

Ao relacionar os elementos do cotidiano da etnia indígena Mebêngôkre com conceitos matemáticos, estamos dando significado ao conhecimento escolar, que se apresenta nas figuras geométricas, e valorizando os saberes culturais deste povo. Essa relação da cultura com a matemática se dá dentro e fora da escola. Segundo Mattos e Polegatti (2012):

A manifestação da cultura nas escolas indígenas alocadas nas aldeias, não ocorre só no ambiente da sala de aula, mas principalmente no cotidiano da aldeia, nas conversas com familiares e com os mais velhos, observando os afazeres de quem se destaca no que faz, seja na construção de uma canoa, ou dos arcos e flechas para caçar ou pescar, seja na construção de uma oca, das plantações nas roças. Há muita "Cultura Matemática Indígena" em tudo isso, e de certa forma ela se associa à matemática do não índio. (Mattos e Polegatti, 2012, pp. 2-3)

Ao analisar a simbologia expressa por meio da arte, nos reportamos a etnomatemática, que surgiu na década de 1970, no Brasil, tendo o matemático brasileiro Ubiratan D'Ambrosio como seu idealizador e o primeiro a utilizar esta terminologia para designar as manifestações matemáticas praticadas por determinados grupos socioculturais, que possuem em comum objetivos e tradições. Segundo ele, "uma cultura é identificada pelos seus sistemas de explicações, filosofias, teorias, e ações e pelos comportamentos cotidianos. Tudo isso se apoia em processos de comunicação, de representações, de classificação, de comparação, de quantificação, de contagem, de medição, de inferências" (D'Ambrosio, 2005. pp. 101-102).
A preocupação com a preservação de culturas nativas ressoa mundo afora, como podemos observar no texto da Declaração das Nações Unidas sobre os Direitos dos Povos Indígenas (DRIPS), instituída no ano de 2007, em Nova Iorque, na Assembleia Geral da Organização das Nações Unidas, com a participação de 159 Estados, dos quais 144 assentiram ao documento. Em seu artigo 31, ela ressalta que "os povos indígenas têm o direito de manter, controlar, proteger e desenvolver o seu património cultural, os conhecimentos tradicionais e as expressões culturais tradicionais […]" (UN, 2008, p.11).

A metodologia utilizada foi abordagem qualitativa, tendo como técnica para a produção de dados a pesquisa de campo, comportando observação não participante e entrevistas estruturadas com indígenas da aldeia Tekrejarôtire, especialmente os que fazem pinturas corporais, no intuito de reunir informações sobre as etapas, procedimentos, formas e possíveis significações dessas pinturas. Considerando o conhecimento empírico adquirido ao longo desta pesquisa a partir da observação cotidiana centrada nas vivências, a

coleta de dados buscou identificar não apenas as formas geométricas, mas, essencialmente o que elas pretendem simbolizar para os Mebêngôkre.

Após a coleta de dados, foi feita análise dos mesmos, elegendo para estudo apenas uma amostragem de duas das dezenas de figuras que os indígenas desenham no corpo dos visitantes, tendo por base folhas guias com fotos das pinturas praticadas. Por fim, buscou-se analisar as informações coletadas durante as entrevistas, para identificar nas formas geométricas dessa expressão cultural indígena a simbologia que as mesmas encerram, tomando por base principalmente as informações do cotidiano da aldeia.

Numa tentativa de analisar a riqueza dessas pinturas por meio das formas geométricas e seus plurissignificados, e utilizando como base para analogias diversas fontes de estudo e comparação, pretendeu-se registrar a rica simbologia presente nestas pinturas, tendo como amostragem duas delas, o 'jabuti' e a 'cobra', escolhidas aleatoriamente na tabela de pinturas que se apresentam aos visitantes, bem como o que estas aparentemente representam. Aparentemente, porque esta análise certamente se revelará subjetiva e, portanto, passível de diversas interpretações.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para a valorização e difusão de parte dos valores culturais da comunidade Tekrejarôtire, pois a cultura de um povo é o que o define e perpetua para as próximas gerações.

Uma tentativa de conceituar símbolo

Os estudos acerca de símbolo são muitos e complexos, geralmente não conclusivos, em decorrência da dificuldade de se estabelecer limites para este. Um dos estudiosos que se propôs a estudá-lo foi o filósofo norte-americano Nelson Goodman. Em sua Teoria geral dos símbolos propõe que a base destes seria uma ampla noção de referência que abrange todo caso que envolva simbolização; simbolizar, portanto, tem o mesmo sentido que referir.

Essa teoria depende de uma vasta e complexa epistemologia que lhe dá sentido. Uma breve apresentação de um de seus elementos pareceu-nos importante, a representação que é, segundo Goodman (1968), simbolicamente a conclusão que tiramos de um determinado objeto, dando-lhe características favoráveis ao seu entendimento, relacionando com outro objeto ao qual não podemos definir por completo. Por isso fazemos comparações com aquilo que nos é familiar, para dar-nos sentido real à representação. Sendo assim, uma imagem poderá ser representada não somente por aquilo que a denota, mas também por seu lado ilusório, que nos dirige a outro campo da representação: aquele que criamos para solucionar as associações ficcionais de nossas ideias. Segundo ele,

Os objetos são classificados por meio de vários rótulos verbais, e também podem ser classificados por ou sob diversas imagens. (...) ao rotular uma figura há sempre que se fazer duas perguntas: o que ela representa (ou descreve) e o tipo de representação (ou descrição) que ela traz. Na representação, uma imagem pertence ao mesmo tempo a uma classe de objetos e também a uma determinada classe ou classes de imagens. (Goodman, 1968, pp. 30-31).

Na verdade, um símbolo foge a toda definição, pois lhe é comum romper os limites estabelecidos e juntar vários prismas numa única visão. Palavras certamente serão necessárias para se tentar alcançar os sentidos

deste; mas, convém lembrar sempre que elas não conseguem traduzir todo o significado. Desse modo, o elemento referido deve possuir algo em comum com o símbolo lhe destinado. Assim, qualquer elemento pode vir a ser um símbolo, desde que empregado de maneira subjetiva, adquirindo plurissignificação.

A grande variedade de símbolos e significados nos transporta para um mundo diferente e faz com que passemos a enxergar em elementos do cotidiano, sentimentos como amor, união, fé, afeto, esperança, a alma humana em sua essência. É nesse mundo que iremos adentrar, no mundo de tradições, artes e visões únicas e peculiares do povo Mebêngôkre, nos conduzindo para sua riqueza étnica e cultural, ressaltando alguns conceitos matemáticos e literários que possivelmente nem eles próprios detectam em suas pinturas, mas que por toda sua subjetividade nos instigam a analisar, estudar, tentar desvendar e conhecer melhor.

Pintura corporal indígena

A história da humanidade é permeada pelas pinturas, desde as figuras rupestres encontradas em cavernas até os dias de hoje. Apesar dessa forma de arte não ter se sobressaído durante o período grego clássico, no qual teve destaque as esculturas, foi na idade média que a pintura se tornou a maior forma de representação dos medievais, no período que compreende do Renascimento até o século XX. Até o século XIX a gravura, obras feitas por pintores, era a principal maneira de se reproduzir imagens. Com o advento da Revolução Industrial, a pintura de cavalete foi aos poucos sobrepujada pela reprodução em massa.

Para alguns povos a pintura pode ter diversas significações, podendo ser utilizada em preparação para a luta, em rituais e festas ou para enfeitar os ambientes e os corpos. Essas tradições e manifestações artísticas têm sido passadas de geração a geração, propiciando a manutenção da memória cultural destes povos. Especificamente para os indígenas, a pintura corporal vai além da vaidade, o destaque cabe às representações e valores que eles perpetuam por meio dessa arte. Segundo o autor indígena Luciano (2006),

> À sua maneira, as culturas indígenas expressam os grandes valores universais. Nas solenidades das festas, no refinamento dos vestidos e na pintura corporal, na educação dos filhos, na concepção sagrada do cosmos, elas manifestam a consciência moral, estética, religiosa e social. A diversidade de visões do mundo, do homem e dos modos de organização da vida, os conhecimentos e os valores transmitidos de pais para filhos, a tradição oral e a experiência empírica são a base e a força dos conhecimentos e dos valores (Luciano, 2006. p. 50).

Para os Mebêngôkre da tribo Tekrejarôtire, as pinturas corporais costumam exprimir diferentes códigos e intenções, ficando a cargo da distinção os traços, figuras e cores variadas. A tarefa de pintar os corpos é exclusivamente feminina, e é passada de geração a geração. Ainda criança, a menina começa a aprender a desenhar os traços, e geralmente a tarefa de ensiná-las é feita pela mãe. As crianças utilizam como 'cobaia' as outras crianças da aldeia, e utilizam traços aleatórios em suas pinturas. As mães também criam desenhos exclusivos e elaborados quando vão pintar seus filhos pequenos, como forma de demonstrar carinho e cuidado (Figura 1).

Figura 1. Pintura corporal mebêngôkre. Fonte: acervo dos autores

Conforme Beysen (2008):

> A pintura corporal e a utilização dos adornos podem ter diferentes "funções": entre os Jê, como um código de leitura de distinções sociais, entre grupos amazônicos, como os Kaxinawa e os Asurini, os mesmos materiais tendem a servir de ligação com o mundo dos seres invisíveis. (Beysen, 2008. p. 59)

As pinturas corporais Mebêngôkre são um elemento fundamental no processo cultural deles, pois se apresentam repletas de significações sociais, cosmológicas, hierárquicas, ritualísticas, afetivas, religiosas, etc. As formas e linhas utilizadas chamam a atenção pela beleza e riqueza de detalhes. Isso propicia um grande leque de interpretações possíveis, que podem revelar os fatores culturais já citados e ainda, servem como forma de reafirmação destes sujeitos enquanto identidade pessoal e social.

Segundo Vidal (1992), essas pinturas corporais Mebêngôkre são referências para esse povo e muito conhecidas pelas pessoas, por meio da divulgação em veículos de comunicação.
A pintura corporal dos Kayapó setentrionais, grupo do tronco linguístico Jê que ocupa uma vasta área do sudeste do Pará, entre os rios Xingu e Tocantins, não constitui novidade para o grande público. Por intermédio de numerosas publicações e especialmente de fotografias veiculadas pelos meios de comunicação de massa, a arte gráfica desses índios é possivelmente a mais conhecida entre nós. No entanto, o significado profundo dessa ornamentação do corpo, um idioma-código expresso graficamente, ainda fica para ser desvendado e entendido em seus próprios termos. (Vidal, 1992. p. 143)

Os Mebêngôkre utilizam em suas pinturas corporais o pigmento de jenipapo, que é misturado ao pó de carvão; esse pó serve para deixar o pigmento mais escuro e servir como guia para os desenhos, mas desaparece assim que é lavado com água. No entanto, o jenipapo fica na pele, e escurece com o passar dos dias, mas só dura aproximadamente uns dez dias, dependendo da conservação do local pintado.

Outra forma de pigmentação utilizada é o urucum, sendo esta uma planta que produz um fruto com sementes de cor vermelho vivo, que são amassadas e misturadas com água. Lux Vidal, renomada pesquisadora e antropóloga francesa que realizou diversos estudos acerca dos povos indígenas brasileiros descreve as cores utilizadas por eles:

Cada cor ou substância (jenipapo, urucum, carvão e resina) possui, em dado contexto e momento, um significado particular. Assim, estabelece-se um quadro, ao mesmo tempo, sincrônico e diacrônico do acontecimento pictórico e de seu desenvolvimento que esclarece aspectos cruciais da dinâmica social. (Vidal, 1992. p. 158)

Hoje, as pinturas corporais possuem uma função peculiar a mais que no passado, que foi agregada apenas nestas gerações mais recentes: servem também como fonte de renda! Muitos visitantes pedem para terem o corpo pintado quando visitam a aldeia, pois ficam encantados com as pinturas corporais. As indígenas possuem uma tabela com fotos ilustrando as figuras que podem ser escolhidas. Além destas, outras são criadas na hora ou adaptadas no momento da pintura.

Entretanto, nem sempre os visitantes sabem que muitas pinturas possuem um significado especial. Talvez, o fato de as mulheres não terem permissão para conversar em português seja um dos fatores que resultem nesta desinformação. Quem falou acerca das pinturas e de suas representações foi um indígena que durante a visita atuava como guia e intérprete, mas só o fez graças aos questionamentos sobre o assunto; conclui-se que eles não costumam oferecer essa informação de forma espontânea, o que é lamentável, pois muitos admiram as pinturas sem saber que muitas vezes elas vão além dos desenhos de tinta sobre a pele. Apesar de na maioria das vezes possuírem uma simbologia, alguns desenhos são pintados de forma aleatória, as mães criam seus próprios desenhos nos filhos como forma de demonstrarem criatividade e afeto por eles.

Significações das formas geométricas utilizadas em algumas pinturas corporais mebengokre

Conforme comentado anteriormente, a riqueza de formas e detalhes nas pinturas são incalculáveis, por esse motivo selecionamos apenas duas figuras para uma análise detalhada.

Figura 2. O jabuti (kaprãn). Fonte: Catálogo da aldeia

Jabuti (kaprãn)

É um animal com um casco convexo, e carapaça redonda e resistente. Na língua mebêngôkre, o jabuti recebe o nome de *kaprãn*. Os hexágonos presentes nos cascos destes animais servem como inspiração para a arte indígena, não só a pintura corporal, mas também a tecelagem com miçangas. No corpo, ele é pintado utilizando uma nervura da folha do babaçu, formando traços que compõem diversos hexágonos proporcionais e interligados, permeados por linhas quebradas (Figura 2). No corpo, ele é pintado utilizando uma nervura da folha do babaçu, formando traços que compõem diversos hexágonos proporcionais e interligados, permeados por linhas quebradas. Essa disposição dos traços resulta em profundidade no desenho. A forma geométrica utilizada é o hexágono e apresenta como resultado uma bela obra de arte. Apesar de nesta imagem percebermos trapézios isósceles, estes são apenas a metade do hexágono que circunda o braço a ser pintado. Segundo Lagrou (2007), para os indígenas Kaxinawa "o jabuti é dono de um belo desenho na sua casca e é muito difícil de matar. Por esta razão se diz do jabuti que tem "huinti kuxi", coração duro, difícil de sucumbir" (Lagrou, 2007, p. 206).

Para os mebengokre, o jabuti é a representação de muita resistência e força, pelo seu casco extremamente resistente. Para eles, o jabuti é também um animal nobre e símbolo de longevidade. Eles realizam a "Festa do Jabuti", na qual fazem danças, rituais e ao final, comem a carne de jabutis que são caçados pelos homens durante o período da festa e assados em pedras aquecidas. Segundo eles, ao ingerir a carne do animal eles também se apoderam de suas características notáveis, já citadas. A festa do jabuti é um momento que propicia união e faz parte da gama de tradições culturais que são mantidas por este povo.

Cobra (kangã)

A cobra para os indígenas possui nomenclaturas diferentes, sendo esta palavra genérica, podendo designar uma jiboia, sucuri, serpentes, etc. A inteligência deste animal remonta a muitos anos, como podemos ver na Bíblia Sagrada, no mito da criação do mundo em Gênesis 3:1: "Ora, a serpente era o mais astuto de todos os animais selvagens que o Senhor Deus tinha feito" (Almeida, 2012, p. 19).

Para os Mebêngôkre, a cobra simboliza astúcia e inteligência que lhe permite atacar sua presa sem ser notada, de forma sorrateira e eficaz. Também, existe a relação da cobra com a imortalidade, pois afirmam que nunca se vê uma cobra morta por causas naturais. Daí a admiração por elas possuírem muita resistência e vitalidade, atributos vitais para uma vida longa e saudável.

O desenho da cobra no corpo é feito com nervura de folha de babaçu e pincel de tala de buriti. Primeiramente são desenhados os losangos, que são polígonos quadriláteros; depois são desenhados os quadrados, quadriláteros regulares escuros, graças ao preenchimento do interior dos losangos com a tintura de jenipapo, e por meio desse preenchimento, surge também o quadrado sem cor. É um trabalho de muita precisão e destreza, que com a sobreposição dos traços origina uma bela obra pautada na geometria, ainda que não seja nos conceitos que conhecemos (Figura 3).

Figura 3. Cobra (kangã). Fonte: Catálogo da aldeia

A simbologia da cobra é marcante, também, para outros povos indígenas, como podemos ver em Beysen (2008), que para o povo indígena Ashaninka, que habitam o Brasil e o Peru na região da floresta amazônica, a cobra possui "o conceito do poder e da imortalidade" (Beysen, 2008, p. 170). Também, conforme podemos ver em Nascimento e Silva (2013), o povo indígena Haliti possui pinturas corporais, com desenhos inspirados nos couros de cobras. Estas pinturas estão ligadas a espiritualidade, pois, na sua mitologia, existe uma "serpente espírito", chamado Katimalalo, que é representado por uma jararaca.

Considerações finais

No decorrer desta pesquisa, por meio das entrevistas e da observação cotidiana foi possível perceber que os Mebêngôkre utilizam as pinturas corporais para manifestar sentimentos, sensações, situações, celebrações, hierarquia, entre outras coisas, e as figuras utilizadas geralmente são inspiradas em elementos da natureza e da vivência destes, expressando a cultura dos mesmos, pois esta é uma das tradições que foram passadas de geração a geração, o que é feito ainda hoje.

De acordo com D'Ambrosio (2011), a etnomatemática é a forma com que determinada cultura lida com o seu ambiente, resultando em conceitos característicos, como os observados ao longo desta pesquisa. Assim, podemos dizer que a etnomatemática foi evidenciada e destacada neste trabalho, por meio dos conceitos matemáticos cultivados empiricamente de forma espontânea na cultura da etnia. Os símbolos analisados, formados pelas figuras geométricas desenhadas com tintura de jenipapo e carvão revelaram que a cosmologia do grupo se reforça nas tradições e costumes praticados, na qual a aldeia é o centro do universo deles. Dessa forma, para eles as pinturas sempre retratam elementos circundantes e sentimentos próprios.

Considerando a forte influência e presença indígena nesta região geográfica, acreditamos que os resultados obtidos neste trabalho podem ser trabalhados no ambiente escolar. Essa pesquisa pode ser ampliada e

aprofundada servindo como um ponto de partida para o ensino de conceitos matemáticos na educação escolar tomando por base os elementos encontrados nas pinturas corporais Mebêngôkre, e ainda, fazer valer a interdisciplinaridade que foi identificada neste trabalho, abrindo caminhos para se adotar metodologias que permitam abordar temas de outros campos, como o português, as artes, a literatura, a antropologia etc.

Espera-se que esta pesquisa possa servir como inspiração para o uso das conexões estabelecidas, principalmente, entre a matemática e a arte indígena, e que venha ampliar o conhecimento e propiciar a aplicação de conceitos matemáticos de forma contextualizada, significativa e dinâmica.

Referências bibliográficas

Almeida, J.F. (2012). *A Bíblia Sagrada* (revista e atualizada no Brasil) 2. ed. São Paulo: SBB.

Beysen, P.M.I.B. (2008). *Kitarentse: Pessoa, arte e estilo de vida Ashaninka (do Oeste Amazônico)*. Tese de doutorado não publicada, Universidade Federal do Rio de Janeiro, BR.

D'Ambrosio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa* 31(1), 99-120.

D`Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Goodman, N. (1968). *Languages of Art: An Approach to a Theory of Symbols*. Indianapolis: Bobbs-Merrill Company.

Lagrou, E. (2007). *A fluidez da forma: arte, alteridade e agência em uma sociedade amazônica (Kaxinawa, Acre)*, Rio de Janeiro: Top Books.

Luciano, G.S. (2006). *O Índio Brasileiro: o que você precisa saber sobre os povos indígenas no Brasil de hoje*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade, LACED/Museu Nacional.

Mattos, J.R.L. e Polegatti, G.A. (2012). Educação Escolar Indígena Através de um Currículo Etnomatemático. *Anais* do *Congresso Brasileiro de Etnomatemática* 4, 1-12.

Nascimento, E.C.S. e Silva, M.P.S. (2012). Da Aldeia para a Cidade: a matemática da etnia Paresí. *Anais do Congresso Brasileiro de Etnomatemática* 4, 1-11.

UN. (2008). *United Nations Declaration on the Rights of Indigenous Peoples*. United Nations.

Vidal, L. (1992). A pintura corporal e a arte gráfica entre os Kayapó-Xikrin do Catete. In Vidal, L. *Grafismo indígena: estudos de antropologia estética*. São Paulo: Studio Nobel/Editora da Universidade de São Paulo/FAPESP. pp. 143-190.

SABERES MATEMÁTICOS EMPÍRICOS DE PESCADORES

Dayane Olivério de Souza, José Roberto Linhares de Mattos
Instituto Federal do Pará, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. (Brasil)
dayoliverio2@hotmail.com, jrlinhares@gmail.com

Resumo

A pesquisa foi realizada em uma Colônia de Pescadores de Conceição do Araguaia, Estado do Pará, Brasil, por meio de entrevistas abertas. A base teórica é a Etnomatemática, e teve como sujeitos participantes pescadores da Colônia Z-39. O objetivo foi investigar os saberes e fazeres matemáticos dos pescadores, presentes em suas atividades profissionais, sendo os dados analisados através de perguntas agrupadas em categorias. Os resultados apontam para saberes e fazeres matemáticos, gerados e difundidos pelas atividades dos pescadores, que contribuem para a melhoria de suas vidas sociais e econômicas, podendo ser usados no ensino e aprendizagem na escola da comunidade.

Palavras-chave: etnomatemática, saberes empíricos, pescadores, Conceição do Araguaia.

Abstract

The research was carried out through open interviews to fishermen of the Colony Z-39, in a Fishermen's Colony of Conceição do Araguaia, Pará State, Brazil. The theoretical basis is the Ethno-mathematics. The objective was to investigate the knowledge and mathematical practices included in fishermen's professional activities, being the data analyzed through questions grouped into categories. The results point to mathematical knowledge and activities generated and disseminated by fishermen's activities that contribute to the improvement of their social and economic lives and can be used in teaching and learning in the community school.

Key words: ethnomathematics, empirical knowledge, fishermen, Conceição do Araguaia.

Introdução

A matemática se faz presente em diversas atividades diárias do ser humano consideradas simples, em que o mesmo utiliza seus saberes matemáticos empíricos para a execução de tais atividades. São várias as culturas pertencentes a diversas comunidades e povos em que praticam uma matemática própria e adequada a suas realidades e ao seu modo de vida. Nessa direção, o município de Conceição do Araguaia, no Sul do Estado do Para, cidade brasileira ribeirinha localizada a margem do Rio Araguaia, onde grande parte de sua população sobrevive da pesca, a comunidade pesqueira da Colônia Z-39 chama-nos atenção por praticarem uma matemática adequada a suas questões de sobrevivência. Assim, o presente artigo apresenta resultados de um estudo Etnomatemático com pescadores desta Colônia, e teve como ponto de partida a seguinte pergunta de investigação: Qual a relação dos conhecimentos matemáticos escolarizados

e do cotidiano, dos pescadores da Colônia Z-39 em Conceição do Araguaia, nas suas atividades profissionais?

Desta forma, a pesquisa teve como objetivo principal investigar os conhecimentos matemáticos dos pescadores da Colônia Z-39 presentes em suas atividades profissionais. Para isto, procuramos investigar a utilização dos conhecimentos matemáticos pelos pescadores, a importância desses conhecimentos matemáticos para as suas atividades profissionais e como esses pescadores se relacionam com meio social e comercial em que vivem, valendo-se de seus conhecimentos matemáticos.

A relevância do tema reside em valorizar os saberes e fazeres matemáticos dos membros de um grupo culturalmente diferenciado, que são os pescadores, algumas vezes esquecido e pouco valorizado pela sociedade em geral. Por outro lado, o tema abordado na investigação é pertinente, pois, investigar, no contexto da Etnomatemática, a geração e a difusão do conhecimento de um grupo sociocultural, propicia não só valorizar sua cultura e tradição, mas, também, aproximar saberes culturais dos saberes escolarizados, visando uma significação dos conteúdos curriculares.

O cenário da pesquisa se apresenta na cidade de Conceição do Araguaia, a qual é uma cidade centenária que foi fundada em 1897 pelo dominicano Frei Gil de Vila Nova, a partir da missão católica que tinha como objetivo catequisar os índios que eram em sua maioria Karajá e Kayapó (Ianni, 1978). Fazem parte deste cenário a Colônia de pescadores Z-39 de Conceição do Araguaia que é responsável por zelar pelos direitos e deveres dos pescadores, além de realizar reuniões periódicas para informes da pesca, recadastramento de pescadores, etc., e o seu anexo mercado do peixe, o qual é responsável pela administração do pescado, fazendo a medição, a pesagem e o registro dos peixes.

Referencial teórico

A pesquisa fundamenta-se no Programa Etnomatemática que, segundo Ubiratan D'Ambrosio (2011), busca compreender o fazer e o saber matemático através da história do ser humano, inserido nos mais diversos grupos socioculturais. Assim, indivíduos das mais variadas culturas e tradições praticam uma matemática própria e adequada às suas realidades e necessidades diárias, estando a matemática inserida nas várias atividades do dia a dia.

> O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura. (D'Ambrosio, 2011, p.22)

Aos olhos da Etnomatemática, é notório a presença da matemática nas vivências e experiências diárias deste grupo cultural de pescadores da Colônia Z-39, que diante das necessidades de suas rotinas diárias de trabalho utilizam seus saberes e fazeres matemáticos para lidarem com situações-problema que exigem tais conhecimentos para serem tratadas. Conforme discorre Knijnik, Wanderer, Giongo e Duarte (2012, p.26) "mais do que a cultura, a Etnomatemática, assim como a entendemos, está interessada em examinar a diferença cultural no âmbito da Educação Matemática".

Os pescadores, mesmo pouco escolarizados, desenvolvem habilidades matemáticas as quais são essenciais para a realização de suas atividades profissionais. Estas habilidades são adquiridas através de vivencias e experiências diárias e são repassadas de geração em geração e, assim, conforme são praticadas, vão se aperfeiçoando e se tornando fundamentais para a sobrevivência da comunidade, conforme afirmam Brito e Mattos (2016):

> Ainda que essas habilidades não sejam frutos de um conhecimento escolarizado, constituem-se heranças de seus antepassados que são repetidas e aplicadas a partir de suas experiências, ou seja, esses trabalhadores não somente reproduzem o que aprenderam, mas através da observação e da análise, adequam o conhecimento adquirido com a realidade atual. (Brito e Mattos, 2016, p.36)

Assim, os pescadores da Colônia Z-39 possuem um modo peculiar de agir matematicamente, o qual é próprio de sua cultura e vivencias. De acordo com D'Ambrosio (2011), o modo de pensar e agir matemático varia conforme a cultura e o ambiente de cada grupo sociocultural, seja uma comunidade urbana ou rural, sociedade indígena, crianças ou grupos de trabalhadores, cada grupo pratica matemática conforme suas tradições e objetivos comuns, sendo esta matemática constituída como uma Etnomatemática.

Dessa forma os pescadores, em sua maioria, mesmo não possuindo os conhecimentos da matemática escolar, utilizam a Etnomatemática própria de sua cultura e tradição no seu dia a dia para lidar com suas necessidades diárias. Portanto, "Na perspectiva da etnomatemática, é possível reconhecer que a matemática é uma disciplina dinâmica e viva, que reage como manifestação cultural [...]" (Mattos e Brito, 2012, p.969).

Nesta mesma direção, Sousa, Palhares e Sarmento (2008), em um trabalho em uma comunidade piscatória, apresentam uma pesquisa que aponta para saberes etnomatemáticos gerados no cotidiano das atividades dos membros de um grupo, que são responsáveis pelo sucesso nas suas vidas profissionais e muitas vezes vão além dos conhecimentos adquiridos na escola. Estes saberes podem ser usados para melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática nas escolas da comunidade, ressignificando os conteúdos desta disciplina para as crianças.

Metodologia

O local de realização da pesquisa foi a Colônia de pescadores Z-39, seu anexo Mercado do peixe e as residências dos pescadores, sendo estes locais todos considerados como ambientes de trabalho dos pescadores, em que são utilizados para a comercialização do pescado, confecção de instrumentos de pesca, pesagem e registro do pescado.

Os sujeitos participantes da pesquisa foram 37 pescadores, com faixa etária entre 20 e 60 anos, sendo 30 pescadores do sexo masculino e sete do sexo feminino, o que corresponde a uma amostra de 10% do total de pescadores da comunidade piscatória.

O processo de seleção dos sujeitos investigados não teve caráter rígido, no entanto buscou investigar pescadores de ambos os sexos, de variadas faixas etárias, além de investigar pescadores de mais fácil

acesso. Foram utilizados nomes fictícios para denominar os pescadores, com o intuito de preservar o anonimato dos mesmos.

A investigação teve abordagem qualitativa, tendo como base teórica a Etnomatemática, segundo a visão do autor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio. Os dados da pesquisa foram obtidos a partir da sensibilização dos sujeitos quanto à relevância da pesquisa, numa relação que teve como base o diálogo. Os instrumentos utilizados para a produção dos dados, foram entrevistas com perguntas abertas gravadas com os pescadores da colônia.

A interpretação dos dados foi feita a partir da análise das respostas às perguntas referentes ao perfil dos pescadores, aos saberes da pesca, aos conhecimentos matemáticos dos pescadores e a matemática no comércio do pescado.

Resultados

No decorrer da pesquisa pudemos observar a presença da matemática na rotina diária dos pescadores da Colônia Z-39, na pesagem, medição e comercialização do pescado, os quais utilizam seus saberes matemáticos empíricos para a realização destas atividades profissionais. Assim, a Etnomatemática se faz presente a todo tempo nas rotinas diárias de trabalho dos pescadores, e eles a utilizam para atender as situações de sobrevivência que surgem.

Trazemos aqui algumas perguntas feitas aos pescadores que, após analisadas, nos permitirão inferir sobre a geração e a difusão do conhecimento matemático por estes pescadores e o uso deste conhecimento matemático, não escolarizado, presentes nas suas atividades profissionais, que os auxiliam na vida diária.

A primeira pergunta foi sobre o tempo de exercício da profissão de pescador, onde 18 pescadores afirmaram que exercem a profissão de pescador desde criança, ou seja, sempre foram pescadores, conforme afirmou o pescador Rodrigo de 51 anos de idade *"pesco desde criança, eu nasci e me criei na beira desse Araguaia"*. Já os outros, 12 pescadores afirmaram ter acima de 15 anos de pesca e sete pescadores disseram possuir menos de 15 anos de pesca.

A seguir, uma pergunta sobre como eles aprenderam a atividade da pesca mostrou que 24 aprenderam com os pais ou familiares, desde crianças vendo-os pescarem, conforme a fala do pescador Pedro de 46 anos: "aprendi com o meu pai, meu pai era pescador e eu aprendi tudo com ele". Já as sete pescadoras disseram que aprenderam auxiliando os esposos na profissão, conforme a fala da pescadora Andréia de 28 anos: "eu aprendi com meu marido me ensinando, e por curiosidade também, para diminuir os gastos do meu marido com companheiros de pesca, e assim aumentar nosso lucro", e cinco disseram que aprenderam como ajudante de pesca de outros pescadores. Portanto, 36 pescadores aprenderam os saberes da pesca com os pais, familiares ou com companheiros de pesca, e apenas um pescador afirmou ter aprendido os saberes da pesca sozinho.

Uma outra pergunta investigou se os pescadores já transmitiram os conhecimentos da pesca que possuem para outras pessoas e, em caso afirmativo, para quem. Todos os pescadores afirmaram que já haviam transmitido seus conhecimentos da pesca para outras pessoas, sendo que 19 pescadores disseram já haver transmitido para filhos, familiares e companheiros de pesca, conforme afirmou o pescador Marcos de 48

anos *"muitos que já pescou comigo já aprendeu a pescar, meus filhos e companheiros de pesca aprendeu tudo comigo"*. Sete pescadores disseram que transmitiram apenas para filhos e familiares e 11 pescadores disseram ter transmitido os conhecimentos da pesca apenas para seus companheiros de pesca.

Em relação ao grau de escolaridade, a pesquisa revelou que três pescadores nunca estudaram; 29 têm ensino fundamental incompleto; dois têm ensino médio incompleto e três têm ensino médio completo. Portanto, quase todos os pescadores apresentam pouco ou nenhum grau de escolaridade, conforme a fala do pescador Douglas de 49 anos: "estudei não, o que eu aprendi foi tudo fora da escola, foi na vida mesmo".

Em uma outra pergunta foram analisados os saberes matemáticos escolarizados dos pescadores, sendo questionado aos pescadores, que tinham algum nível de estudo, se recordavam de algum conhecimento de matemática aprendido na escola e, em caso afirmativo, qual. Dos pescadores que tinham algum grau de escolarização, 25 deles disseram não recordar de nenhum conhecimento de matemática aprendido na escola, como afirmou o pescador Rodrigo de 51 anos *"Lá da escola eu não aprendi não, mas do meu ramo da pesca, eu peso, eu faço conta, aprendi fazendo mesmo, para poder trabalhar, por que precisa"*. Dessa forma, em sua fala, o pescador Rodrigo mostra a presença da Etnomatemática na rotina do dia a dia do pescador, em que a partir da necessidade de sobrevivência, eles encontram mecanismos próprios e adequados de sua cultura e tradição para, assim, desenvolverem habilidades matemáticas necessárias às realizações de suas atividades profissionais. Também, cinco pescadores disseram recordar de algum conhecimento de matemática aprendido na escola, mas, entretanto, não sabiam dizer qual era o conhecimento, e apenas quatro pescadores disseram recordar das quatro operações aritméticas.

Pelas respostas na pergunta anterior, podemos considerar que dos 34 pescadores com algum nível de escolarização, 30 não conseguem identificar algum conteúdo de matemática aprendido na escola, o que mostra que os conteúdos escolarizados destes pescadores não foram significativos para eles. Isso foi ratificado em outra pergunta, na qual os pescadores foram questionados se algum conhecimento de matemática adquirido na escola os auxiliava na vida profissional de pescador. Dos 34 pescadores escolarizados, 28 afirmaram que nenhum conhecimento de matemática, escolarizado, o auxilia na atividade de pesca, e apenas seis pescadores disseram auxiliar de alguma forma.

Já quando os pescadores foram questionados se conseguiam perceber a existência da matemática em sua atividade profissional (pesca), todos os 37 pescadores investigados disseram perceber a presença da matemática na negociação e comercialização do pescado, conforme afirmou o pescador Pedro de 46 anos: *"Quase todo serviço que a gente faz tem que ter a matemática, na hora de negociar o peixe, tem que saber fazer a conta direitinho"*, ou ainda o pescador Mateus de 37 anos: *"A matemática é uma necessidade que a pessoa precisa ter pelo menos um pouquinho de conhecimento de matemática tem que ter [...] tem que saber passar troco, ter noção do que o peixe vai dar para não tomar prejuízo"*.. Temos, ainda, que 30 pescadores disseram perceber a matemática também nas despesas gerais para a pescaria, três pescadores disseram perceber na escolha adequada do instrumento de pesca para o tamanho, espécie e peso do peixe, cinco pescadores disseram perceber a matemática na noção de peso, tamanho e preço do pescado e quatro pescadores disseram perceber na confecção dos instrumentos de pesca.

Também, foi questionado aos pescadores se eles encontram dificuldades no momento de negociar o peixe, como realizam o cálculo, e se têm dificuldade em voltar o troco. Nesta pergunta, 25 pescadores disseram não encontrar dificuldade no momento de negociar o peixe, e 12 pescadores disseram que encontram

dificuldades; 19 Pescadores disseram utilizar tanto o cálculo mental quanto a calculadora para realizar o cálculo na venda de seus peixes; 13 pescadores disseram utilizar apenas a calculadora e celular para realizar o cálculo e cinco pescadores disseram utilizar apenas o cálculo mental, conforme afirmou o pescador Rodrigo de 51 anos *"eu peso um peixe aqui eu já sei quanto da em dinheiro, eu já lhe falo o preço, já falo tudo, só na pesada, antes de você bater no celular eu já sei*".

Outra pergunta feita aos pescadores foi se o lucro na sua profissão de pescador é justo e suficiente. 19 pescadores disseram considerar o lucro justo e suficiente, oito pescadores disseram que não consideram justo e suficiente, e 10 pescadores disseram que às vezes é justo e suficiente, o que segundo eles ocorre devido ao sucesso ou não da pesca, pois geralmente os gastos com gasolina, mantimentos e gelo são os mesmos em diversas pescarias, no entanto, em algumas pescarias eles não conseguem pescar o suficiente para suprir os gastos com as despesas, e em outras já conseguem uma quantidade alta de peixes e, assim, obter lucro.

Posteriormente, foi perguntado aos pescadores como eles fazem para calcular o lucro e para saberem se está bom. Nesta pergunta, 25 pescadores disseram que subtraem as despesas do valor da venda, e o que sobrar é o lucro, se o valor do lucro der para as despesas de casa está bom. Outros 10 pescadores também disseram que subtraem as despesas do valor da venda, e o que sobrar é o lucro, entretanto, afirmaram que o lucro só está bom se o valor der para além das despesas de casa. Apenas dois pescadores disseram não saber calcular o lucro. A fala da pescadora Joana de 47 anos de idade, mostra como é seu raciocínio para calcular o lucro e saber se está bom: *"Já começa da soma do dinheiro que vai comprar a gasolina, os mantimentos, os anzóis e a linha, tem que somar tudinho o que gastou para quando voltar da pesca saber o que vai dar de lucro, se o lucro der a despesa de casa, então foi bom"*. Quando questionados se a renda da pesca é suficiente para suprir as necessidades de sua família, 18 pescadores afirmaram que sim, 13 alegaram que não, e seis pescadores disseram que às vezes é suficiente.

As repostas dadas pelos pescadores mostram que todos eles utilizam alguma estratégia matemática para estimar lucro, pois, mesmo tendo dois pescadores que disseram não saber calcular o lucro, todos souberam inferir se o lucro é ou não justo e suficiente.

Análise e conclusões

Pelas respostas apresentadas pelos pescadores, constatamos que mais de 80% deles é pescador há mais de 15 anos e cerca de 50% o são desde criança. Também, 97% dos pescadores aprendeu a profissão com alguém e todos já transmitiram os conhecimentos da profissão para outra pessoa. Portanto, são pescadores experientes e os saberes da pesca são adquiridos e transmitidos através dessa experiência, no dia a dia.

Mais de 90% dos pescadores frequentaram algum tempo a escola. Entretanto, 80% de todos os pescadores não se recorda de algum conhecimento de matemática aprendido na escola e 84% disse que nenhum conhecimento de matemática escolar lhe auxilia na vida profissional. Porém, por outro lado, todos dizem perceber a existência de matemática na sua vida profissional.

Também, 67,5% não têm dificuldade na hora de negociar o peixe. Cerca de 65% utiliza cálculo mental e não tem dificuldade para voltar o troco, 13% utiliza somente cálculo mental e 94,5% sabem estimar o lucro. Em (Cadeia, Palhares e Sarmento, 2008), (Mattos, 2015) e (Nunes, Carraher e Schliemann, 2011)

encontramos pesquisas que apontam para a utilização do cálculo mental em atividades do dia a dia, por pessoas com pouca escolarização.

A presença de uma matemática na vida dos pescadores da Colônia Z-39 é constante em suas atividades profissionais, e eles a praticam em seu cotidiano de forma necessária e suficiente. Muitas vezes eles utilizam seus saberes e fazeres matemáticos, sem perceberem que estão lidando, também, com conceitos da matemática escolar, o que torna esses conceitos espontâneos, simples e práticos.

Apesar de suas percepções quanto à não utilização da matemática escolar em seus cotidianos, as estratégias utilizadas por eles nos cálculos, medições e estimativas, que fazem parte de suas vidas, estão relacionados aos conteúdos escolarizados. Portanto, essa matemática de suas vidas diárias pode auxiliar professores, das escolas da comunidade, no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos curriculares em sala de aula.

Assim, a pesquisa aponta para a geração e difusão dos saberes matemáticos pelos pescadores da Colônia Z-39, através das suas atividades de pesca, e monstra que os saberes matemáticos empíricos destes pescadores, presentes nas suas atividades cotidianas, são necessários e suficientes para eles, contribuindo para a melhoria de suas vidas sociais e econômicas.

Todo este contexto da atividade profissional do pescador, faz parte das preocupações e objetivos da Etnomatemática, que visa não apenas reconhecer os saberes matemáticos empíricos de uma comunidade, mas também valorizar suas vivencias, sua cultura, o seu modo de vida em geral e, principalmente, buscar formas de fazer com que esses saberes possam ser utilizados no ensino e na aprendizagem da matemática escolar.

Os pescadores da Colônia Z-39 em Conceição do Araguaia, possuem conhecimentos matemáticos, não escolarizados, que são gerados e difundidos através das suas atividades profissionais. Esses conhecimentos podem e devem ser utilizados no ensino da matemática escolar nas escolas da comunidade, onde estudam crianças que são filhos de pescadores e muitas acompanham os pais nas suas atividades de pesca, permitindo, assim, uma aprendizagem significativa dos conteúdos dessa disciplina.

Assim, este trabalho nos proporcionou a experiencia de vivenciar a Etnomatemática, através de saberes matemáticos empíricos de um grupo de profissionais pouco valorizados pela sociedade em geral, que são os pescadores, e dessa forma, através desta pesquisa buscamos valorizar estes profissionais e seus saberes e fazeres, pois, eles fazem parte da luta pela sobrevivência de um povo.

Assim, o resultado da pesquisa aponta que os saberes e fazeres matemáticos empíricos dos pescadores da Colônia Z-39 de Conceição do Araguaia contribuem para melhoria e efetivação de suas vidas sociais e econômicas, pois através dos conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo de suas experiências diárias de trabalho e repassados de pais para filhos, os pescadores praticam, com eficiência, diariamente suas atividades profissionais. Além do que estes saberes melhoram suas relações com as suas atividades econômicas e sociais, como na captura e comercialização do pescado, por exemplo.

Os resultados confirmam o que outras pesquisas em Etnomatemática apontam, que os saberes e fazeres matemáticos empíricos adquiridos através de vivencias e experiências diárias de trabalho e de vida pelas mais variadas comunidades e povos, e repassados de pais para filho, de geração em geração, são

necessários e suficientes, contribuindo para a realização das atividades profissionais destes grupos socioculturais e, portanto, para a melhoria de suas vidas sociais e econômicas.

Referências bibliográficas

Brito, D. R. e Mattos, J. R. L. (2016). Saberes Matemáticos de Agricultores. In: Mattos, J. R. L. (Org.). *Etnomatemática: saberes do campo*. Curitiba: CRV.

Cadeia, C., Palhares, P. e Sarmento, M. (2008). Calculo mental na comunidade cigana. In Palhares, P. (Org.). *Etnomatemática: Um Olhar sobre a Diversidade Cultural e a Aprendizagem Matemática*. Ribeirão: Húmus.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. 4. ed. 1. Reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ianni, O. (1978). *A Luta pela terra: história social da terra e da luta pela terra numa área da Amazônia*. V. 8. Petrópolis: Editora Vozes.

Knijnik, G., Wanderer, F., Giongo, I. M. e Duarte, C. G. (2012). *Etnomatemática em Movimento*. 1. Ed. São Paulo: Autêntica Editora.

Mattos, J. R. L e Brito, M. L. B. (2012). Agentes rurais e suas práticas profissionais: elo entre matemática e etnomatemática. *Ciência & Educação* 18 (4), pp. 965-980.

Mattos, J. R. L. (2015). Educação comunitária e cálculo mental em atividades cotidianas. In Conferência Interamericana de Educación Matemática, 14, 2015, Tuxtla Gutiérrez. Educación Matemática em las Américas 2015, Vol 5: Etnomatemática y Sociología. *Actas...* Tuxtla Gutiérrez: Universidad del Valle de México – UVM. pp. 78-87.

Nunes, T., Carraher, D. W. e Schliemann, A. D. (2011). *Na vida, dez; na escola, zero*. São Paulo: Cortez.

Sousa, F., Palhares, P. e Sarmento, M. (2008). Calafates na Baía de Câmara de Lobos. In Palhares, P. (Org.). *Etnomatemática. Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática*. Ribeirão: Edições húmus.

ARTESANATOS PAITER SURUÍ: ETNOMATEMÁTICA NA ALDEIA

Antonio Ferreira Neto, José Roberto Linhares de Mattos
Instituto Federal de Rondônia, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. (Brasil)
antonio.f.neto@ifro.edu.br, jrlinhares@gmail.com

Resumo

Neste trabalho investigamos o uso do artesanato da etnia Paiter Suruí na escola situada na aldeia Paiter da linha 9, na Terra Indígena Sete de Setembro, no Brasil. Abordamos a contextualização nas aulas de matemática, tendo a etnomatemática como ferramenta para a prática pedagógica, evidenciando o uso da cultura e dando ênfase à matemática inserida no cotidiano da comunidade. Buscamos enfatizar a arte deste povo indígena no que diz respeito à confecção de artesanato. Para isto, acompanhamos a aula de um professor indígena que usou o artesanato como material didático para trabalhar questões da matemática escolar em sala de aula.

Palavras-chave: etnomatemática, artesanatos, Paiter Suruí.

Abstract

In this work, we investigate the use of the Paiter Suruí handicraft in a school located in Paiter line 9 village, in the Sete de Setembro Indigenous Land, in Brazil. We approach contextualization in mathematics classrooms, by using ethno-mathematics as a tool for pedagogical practice, highlighting the use of culture and emphasizing the mathematics inserted in the daily life of the community. We seek to emphasize the art of this indigenous people concerning the making of handicraft. That's why we observed the mathematics classes of an indigenous teacher who used the craft as teaching material to teach school mathematics issues in the classroom.

Key words: ethnomathematics, handicrafts, Paiter Suruí.

Introdução

Não se pode compreender a arte de um povo sem antes olhar o seu passado, sua história, seus mitos e suas tradições. Os indígenas sempre manifestaram um potencial de criatividade na sua arte, expresso na produção de grafismos ou na confecção de instrumentos que facilitassem os afazeres domésticos, do cotidiano, a caça, a pesca e a segurança do seu povo. Em uma visão contemporânea da realidade educacional de povos das florestas, a etnomatemática, atrelada às técnicas de cunho cultural, pode servir de meio para auxiliar o ensino e a aprendizagem, dentro e fora da sala de aula, utilizando como base, por exemplo, a composição do artesanato produzido por uma comunidade indígena. Segundo Paulus Gerdes:

> A etnomatemática é a área de investigação que estuda as multifacetadas relações e interconexões entre ideias matemáticas e outros elementos e constituintes culturais, como a língua, a arte, o artesanato, a construção e a educação. É a área de investigação que estuda a

> influência de fatores culturais sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. Ela também estuda o conhecimento matemático dos povos chamados "indígenas". A etnomatemática também se dedica ao estudo do saber-fazer e dos conhecimentos matemáticos adquiridos e desenvolvido nas atividades práticas [...] (Gerdes, 1996, p. 142).

São nas aulas práticas, dentro ou fora da sala de aula de uma escola indígena, que se consolida essa relação da etnomatemática com o conhecimento cultural, tendo parte integrante como mediador desse processo o professor indígena. Este por sua vez é capaz de usar o conhecimento dos mais antigos para conduzir o aprendizado dos mais novos, mantendo viva a cultura de seu povo e tornando a aprendizagem significativa.

Neste trabalho, abordamos conceitos culturais, em especial, etnomatemáticos na produção do artesanato do povo Paiter Suruí, cuja Terra Indígena (TI) demarcada está localizada nos Estados do Mato Grosso e Rondônia, na Amazônia ocidental brasileira. O primeiro contato dos não indígenas com este povo foi feito no dia sete de setembro de 1969, o que gerou o nome da TI, pelo sertanista Francisco Meireles e seu filho Apoena Meireles.

Os Suruí se consideram Paiter Iter, que significa "gente de verdade", mas são conhecidos como Paiter. Já a palavra Suruí é um nome dado por não indígenas e essa grafia não tem um significado para eles. Esse povo, que migrou do Mato Grosso para Rondônia a procura de um lugar seguro, fala uma língua da família linguística Mondé, do tronco linguístico Tupi.

As cidades mais próximas da TI Sete de Setembro são Rondolândia, no Estado do Mato Grosso, e Cacoal, no Estado de Rondônia. Nesta última, por ser mais estruturada, é onde o povo Suruí encontra maior suporte para as suas necessidades tanto financeiras quanto na área da saúde. Nela está localizada a Associação METAREILÁ do povo Suruí, responsável por várias reivindicações e conquistas desse povo.

De acordo com Lurdes Kemper:

> Os moradores mais antigos de Cacoal podem atestar que a área do município era território eminentemente indígena, pelos inúmeros vestígios arqueológicos deixados por essas populações. Por ocasião da escavação para construção de piscinas, como no Country Club e outras atividades que exigem grande movimentação de terras, tais vestígios afloraram a superfície contatando, assim, que no passado havia presença indígena na região. (Kemper, 2006, p.195).

Desta forma, podemos inferir que os Paiter habitavam uma parte considerável da cidade de Cacoal e que acabaram concentrados em uma área bem menor, distante cerca de 60 km do centro urbano. Trata-se de uma comunidade organizada e distribuída estrategicamente por aldeias em diversas estradas vicinais, vias conhecidas como "linhas".

A pesquisa foi realizada na aldeia Paiter linha 09, da etnia Paiter Surui, na cidade de Cacoal, estado de Rondônia. A aldeia possui 23 famílias, totalizando 193 pessoas, segundo informação de líderes da comunidade. Os dados foram produzidos por meio de observação participante, diálogos, entrevistas e instrumentos, como gravador, vídeo e diário de campo. Os sujeitos da pesquisa foram seis alunos, um

professor indígena, um cacique e dois sabedores indígenas, consideradas pessoas com alto grau de conhecimento na cultura Paiter.

Referencial teórico

Os povos das florestas brasileiras, no momento em que absorvem traços culturais de uma nova convivência, enquanto mantém as conexões com suas raízes culturais, alteram, um pouco, alguns de seus traços originais, principalmente o idioma, o que é chamado hibridismo cultural. Por outro lado, o indígena, através de sua arte, busca expressar seus sentimentos por meio de formas concretas palpáveis e úteis para o cotidiano da comunidade. Nesta relação entre o pensamento abstrato e a execução da ação no concreto, temos o professor como mediador para fazer a conexão entre a arte cultural e o aprendizado levando o educando para além da sala de aula buscando uma atividade prática e transformadora. Segundo Veiga-Neto (1996, p. 166), "nesse paradigma, o professor e a professora saem obrigatória e constantemente da sala de aula para buscar compreender o que é a escola, quais as relações entre essa instituição e o mundo social, econômico, político, cultural em que ela se situa".

Na verdade, o professor para chegar a resultados satisfatórios tem que conhecer o cotidiano e a realidade social do educando, para desta forma estabelecer normas cabíveis dentro dos processos de ensino e aprendizagem. Conhecendo essas variáveis o professor passa a ter subsídios capazes de contextualizar o ensino tornando as aulas mais compreensíveis para o educando. De fato, de acordo com D'Ambrosio (2011, p. 80), "a matemática contextualizada se mostra como mais um recurso para solucionar problemas novos que, tendo se originado da outra cultura, chegam exigindo os instrumentos intelectuais desta outra cultura".

O professor indígena ao levar o educando para confeccionar artesanato nas aulas de matemática, contextualiza o conteúdo e busca realizar uma aula prática com resultados satisfatórios. Ao realizar tal atividade ele busca interagir com o educando em um processo recíproco de aprendizagem, em que nem só o educando aprende, mas, também, o educador. Desta forma o professor não passa a ser um mero narrador e seu aluno um simples receptor da narrativa. De acordo com Paulo Freire:

> A narração, de que o educador é o sujeito, conduz os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado. Mais ainda, a narração os transforma em "vasilhas", em recipientes a serem "enchidos" pelo educador. Quanto mais vá "enchendo" os recipientes com seus depósitos, tanto melhor educador será. Quanto mais se deixem docilmente "encher", tanto melhores educandos serão. (Freire, 1997, p. 33).

Portanto, o professor indígena deve compreender que o educando é um ser cognitivo capaz de entender através da prática, das formas dos artefatos, usando a sua cultura como base para o aprendizado, vislumbrando a realidade sociocultural a qual está inserido. Entretanto, a importância do uso de um artesanato como material didático, pelo professor indígena, não reside apenas no artefato, mas, principalmente, no mentefato, pois, é nele que reside a história do seu povo. Quando o professor busca o conhecimento cultural atrelado à matemática, ele se utiliza de um pensamento etnomatemático, numa ação capaz de unir a matemática com a história do povo, em uma mistura importante. Neste sentido, Gelsa Knijnik enfoca que:

> É neste sentido que é possível compreender a relevância dada ao pensamento etnomatemático no que se refere à recuperação das histórias presentes e passadas dos diferentes grupos culturais. Mais ainda, há um especial interesse a dar visibilidade às histórias daqueles que tem sido sistematicamente marginalizado por não se constituírem nos setores hegemônicos da sociedade. (Knijnik, 2010, p. 22).

Portanto, apesar do professor indígena utilizar artefatos capazes de conduzir a uma educação inovadora, muitas vezes não há um reconhecimento educacional, por partes de alguns grupos dominantes da sociedade não indígena, deixando a margem o que significa realmente a produção do conhecimento. Entretanto, tais ações inovadoras, no que diz respeito ao ensino e a aprendizagem, são consideravelmente significativas e devem ser encaradas como viés capaz de valorizar, resgatar, e manter viva a cultura de seu povo.

No artesanato o professor percebe as condições necessárias para contextualizar um conteúdo de matemática, fazendo com que o educando se familiarize com o real, que faz parte do seu cotidiano, gerando o conhecimento. Neste processo harmônico o professor é capaz de levar o educando a um estágio que transcenda a barreira do desconhecido e chegue ao aprendizado.

O artesanato surui e sua importância cultural

Em geral, os povos indígenas da Amazônia usam o recurso natural da floresta para confeccionar seu artesanato, de inestimável valor cultural, de forma sustentável. Estão presentes no artesanato matérias primas regionais como palha de tucumã, fibras em geral, palha de tucum, tela de juta, cipó titica e fios de algodão. Por sua vez, muitos povos indígenas amazônicos utilizam também restos de animais mortos para dar vida ao seu artesanato com originalidade, tais como casco de tatu que viram lindas pulseiras e colares juntados a pingentes de dentes de macacos e onças.

As penas das mais diversas aves são usadas em adornos para cabeças, braços e pernas, como cocais, tornozeleiras e pulseiras. As palhas em geral são usadas nas construções de cestos, os caroços dos frutos transformam-se em colares e, no caso do coco de tucumã, em belíssimos anéis. Os adereços mais enfocados pelos povos da floresta amazônica são justamente aqueles em que a matéria prima são penas das diversas aves da selva, entre elas se destacam as araras, papagaios, tucanos e o exuberante gavião real. As penas do gavião são usadas, principalmente, para confecção de cocas que realçam a soberania do seu chefe maior e representa o símbolo máximo dos povos indígenas. Atrelado a beleza dessa arte está a sabedoria popular que é passada dos mais antigos para os mais velhos. De acordo com Gutierres & Januário:

> Conhecidos como hábeis artesãos, os indígenas produzem diversos artesanatos feitos para atender suas necessidades do dia a dia bem como de rituais. Nos ensinamentos das diversas técnicas de confecção de traçados, por exemplo, também são transmitidos valores e concepções de cada povo. A produção artesanal da cada comunidade indígena está associada à sua cultura, pois nelas estão traços específicos capazes de caracterizar cada etnia. (Gutierres & Januário, 2014, p. 95).

A arte Paiter Suruí não difere muito das dos demais povos amazônicos, suas atividades consistem principalmente em produção de cerâmica, tecelagem de rede, cestarias, plumaria, lanças, arcos, flechas, colares e pulseiras, sendo seu artesanato bem diversificado. Basicamente, as mulheres são responsáveis pela fabricação de peças artesanais de cerâmica, a tecer o algodão para posterior uso na produção de redes, colares cintas e tipoias para carregar as crianças de colo. Porém, os homens também confeccionam algumas peças, principalmente as flechas, os arcos e os cocas. Ao contrário de muitas outras etnias amazônicas os Paiter Suruí não usam pinturas em suas peças de cerâmica, por outro lado as produzem com bastante perfeição e contornos bem definidos.

Segundo a Índígena Kabena moradora da aldeia Lapetanha da linha 11:

> Nós mulheres fazemos nossos artesanatos para o nosso uso e também pá vender. Assim como o homem também faz os seus artesanatos e trabalha na roça. Estou usando tucumã para fazer colar e também casca de tatu para fazer colar branco. Depois escolho dia pá lixar tudo. Também uso tucumã pá fazer anel. Depois de cortar tucumã. Eu uso a lixa, lima, palha de aço e pó de prato para deixar anel pronto. Eu também faço panela de barro e cesto de palha. As mães ensinam as filhas a fazer artesanato. Era assim que antigamente nós ensinava as filha a fazer artesanato.

Assim, a etnia Paiter é uma sociedade com ações bem definidas entre homens e mulheres, sendo a confecção de algumas peças quase exclusividade das mulheres. Por exemplo, quando se trata de bijuterias tais como colares anéis pulseiras e etc fica caracterizado a sutileza da arte feminina, bem como na construção das panelas, tendo em vista que são objetos caseiros e por isso manipulados por mulheres. Por outro lado, as ferramentas de caça e pesca são produzidas pelos homens, pois eles que são encarregados de trazer o alimento para a família.

Na fala da indígena, ela menciona a introdução de novas ferramentas, para a fabricação do artesanato Paiter Suruí, quando se refere a lixa e a palha de aço que são instrumentos industrializados do não indígena, que é resultado do contato com essa nova sociedade. Percebemos que tais instrumento não foram introduzidos para contribuir na melhoria da beleza do artesanato, mas, sim, para facilitar a fabricação. Os artesãos antes do contato com os não indígenas usavam outras técnicas para lixar o tucumã, como, por exemplo, uma pedra rugosa e uma folha semelhante a lixa industrial que, apesar de mais trabalhoso, dava o mesmo resultado final, como pode ser observado no relato a seguir:

> O que mudou também são a maneira que eles fazem, principalmente as ferramentas, é, por exemplo, que tem a mudança do antigo pra dia atual é, nos colar, a gente, é, Paiter sempre cortava colar, quebrava coquinho, e quebrava cocar, colocava o dedo e cortava pra que ela ficava redonda do tamanho do dedo, e hoje não, o que mudou é, hoje ele tem auxilio de ferro que tem a ponta fina, são furada com ferros, também e, o tamanho da redonda da colar sai do tamanho dos ferro que foi furado, é isso que mudou (Sogakur Suruí, 2017).

Na fala do indígena observamos as dificuldades do artesão que usava ferramentas tradicionais para confeccionar seu artesanato, sem ter o ferro para facilitar o corte e a furação das sementes nativas que enfeitavam colares e pulseiras. Com o ferro passou a ter uma nova ferramenta para produzir o colar, o que facilitou o trabalho do indígena artesão. Também, o artesanato sempre foi uma das principais atividades desenvolvidas pelos Paiter Suruí, conforme pode ser visto no relato do Cacique Rafael Mopimop Suruí:

"São as principais atividades antes do contato, e hoje praticamos em dois atividade, artesanato e a roça, também a gente praticava a roça tradicionais, né, caça também, são várias, mesmo assim, artesanato é a principal atividade do Paiter".

Este relato mostra que o indígena tem orgulho de evidenciar que a atividade artesanal era uma das principais praticadas pelos antigos, demostrando a importância desta prática. Paralela a essa atividade, a comunidade até hoje ainda mantém a prática da cultura de subsistência, com suas roças de cará, milho e amendoim.

Artesanato e cultura no aprendizado

Durante a pesquisa, notamos os esforços dos professores Paiter Suruí na busca de utilizar a confecção de artesanatos nas aulas da escola situada nas aldeias, onde vale destacar a proposta pedagógica do professor Gamalonô Suruí da aldeia Paiter da linha 9. O professor trabalhou conceitos interdisciplinares, os quais destacaremos aqui os matemáticos, e evidenciou de forma clara a importância do artesanato para a preservação de seu povo, conforme relato da anciã:

> Para os enfeite do durante a festa, durante ritual, e também o seu uso cotidiano, a importância do artesanato, é isso então o valor que, o valor cultual, e identifica também, identifica é, o povo, é, é, dentro da sua cultura traz também a maneira que eles fazem, tem as técnicas, a diferença das técnicas da, da, confecção da cada artesanato, isso traz também dentro do valor cultual (Inceri Suruí, 2017).

Vale salientar que a anciã enfoca a valorização dessa cultura através da confecção do artesanato que eram produzidos antigamente para as celebrações das festas e rituais religiosos de seu povo e a importância de manter as técnicas que foram usadas pelos mais antigos.

Em um primeiro momento o professor indígena abordou temas culturais, tomando como base a confecção do artesanato e mostrando as conexões com os temas geradores do assunto evidenciado em sala de aula. Após a explanação dos conteúdos juntamente com os temas culturais referente ao artesanato, o professor convidou os alunos para uma aula prática extraclasse, onde o objetivo era construir panelas de barro. Sob o olhar atento dos alunos uma anciã modelava o barro e ensinava as técnicas antigas usadas pelo seu povo para a construção de uma panela de barro (figura 1).

Na figura 2 observamos uma aluna atentamente terminando sua tarefa. Esta aluna cursa o ensino médio. Observamos que do lado superior, um pouco mais à direita da fotografia, vemos o olhar atento de uma aluna das séries iniciais, isto mostra que o conhecimento vem passando dos mais velhos para os mais novos. Essa segunda peça construída foi um cesto de palha que após vários entrelaçamentos resultou em um recipiente de forma cilíndrica. Destaco aqui a paciência do mais antigo para ensinar seu conhecimento, o alto grau de concentração e curiosidade das crianças com olhares aguçados na expectativa de conhecer sua cultura e o professor que de forma inteligente conduzia todos os trabalhos ali no pátio da escola. Notamos que o processo ocorria na mais legítima harmonia, compassadamente, sem pressa, isso é uma característica peculiar do índio.

O terceiro e último objeto produzido, teve uma particularidade. Os homens deram total atenção ao artefato, pois se tratava da confecção da arma utilizada para caça, no passado e atualmente, a flecha. Percebemos que os curumins tiveram total atenção quando um ancião enrolava pelo de porco do mato na flecha, na intenção de que a taquara, uma espécie de bambu, não rachasse ao atingir a caça (figura 3). A taquara foi ligada de uma extremidade a outra por um fio de algodão preparado artesanalmente no local, formando uma espécie de arco. Tanto a flecha como o arco foram lixados cuidadosamente pelo ancião. Neste momento do aprendizado, os mais jovens buscaram entender a função patriarcal do pai dentro da família e sua responsabilidade em educa-lo.

***Figura 1*: A** arte de fazer panela de barro.

Figura 2: Construção de cesto.

Figura 3: confecção de flecha

Fonte: arquivo do professor Gamalonô

Após o término da atividade prática, foi servida uma refeição e de imediato todos voltaram a sala de aula. De posse dos objetos construídos, o professor indígena começou a falar de variados temas de diversas disciplinas. Em nosso caso daremos importância ao que diz respeito a matemática. Em primeiro plano os alunos aferiram com réguas o tamanho do cesto, o diâmetro da panela e a espessura da flecha. O professor pediu para que os alunos calculassem a área da superfície e a área do círculo da base do cesto. Ainda falando de figuras planas o professor mostrou que a ponta da flecha tem o formato de triângulo (por isso, triângulo se chama *Yapeh ipo*), mostrou que o cesto, que na língua materna se chama *Ado*, tem formato de cilindro e pegou a flecha e representou no quadro por um segmento de reta.

Em uma visão metodológica, notamos que o professor quando visualiza e concretiza essa ação usando a cultura com relevância para o ensino de matemática, ele inovadoramente pratica aquilo que chamamos de etnomatemática. Um processo capaz de pôr o educando frente a sua realidade, tornando o ensino mais compreensível. Podemos aqui decorrer sobre alguns resultados satisfatórios. Observamos que os alunos da aldeia sentem uma certa dificuldade nas aulas teóricas exposta em sala de aula. Mas, quando o professor indígena conduz seus educandos para fora da sala de aula, na intenção de executar uma aula prática usando como base o conhecimento cultural, no caso particular nas confecções de artesanato, percebemos que a aula ficou mais atrativa e o conhecimento foi adquirido de forma mais agradável. Desta maneira notamos que a etnomatemática é de grande importância para a contextualização do conhecimento. Valorizando assim os saberes dos mais antigos e, por conseguinte preservando a sua cultura.

Conclusões

Observarmos tanto as aulas teóricas como as práticas, onde na última o professor usa como metodologia a confecção do artesanato Paiter, para o ensino de Geometria, regra de três, entre outros, e entrevistamos os sujeitos da pesquisa. Podemos inferir que o aprendizado foi mais significativo no método em que o professor contextualiza suas aulas usando como viés o seu conhecimento cultural. Na prática, o educando aprende conteúdos curriculares observando as formas concretas e medindo, gerando uma aprendizagem de forma não abstrata. Estes conteúdos tornam-se mais fáceis de serem entendidos pelo educando. Desta forma o professor se revela capaz de transpor barreiras que antes não eram transpostas.

Observamos que nem todos os professores da aldeia têm essa pratica, porém, a partir do uso desta alternativa metodológica por um professor indígena, outros poderão se interessar e ultrapassar, também, as fronteiras da escola. Apesar de existir professor da própria etnia que não se apossa de técnicas culturais e nem usa a etnomatemática como ferramenta usual, percebemos que, em geral, toda a comunidade se preocupa com a preservação da cultura.

A etnomatemática é capaz de unir o antigo com o novo e dar forma a um aprendizado mais palatável ao educando, tornando os conteúdos mais compreensíveis. O educando passa a estar diante do que ele vivencia em seu cotidiano aproximando o ensino e a aprendizagem da sua realidade. O trabalho de campo realizado pelo professor indígena, nos mostrou que é possível tornar as atividades da escola mais agradáveis.

Quando o professor, conduz os alunos para além dos limites da escola e convoca os mais experientes para orientar as construções do artesanato, ele produz uma ação onde não é só o educando que aprende. O processo educativo não é uma via de mão única, mas, onde todos aprendem, aluno, professor e comunidade. Para finalizar, destacamos a importância de um povo que apesar de viver em uma remota região amazônica, nem por isso deixou se abater pela influência do invasor e usa a educação como escudo.

Referências bibliográficas

D'Ambrosio, U. (1998). *Etnomatemática. Arte ou técnica de explicar e conhecer*. 5ª ed. São Paulo: Ática.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. 4. ed. 1. Reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Freire, P. (1997). *Pedagogia do oprimido*. 17ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terre.

Gerdes, P. (1996) A Didática e as experiências de sala de aula: uma visão pós-estruturalista. *Educação &Realidade*. Porto Alegre, v. 21, n. 2, p. 161-175, jul./ dez.

Gutierres, S. R. & Januário, E. (2014). *Territórios indígenas em Mato Grosso: Dimensão Ambiental e Educação Escolar*. 1. ed. Cuiabá: Instituo Merireu editora.

Kemper, L. (2006). *Cacoal sua história sua gente*. 2. ed. Goiânia: Grafopel.

Knijnik. G. (2010). Intinerário da etnomatemática: questões e desafios sobre a cultura, o social e o político na educação matemática. In Knijnik. G., Wander. F. & Oliveira, C. J. (Org.). *Etnomatemática, currículo e formação de professores* (pp. 19-38). Santa Cruz do Sul: EDUNISC.

Scandiuzzi, P.P. (2009*). Educação indígena x Educação escolar indígena: Uma relação etnocida em uma pesquisa etnomatemática*. São Paulo: UNESP.

Veiga-Neto, A. (1996). A Didática e as experiências de sala de aula: uma visão pós estruturalista. *Educação & Realidade*, Porto Alegre, 21(2), pp. 161-175.

IDONEIDAD DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA, MEDIANTE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Jaime David Grisales, Eliécer Aldana
Universidad Tecnológica de Pereira, Universidad del Quindío (Colombia)
david.grisales@utp.edu.co, eliecerab@uniquindio.edu.co

Resumen

Esta investigación tiene como propósito configurar una idoneidad didáctica para el aprendizaje de los conceptos de media, mediana y moda, en los estudiantes de un curso de grado noveno de Educación Básica Secundaria. El proyecto está basado en el enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática propuesto por Godino, Batanero y Font (2009). Al finalizar la investigación en curso, se espera que los estudiantes tengan mejor desempeño en la solución de situaciones problema que involucren el concepto de medidas de tendencia central.

Palabras clave: idoneidad didáctica, aprendizaje, medidas de tendencia central

Abstract

This research aims to make up a didactic suitability for the learning of the concepts of mean, median and mode, by ninth- grade students of Secondary Basic Education. The project is based on the onto-semiotic approach of mathematical teaching proposed by Godino, Batanero and Font (2009). At the end of this ongoing research , students are expected to improve their performance in solving problem situations that involve the concept of central tendency measures.

Key words: didactical suitability, learning, measures of central tendency

Planteamiento del problema

En el aprendizaje de las medidas de tendencia central, los estudiantes de básica secundaria presentan dificultades como por ejemplo, en el cálculo de la media, parece sencillo realizarlo, sin embargo varios autores citados por Batanero (2000), encontraron que incluso alumnos universitarios no ponderan adecuadamente los valores al resolver una situación problema y en ocasiones usan la media simple, en lugar de la media ponderada.

Mayén, Cobo, Batanero y Balderas (2007), indican que cuando se pide a los estudiantes calcular la media a partir de una tabla de frecuencias donde los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debe ponderarse de modo distinto al calcular la media.

Sayritupac (2013) evidencia que los alumnos no identifican la presencia de un valor atípico en una distribución, o si lo hacen, no reflexionan sobre el efecto que causa la presencia del mismo sobre la media En otros casos el algoritmo se aplica de forma mecánica sin comprender su significado. Encontraron que mientras la mayoría eran capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media, sólo algunos determinaban un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado.

Castro y Zabala (2014) mencionan que los estudiantes no conocen el método que se emplea para calcular la mediana tanto en datos sin agrupar como datos agrupados. También menciona los errores de los estudiantes al calcular la mediana como valor central de la serie de datos sin antes ser ordenada; al calcular la moda en vez de la mediana y equivocarse al calcular el valor central.

Revisión de literatura de Matemática Educativa

Se describirá la forma como ha sido tratado el aprendizaje de las medidas de tendencia central (MTC) en la educación básica secundaria, cómo se encuentra el avance de su conocimiento en estos momentos y cuáles son las tendencias existentes para el desarrollo de su aprendizaje en los estudiantes. A continuación se describe una compilación de resultados obtenidos de otras investigaciones que se ha realizado sobre las MTC.

Castro y Zabala (2014) realizaron una investigación en educación estadística denominado ¨Un caso descriptivo en la enseñanza del Pensamiento Aleatorio¨ donde describe las principales características de la comprensión de los estudiantes de grado séptimo de educación básica secundaria, cuando se enfrentan a situaciones que involucran análisis de datos. Como conclusiones generales de la investigación mencionan que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes en la compresión de los conceptos básicos de la estadística, podrían estar relacionadas con la capacidad de justificar el porqué de un procedimiento o una estrategia de solución de un problema. A estas dificultades se adiciona la poca atención que los educadores han prestado a las supuestas “nociones simples” de la estadística como la elaboración de gráficos y tablas, y medidas de tendencia central como la media, moda y mediana.

Mateus (2014) realiza un estudio cualitativo sobre la enseñanza de las Medidas de Tendencia Central usando una estrategia didáctica basada en e-learning, en grado décimo de educación secundaria en una institución educativa de Circasia – Quindío, Colombia, utilizando como metodología la ingeniería didáctica de Michèle Artigue (2011), donde incentiva a desarrollar una cultura de la virtualidad desde las matemáticas en los estudiantes, teniendo acceso constante y permanente en una Plataforma Web promoviendo el aprendizaje autónomo a través de estas herramientas de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), siendo usada por los docentes como apoyo para sus cursos presenciales.

Mayén, Díaz y Batanero (2009) realizan un estudio interesante sobre los “conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana” realizado a 518 estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato donde se analizan las respuestas a una situación problema de cálculo de la mediana. En

dicha investigación se utilizan las ideas del enfoque ontosemiótico para clasificar las respuestas y describir los conflictos semióticos detectados.

Cobo (2003) realizó una investigación (estudio teórico-experimental), sobre el significado y la comprensión de las medidas de posición central en la Educación Secundaria Obligatoria en España, que analiza los tipos de problemas, representaciones, procedimientos de cálculo, definiciones, propiedades y argumentaciones relacionados con estos objetos, tanto en su faceta institucional como personal.

Carmen Batanero (2000) de la Universidad de Granada España, realiza una investigación sobre significados y comprensión de las medidas de posición central en la enseñanza de la educación primaria y secundaria.

Marco teórico

Esta investigación está basada en el marco teórico llamado enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática que es un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. Las nociones teóricas precedentes se complementan con la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero y Font, 2009):

Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad). Idoneidad ecológica, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (Cabri, p.e., para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría potencialmente mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. *f*

Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados. Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su

historia escolar previa. Por ejemplo, tendrán idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes. *f*

Como se puede deducir de los ejemplos propuestos, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

Metodología y fases del diseño metodológico

Se implementan las bases teóricas, diseño y método de análisis del EOS para la valoración de la idoneidad didáctica. Se abarcan las siguientes secciones: caracterización de la investigación, selección de los participantes, el escenario y contexto del estudio, así como las fases del diseño metodológico que permitirá técnicas e instrumentos de recogida de información.

La investigación se caracteriza por ser una investigación cualitativa - descriptiva, cuya principal fuente de recogida de datos es un cuestionario de situaciones problemas para ser realizado por los estudiantes. Para la construcción del cuestionario se tiene en cuenta los criterios de idoneidad didáctica y la Guía para la Valoración de la Idoneidad Didáctica de Godino (2011) que permite promover y facilitar una fase reflexiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La educación básica secundaria en Colombia está comprendida entre los grados sexto (6°) y noveno (9°) con estudiantes de 11 años a los 14 años, esta investigación está centrada en estudiantes de grado noveno en donde finaliza la educación básica para dar paso a la educación media que comprende los grados décimo (10°) y undécimo (11°). Esta investigación es realizada en una institución educativa de la ciudad de Pereira, la Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo (IEHAJ) quien es uno de los Mega Colegio realizados en esta ciudad, que se inauguró en el año 2011 en la Comuna del Café y que está bajo la administración de la Unión Temporal Universidad Tecnológica de Pereira (UTP) y la Red de Universidades Públicas del Eje Cafetero SUEJE - Alma Máter.

Esta institución educativa cuenta con una capacidad instalada para 1440 estudiantes, de los cuales 120 dirigido a estudiantes de Grado Noveno, distribuidos en 3 grupos de 40 estudiantes, denominados grados noveno uno (9-1), noveno dos (9-2) y noveno tres (9-3).

A continuación se describen las fases del diseño metodológico.

Fase de Estudio Preliminar

En esta fase se hará un estudio preliminar como se indica en los objetivos, que permita establecer una configuración epistémica – ecológica que indique el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia de las MTC, así como el grado en que el proceso de estudio se ajusta al Proyecto Educativo de la Institución Educativa Hugo Ángel Jaramillo (IEHAJ), a través de los condicionamientos del entorno social y cultural en que se desarrolla.

Fase de Diseño de Trayectorias Didácticas

Se realizará diseño de trayectorias didácticas a través de una configuración interaccional – mediacional para resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción, y el grado de disponibilidad/adecuación, por medio de los recursos materiales necesarios para el desarrollo del proceso de aprendizaje de las MTC.

Fase de Implementación

En esta fase se implementará una configuración cognitiva – afectiva que permita expresar la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos de los estudiantes en el proceso de estudio de las MTC, mediante el grado de implicación (interés, motivación, disposición) que ellos tienen en el proceso de aprendizaje.

Fase de Valoración

En esta fase se construirá una valoración de las idoneidades que permita visualizar una integración de las idoneidades epistémica, ecológica, interaccional, mediacional, cognitiva y afectiva, logrando una aproximación a una idoneidad didáctica para el aprendizaje de las MTC a través del Enfoque Ontosemiótico.

Desarrollo de algunos ejemplos, análisis de resultados y conclusiones.

Se presentan a los estudiantes una serie de situaciones problemas relacionadas con las medidas media, moda y mediana, y a continuación se ilustra el desarrollo de algunas de ellas realizada por los estudiantes:

Situación 3. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible?, ¿Por qué? (Tomado de Mayén, Cobo, Batanero y Balderas, 2007).

El estudiante dice “sí es posible”, suma los números seis (6), cinco (5) y cuatro (4) que aparecen en el enunciado, obteniendo como resultado quince (15), luego lo divide entre seis (6) y obtiene como cociente uno coma noventa y seis (1,96).

Este estudiante no realizó una buena lectura del enunciado lo que permite una interpretación errónea y una posterior solución equivocada de la situación. Estos problemas de lectura e interpretación de problemas es lo que afecta a algunos estudiantes en la solución de situaciones problemas planteadas en las pruebas estandarizadas.

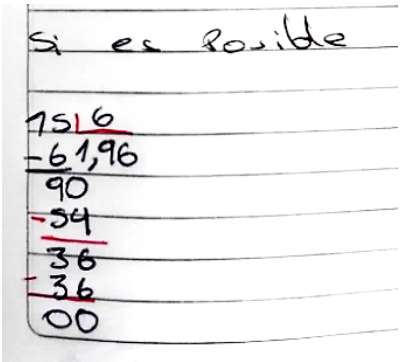


Figura 1. Situación problema 3

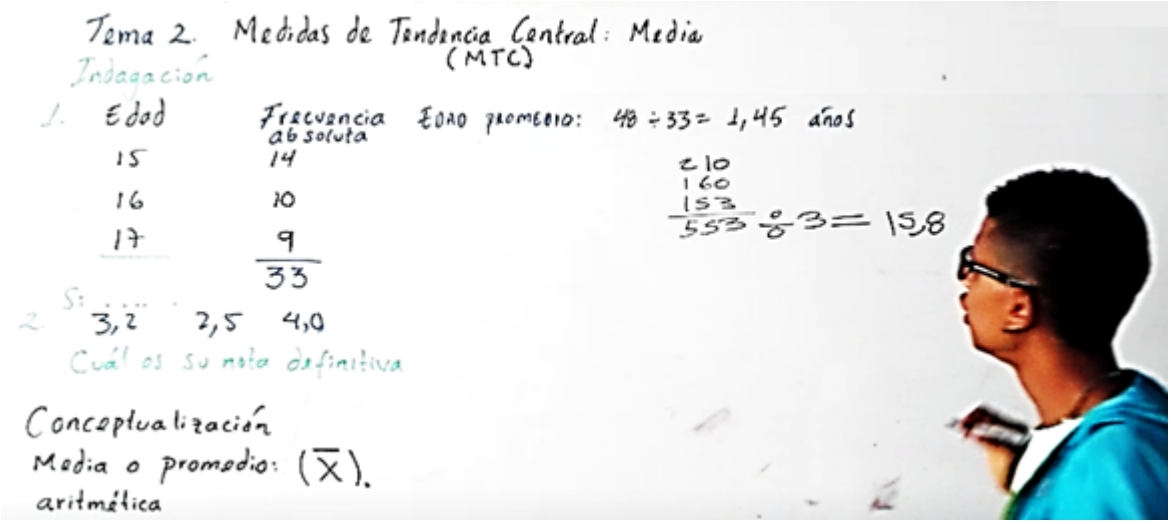


Figura 2. Errores de cálculo de la Media en datos agrupados

Se realiza una encuesta a los estudiantes de grado noveno sobre las edades de cada uno, se registran y se organizan los datos en una tabla con frecuencia absoluta, hasta ese momento, los estudiantes ya se habían enfrentado a situaciones problemas que involucran la media simple, sin embargo, al enfrentarse a esta situación donde los datos están agrupados en una tabla con frecuencias absolutas, suman las edades quince (15), dieciséis (16) y diecisiete (17), luego la dividen entre el número total de estudiantes que encuestaron, es decir treinta y tres (33), y obtienen un dato de uno coma cuarenta y cinco años (1,45 años), el estudiante analiza este dato, y el docente orienta con la siguiente pregunta: ¿ese dato quiere decir que la edad promedio de un estudiante en el salón es de 1,45 años, es decir, que un estudiante en promedio de este salón tiene menos de dos años?. El estudiante analiza la pregunta y dice que no es correcto el dato que acaba de calcular, por lo que intenta resolverlo de otra manera, dice: "si 14 estudiantes tiene 15 años, entonces debo sumar 14 veces 15 años, y es lo mismo que multiplicar 14 veces x 15 años = 210 años, de igual forma 10 estudiantes tienen 16 años, es decir 10 veces x 16 años = 160 años, y 9 estudiantes tienen 17 años, es decir 9 veces x 17 años = 153 años", sumo esos resultados y obtiene 553 años (suma que realiza mal) y lo divide ahora si entre el total de estudiantes que son 33, y obtiene el dato de 15,8 años. El

profesor realiza la pregunta: ¿este dato tiene más sentido?, ¿qué significa este dato?, a lo cual es estudiante responde que ese dato quiere decir que en promedio un estudiante del salón tiene 15,8 años, lo cual es una interpretación correcta.

Se puede concluir que los estudiantes presentan errores en el cálculo de la media simple, y aún más cuando se trata de datos agrupados y situaciones problemas que requieren el uso de media ponderada. En el cálculo de la moda presentan pocos errores y se percatan de que a veces en un conjunto de datos puede haber uno, dos o tres datos que tienen la misma frecuencia, es decir que se repite las mismas veces, y a su vez son las que más se repiten, por lo que concluyen de que un conjunto de datos puede tener una, dos o tres modas (unimodal, bimodal o multimodal). En el cálculo de la mediana también presentan errores cuando para obtener este valor representativo no ordenan el conjunto de datos de menor a mayor, cuando la cantidad de datos es un numero par, o cuando los datos están agrupados.

Recién finalizada una situación problema el docente obtiene el siguiente dialogo con los estudiantes:

Profesor: ¿Qué les pareció la actividad?
Estudiante 1: Lo hace pensar mucho a uno, a mí me gusta la matemática pero cuando me explican bien, porque cuando a uno no le explican, se enreda mucho, en cambio cuando uno entiende a uno como que se le va aclarando la mente, a mí no me da pereza de matemáticas, me parecen muy chéveres.
Profesor: ¿Son buenas estas situaciones? ¿Qué tienen de diferente estas situaciones con las que normalmente se ven en los libros?
Estudiante 2: Que hacen pensar bastante con poca información, es decir con un enunciado corto.
Profesor: ¿Si aprenden con estas situaciones problemas?
Todos los estudiantes: Sii…
Profesor: ¿Y si entendieron con estas situaciones problemas?
Estudiante 2: Claro profe, yo le expliqué a ella (otra estudiante). Estas situaciones son entretenidas, lo ponen a pensar mucho a uno, uno al final ve que estaba fácil, cuando uno le pone lógica ve que está súper fácil.
Profesor: ¡Qué bueno que les haya gustado!

En esta investigación en curso se puede concluir que las situaciones problemas permite a los estudiantes enfrentarse a situaciones contextualizadas a su entorno y que son de interés para ellos, permite que el estudiante reflexione sobre lo que se necesita saber de un conjunto de datos y los cálculos que necesita realizar para obtener un valor representativo.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, 2000, 25, 41-58.

Castro, D. y Zabala, J. (2014). *Educación Matemática: Un caso Descriptivo en la Enseñanza del Pensamiento Aleatorio*. Colombia 2014. ed: Caza de Libros ISBN: 978-958-8822-51-8 v. pags.

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Mateus, Eduar (2012). *Estudio cualitativo sobre la enseñanza de las medidas de tendencia central usando una estrategia didáctica basada en e-learning, en grado décimo de educación secundaria en la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano.* En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 1079-1084). Sello Editorial Universidad de Medellín.

Mayén, S., Batanero, C. y Díaz, C. (2009). Student´s semiotic conflicts in the concept of median. *Statistics Education Research Journal*, *8* (2), 74-93.

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C. y Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Unión*, 9,187-201.

Sayritupac, J. (2013). *Significados de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carreras de humanidades*. Tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú.

PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA LA CONVERSIÓN DE REGISTROS EN EL TRATAMIENTO DE LAS FUNCIONES LINEALES Y AFINES

Carlos Andrés Ledezma Araya, Elisabeth Ramos-Rodríguez, Patricia Vásquez
Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
carlos.ledezma.a@mail.pucv.cl, elisabeth.ramos@pucv.cl, patricia.vasquez@pucv.cl

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar una propuesta de enseñanza para alumnos de 13 y 14 años sobre funciones lineales y afines, convirtiendo los registros tabular y gráfico al modo algebraico. Para su diseño, se consideraron elementos teóricos y didácticos, se realizó una exhaustiva revisión bibliográfica relacionada al tema y se revisó el tratamiento curricular en textos de estudio. Para validar la propuesta, ésta fue implementada en un grupo de estudiantes y analizada para observar elementos que inhiben o desarrollan la conversión de registros. Desde el paradigma cualitativo se analizaron las producciones de los estudiantes, evidenciando que éstos generaron estrategias para realizar conversiones, permitiendo mejorar la propuesta para futuras implementaciones.

Palabras clave: conversión, función afín, función lineal

Abstract

The aim of this paper is to show a teaching proposal for 13 to 14 year- old students about linear and affine functions, converting tabular and graphic registers into algebraic mode. To design the teaching proposal, theoretical and didactic elements were taken into consideration, and bibliography related to the topic was deeply reviewed, as well as the curricular treatment of the content in textbooks. To validate it we implemented it in a group of students, and observed the elements that hinder or develop the conversion of registers. We analyzed the students' performance from the qualitative paradigm, demonstrating that they generated strategies to carry out conversions, which allowed improving the proposal for future implementations.

Key words: conversion, affine function, linear function

Introducción

La importancia del concepto de función es su carácter unificador dentro de la matemática, debido a su presencia en todas las ramas, desde la relación de variables de distinto tipo hasta la modelación de situaciones del mundo real (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006). Si bien esta noción aparece como objeto de forma implícita desde los primeros niveles educativos (en el conteo, en el trabajo con patrones numéricos y geométricos, y en la proporcionalidad directa e inversa, por mencionar algunos ejemplos), el currículo

chileno postula la iniciación de su estudio formal en octavo año básico (13-14 años). Las bases curriculares vigentes centran el foco del eje álgebra y funciones en dicho contenido (función lineal y afín), de la mano de la habilidad de modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas (Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC, 2016).

Abrate et al (2006) asocian la función con una serie de conceptos y esquemas de conocimiento que generan cierto grado de dificultad, como lo son dominio, imagen, variable, dependencia, entre otros, lo que, además, implica vincular tales subconceptos entre sí. Desde el plano de la semiótica, es que una función puede ser representada en distintos registros, y de acuerdo a lo planteado por Janvier (1987), es que los estudiantes demuestran haber integrado el concepto de función cuando son capaces de convertirla y realizar transferencias entre sus distintas representaciones, de manera espontánea y flexible, al mismo tiempo que conservan su carácter global e inseparable, destacando así la importancia de realizar distintas representaciones semióticas de un mismo objeto para favorecer su aprendizaje.

En el trabajo de López y Landy (2008), se abordaron dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de las funciones, bajo la idea de que la forma en que la escuela suele enseñar este concepto no permite apreciar su naturaleza y utilidad con respecto al entendimiento, modelación y explicación de fenómenos de carácter variacional, razones que provocan dificultades en el aprendizaje y erradas concepciones sobre dicho objeto. El principal foco del estudio citado se encuentra en el tratamiento en la enseñanza de la función, donde la primera problemática que detectaron correspondería a la multiplicidad de registros semióticos en que puede ser presentado el concepto, los que son trabajados en forma aislada y no siempre enfocados hacia la idea de correspondencia entre elementos de dos conjuntos o como relación entre variables (López y Landy, 2008). En la figura 1 hemos elaborado un ejemplo que ilustra distintos registros de una función.

Figura 3: Representaciones del objeto matemático función afín en sus distintos registros semióticos (fuente: elaboración propia).

La segunda problemática que los autores plantean, hace mención a una forma casi dogmática de presentar el concepto, en el ámbito escolar, a través de tres pasos (López y Landy, 2008):

Presentación mediante conjuntos:

La primera definición de función que los estudiantes conocen suele ser en la que se representan dos conjuntos unidos por flechas, denotada por una f que sigue con la definición de Dirichlet. Durante la enseñanza, el enfoque se centra en la idea de correspondencia entre dos conjuntos, sin enfatizar acerca de

la regla que permite que se establezca dicha relación, además de no desarrollar la definición como relación entre variables o las ideas de variación.

Expresión analítica

Luego, se suele denotar a la función a través de una expresión analítica de la forma $f(x) = \ldots$.

Gráfica

La función se grafica en el plano cartesiano, usando pares ordenados de puntos que se obtienen luego de haber construido una tabla de valores con ambas variables.

Si bien los autores citados plantean la importancia de realizar conversiones entre los distintos registros de un objeto matemático, los textos de estudio del nivel octavo año básico analizados (Blanco, Bozt, Calderón, Jiménez, González, López, Romero, Díaz, Muñoz y Rupin, 2009; Bórquez, Darrigrandi y Zañartu, 2010; Catalán, Pérez, Prieto y Rupin, 2015; Vega, Castro y Curiche, 2013) evidenciaron un trabajo unidireccional en la conversión de registros del objeto matemático función lineal y afín, desde su forma algebraica hacia la tabular y gráfica, sin desarrollar la conversión en el sentido contrario (desde lo tabular y gráfico hacia lo algebraico). Es por ello que una de las problemáticas que nos planteamos es que la unidireccionalidad en la conversión de registros en el caso de las funciones lineales y afines, puede provocar que la notación algebraica y la tabla de valores sean consideradas sólo como herramientas o pasos intermedios para formar la gráfica de la función, y no como otras representaciones del mismo objeto matemático.

En este contexto, este trabajo tiene por objetivo mostrar una propuesta de enseñanza para alumnos de 13 y 14 años sobre funciones lineales y afines, convirtiendo desde los registros tabular y gráfico al algebraico.

Marco teórico

Nuestro marco teórico se enmarca en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), la cual pone énfasis en que el aprendizaje de los objetos matemáticos debe trascender de lo meramente conceptual, y que sólo es a través de las representaciones semióticas que se hace posible una actividad sobre estos (D'Amore, 2009). De este modo es que su autor establece una diferencia e interdependencia entre dos conceptos fundamentales: por una parte, la semiósis, que es entendida como la "aprehensión o producción de una representación semiótica" (Duval, 2004, p. 14), y por otra, la noesis, que corresponde a los "actos cognitivos tales como la comprensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia" (Duval, 2004, p. 14).

En este marco intervienen tres conceptos fundamentales, característicos de la semiótica: las representaciones semióticas, el tratamiento y la conversión. Las representaciones semióticas se caracterizan por ser conscientes y externas, que "permiten una 'mirada del objeto' a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos…) que tienen el valor de 'significantes'" (Duval, 2004, p. 35), ejemplo de ello son las expresiones simbólicas, algebraicas y del lenguaje verbal, las figuras y tablas, los esquemas gráficos, entre otros tipos de registros. El tratamiento es entendido como aquel tipo

de transformación que se lleva a cabo dentro de un registro, sin transitar a otro (Duval, 2004), como, por ejemplo, resolver una ecuación de dos variables para obtener una función en el registro algebraico. La conversión, en cambio, consiste en una transformación desde un registro de representación hacia otro, previa coordinación del individuo que la lleva a cabo (Duval, 2004), es decir, si esta función representada en el registro algebraico, se grafica en el plano cartesiano.

Bajo tales términos es que este marco teórico plantea que no es posible la noesis sin la semiósis, pues no se puede aprender un concepto matemático sin transitar por el necesario tratamiento y conversión de diferentes registros de representación semiótica.

Método

Este estudio, de corte cualitativo y enfoque interpretativo, se enmarca en el diseño, aplicación y análisis de una propuesta de clase en la forma de una investigación-acción de tipo práctica (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), considerando las cuatro etapas que conforman el proceso de investigación-acción como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1: *Etapas del diseño del estudio*

Etapas	Acciones
1. Detección del problema de investigación, clarificación y diagnóstico	Identificación y planteamiento de una problemática sobre la unidireccionalidad en la conversión de registros en el caso de las funciones lineales y afines. Revisión curricular y de los textos del nivel, además de antecedentes sobre la problemática planteada. Implementación de dos clases con los sujetos participantes.
2. Formulación de un plan para resolver el problema	Diseño de un instrumento de clase, en forma de guía de contenido y de ejercicios, con un procedimiento de conversión desde los registros tabular y gráfico hacia el algebraico.
3. Implementación del plan y evaluación de resultados	Implementación de la clase y del instrumento diseñado en el grupo de sujetos participantes, y análisis de los resultados obtenidos.
4. Retroalimentación, reflexiones y replanteamiento	Reflexión sobre el instrumento diseñado para la clase implementada y de los resultados obtenidos, para ampliar la propuesta a futuras ejecuciones en el nivel.

Fuente: elaboración propia, con base en el modelo presente en Hernández et al (2014).

Los sujetos participantes fueron cuatro alumnos de 13 y 14 años, pertenecientes al nivel octavo año básico del Colegio San Ignacio de Viña del Mar, grupo con el cual se trabaja la propuesta de enseñanza, que implicó tres clases, cuyos elementos principales se detallan en la tabla 2.

Tabla 2: *Descripción de los detalles principales de las tres clases implementadas*

Clase	Descripción
Primera	Incluyó el uso de diagramas sagitales, tablas de valores y gráficas de funciones lineales y afines. Los estudiantes debían convertir desde los registros figural, tabular y gráfico al registro algebraico, y verbalizar en forma escrita su procedimiento.
Segunda	De características similares a la anterior, excluyendo los diagramas sagitales para delimitar la propuesta a los registros tabular, gráfico y algebraico.
Tercera	Actividad de clase que incluyó un procedimiento (figura 2) y ejercicios de conversión (figura 3) entre los registros ya mencionados.

Las primeras dos clases se enfocaron en conocer las construcciones previas de los estudiantes sobre sus procedimientos de conversión hacia el registro algebraico, y fueron de utilidad para diagnosticar la problemática planteada. Para este estudio nos centraremos en la clase tres, en donde para lograr la conversión de registros se presenta un método de iteración y descomposición de la fórmula de pendiente conocidos dos puntos, utilizando una tabla, para así poder expresar la regularidad de la función en la forma $f(x) = ax + b$, tal como se muestra en la figura 2.

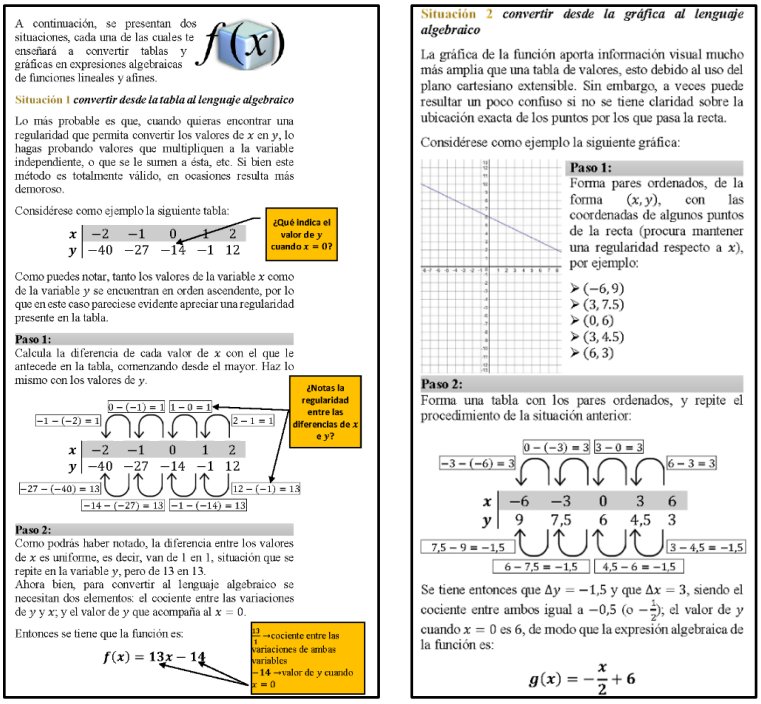


Figura 4: Extractos del instrumento de la propuesta para explicitar un método de conversión desde los registros tabular y gráfico al algebraico (fuente: elaboración propia)

Posterior a la clase, los estudiantes desarrollaron ejercicios de conversión (figura 3), primero desde el registro tabular al algebraico, y luego desde el gráfico. En una sección final de desafíos, se les presentaron algunas funciones del tipo cuadrática, cúbica y raíz cuadrada, con la finalidad de que trabajen con lo aún desconocido para ellos. Esta clase fue la considerada para analizar los resultados de la propuesta implementada.

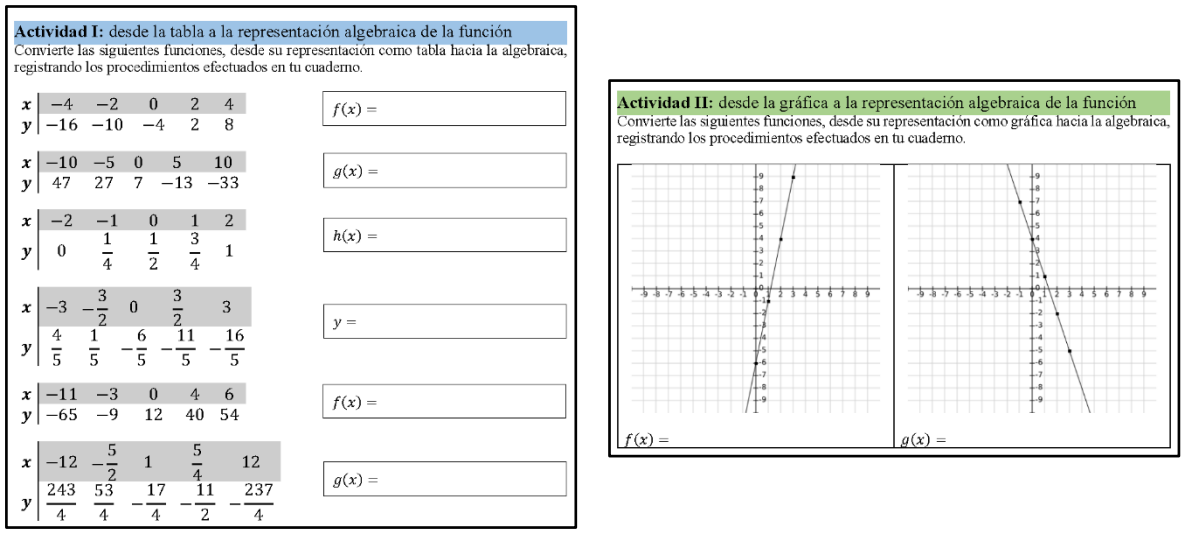


Figura 5: Extractos del instrumento de la propuesta de conversión desde los registros tabular y gráfico hacia el algebraico (fuente: elaboración propia).

Este proyecto se desarrolló en el marco del programa de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, donde se validaron los instrumentos y la propuesta por expertos de didáctica.

Para el análisis se establecieron categorías de acuerdo a las conversiones realizadas por los estudiantes desde los registros considerados (tabla 3).

Tabla 3: *Categorías de análisis*

Categorías	Códigos
Convierte desde el registro tabular al algebraico	CTA
Convierte desde el registro gráfico al algebraico	CGA

Cabe destacar que no hemos considerado las conversiones recíprocas u otras, pues estas sí se observaron tanto en los textos de estudio como en las propuestas curriculares. Las categorías apuntan a la escasez de este tipo de conversiones.

Resultados de la propuesta

La tabla 4 muestra un resumen de los resultados obtenidos por cada uno de los sujetos participantes.

Tabla 4: *Resultados de la aplicación de la propuesta*

Sujetos	CTA	CGA
Alumno 1	X	X
Alumno 2	X	X
Alumno 3	X	X
Alumno 4	X	X

La tabla muestra que todos los alumnos lograron convertir los registros. Respecto a la conversión desde el registro tabular hacia el algebraico, la figura 4 evidencia que el alumno aplicó el procedimiento enseñado en la clase 3 en el registro tabular para obtener la representación algebraica de las funciones, donde no se observan dificultades en el trabajo con valores enteros o racionales. Sin embargo, los cuatro estudiantes no pudieron resolver el último ejercicio, debido a la ausencia del $f(0)$ en la tabla.

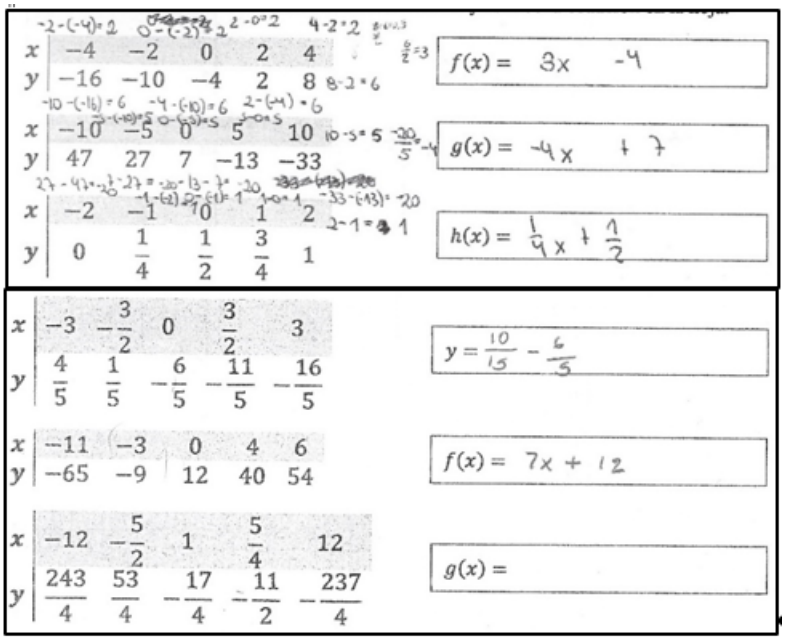


Figura 6: Evidencia de conversión desde el registro tabular hacia el algebraico.

La figura 5 evidencia que los convirtieron desde las gráficas a sus representaciones algebraicas, considerando los puntos marcados en el plano, donde tampoco se observaron dificultades para el trabajo con valores enteros y racionales.

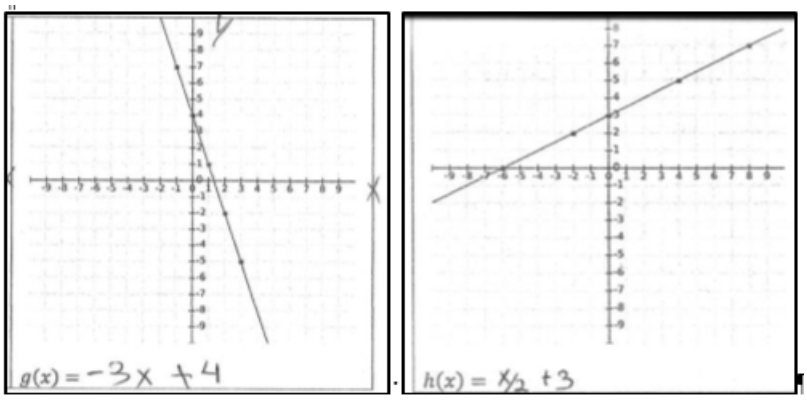


Figura 7: Evidencia de conversión desde el registro gráfico hacia el algebraico

De acuerdo con los comentarios de los estudiantes, hubo ocasiones en que aplicaron sólo un procedimiento intuitivo, ejemplo de ello era que, con tan sólo observar una tabla o gráfica, pudieron encontrar la regularidad implícita en ésta, sin recurrir a un procedimiento.

Conclusiones

Abordar este objeto matemático nos ha aportado una mirada amplia del contenido que se enseña, pues comprender sus distintas representaciones semióticas y las alternativas de presentación en los textos de estudio, enriquecieron su enseñanza. Los resultados obtenidos evidenciaron el cumplimiento de los objetivos de este estudio, pues se logró su diseño, implementación en aula y análisis de datos, lo que permitió reformular algunos aspectos de la misma en favor de la conversión de registros como, por ejemplo, adaptar el método para el caso en que el registro tabular no incluya el valor de $f(0)$, o para valores no consecutivos de la variable independiente.

En consonancia con lo planteado por López y Landy (2008), acerca de la multiplicidad de registros de una función, en reiteradas ocasiones durante la aplicación de esta propuesta se hizo saber a los estudiantes participantes que las tres representaciones semióticas involucradas aludían a un mismo objeto matemático, a fin de que la notación algebraica no fuese entendida como un punto de partida, o la tabla de valores como un paso intermedio entre los registros algebraico y gráfico.

Sin embargo, como los sujetos informantes fueron pocos, la proyección de la aplicación en un número mayor de estudiantes podría considerar otros aspectos, como el número de clases y cantidad de instrumentos necesarios para llevar a cabo el trabajo. Es por ello que, en la actualidad, se encuentra en desarrollo el proceso de diseño de más material complementario, pues esta propuesta se pretende implementar, de manera general, al nivel mencionado, cuando se aborde la unidad temática Álgebra y Funciones. Como una extensión de este estudio, se proyecta diseñar una propuesta similar para el caso de las funciones cuadráticas, a fin de contribuir con estrategias didácticas para que el trabajo de conversión

con distintas representaciones semióticas, en la enseñanza de los objetos matemáticos, sea una práctica habitual en el aula.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nac. de Villa María.

Blanco, M., Bozt, J., Calderón, F., Jiménez, M. J., González, M., López, G., . . . Rupin, P. (2009). *Matemática 2 Proyecto Bicentenario.* Santiago, Chile: Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones.

Bórquez, E., Darrigrandi, F. y Zañartu, M. (2010). *Texto del Estudiante Matemática 8.* Santiago, Chile: Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones.

Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P. (2015). *Texto del estudiante Matemática 8.º básico.* Santiago, Chile: Ediciones SM Chile S.A.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Enseñanza de las Matemáticas, 11*, 150-164.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano* (Segunda ed.). (M. Vega, Trad.) Santiago de Cali: Merlín I.D.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta ed.). México D.F.: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

López, J. y Landy, S. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 308-318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

MINEDUC. (2016). *Matemática. Programa de Estudio - Octavo Básico.* Santiago: Ministerio de Educación de Chile.

Vega, M., Castro, C. y Curiche, A. (2013). *Matemática 8º Básico. Sé Protagonista.* Santiago, Chile: Ediciones SM S.A. Chile.

ACTITUDES DE LOS ESTUDIANTES HACIA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS EN SU ENTORNO FAMILIAR Y EN EL AULA, UN ACERCAMIENTO DESDE EL DOMINIO AFECTIVO

Felipe Marín Álvarez
Universidad Andrés Bello. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas. Santiago. (Chile)
felipe.marin@unab.cl

Resumen

El objetivo del documento es reportar la observación de la actitud en los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas, según la relación con su entorno familiar y con sus compañeros de curso, y la posibilidad de generar un cambio actitudinal. Dichas observaciones se plantean a partir de las creencias, emociones y actitudes luego de la vinculación con su entorno. Para realizar dichas observaciones, se trabajó con estudiantes de la carrera de Ingeniería Comercial de la Universidad Andrés Bello. Los resultados indican la existencia de dos grupos de estudiantes: aquellos que reciben un buen dominio afectivo de su entorno y otro grupo que no. Asimismo, en cada grupo se observan dos categorías según lo permeable que estas son. Además, en aquellos estudiantes con buen dominio afectivo, se distingue un escenario favorable para generar un cambio actitudinal. Luego, el vínculo familiar y con el aula adecuado, favorece una actitud proactiva ante el estudio y permite dirigir o guiar al estudiante.

Palabras clave: dominio afectivo, familia, actitudes, compañeros.

Abstract

The objective of this paper is to report the observation of students' attitude towards mathematics learning, depending on their family and school environments, and the possibility to generate an attitudinal change. Such observations are stated based on the beliefs, emotions and attitudes after spending time in their environment. The observations were carried out with Commercial Engineering Degree Course students at Andres Bello University. The results show the existence of two groups of students: those who receive a positive affective dominion of their environment and those who don´t. Similarly, in each group, two categories can be observed depending on how permeable they are. Moreover, in those students with positive affective dominion, there is a favorable setting for generating attitudinal changes. Then, the appropriate relationship with the family and the class favors a proactive attitude to study and allows directing or guiding the student.

Key words: affective domain, family, attitudes, classmates.

Introducción

De alguna manera, queramos o no, el entorno y en particular la familia, tienen una alta importancia y no es posible marginarlos al intentar comprender la realidad de los estudiantes frente a las matemáticas como

ciencia, como disciplina o simplemente como una asignatura. La vinculación del hombre con su entorno, con la diversidad cultural, con las diversas manifestaciones sociales presentes y la vinculación que consiga, será una influencia directa en su proceso de estudio de las matemáticas, con la educación que esté recibiendo y en cómo estos acercamientos vayan en pos de una continua evolución del individuo. En consecuencia, es posible observar la problemática del vínculo existente entre un estudiante, como individuo, como sistema, con su entorno inmediato familiar y con el aula, desde las actitudes que él tenga. Así como también, la capacidad intrínseca que este tenga para, a pesar de las limitaciones que lo pudiesen rodear, mantener la perseverancia, ser resiliente y conseguir sus objetivos.

La educación es un proceso largo que comienza siendo impartido por la familia y la escuela, en donde se requiere de ambas partes para conseguir un pleno desarrollo educativo. Es en la familia donde los estudiantes aprenden de sus padres, siguen patrones, instalan conductas, reciben estímulos y refuerzos. De esta manera, el estudiante en formación presenta ciertas actitudes frente al estudio, las cuales precisamente tienen su origen en el sistema que lo rodea.

Contextualización del estudiante

La sociedad y en general el entorno, del cual todos somos parte, constantemente experimenta cambios y, por tanto, gradualmente, debemos estar alerta a adaptarnos a ellos. Uno de los entornos o sistemas inmediatos, en los cuales nos educamos y convivimos es la familia. Y es en este sistema (familia) donde convergen entradas y salidas constantes (estímulos), subsistemas (hijos) y comportamientos o funciones que dependen de la estructura de dicho sistema como tal (Bertalanffy, 1969). Mientras el mecanicismo veía el mundo seccionado en partes cada vez más pequeñas, el modelo de los sistemas descubrió una forma holística de observación que develó fenómenos nuevos (que siempre estuvieron ahí, pero se desconocían) y estructuras de inimaginable complejidad. En la teoría de Bertalanffy, un sistema se define como un conjunto de elementos en interacción. En el caso de sistemas humanos (familia, empresa, pareja, etcétera) puede definirse como un conjunto de individuos con historia, mitos y reglas, que persiguen un fin común. Así, todo sistema se compone de un aspecto estructural (límites, elementos, red de comunicaciones e informaciones) y un aspecto funcional. Entonces, la familia constituye precisamente un sistema y los subsistemas serán los componentes que lo conforman y los lazos que se produzcan: vínculos e interacciones propias a dicho sistema, quiénes nutrirán la permanencia, fortalecimiento (debilitamiento) de éste. En relación a las propiedades que tengan, particularmente la entropía, planteará la tendencia de dicho sistema (familia) a conservar su identidad. Así, se podrá entender las características presentes en un sistema particular (estudiante) al inicio de un proceso académico y comprender como se conjugan las emociones, actitudes y creencias que éste tenga con el estudio de las matemáticas.

Por otro lado, el estudiante también estará sometido a los cambios que su familia o los miembros de ésta tengan. Entonces, la sinergia que dicho sistema manifiesta, traerá consigo adaptaciones al proceso que esté llevando. Y esto se debe a las constantes retroalimentaciones que los subsistemas tienen, pues permiten que las partes que lo conforman puedan asumir funciones, aceptar desafíos y manifestarse. Así, el estudiante podrá presentar propiedades según la siguiente clasificación:

- Homeostasis: Todo sistema viviente puede definirse por su tendencia a mantenerse estable.
- Morfogénesis: Todo sistema puede definirse por su tendencia al cambio.

Luego, el estudiante mantendrá una interacción constante con los miembros de su familia, por tanto, actuará como un sistema permeable a los cambios y luego adaptable, o bien, impermeable manteniendo su actitud previa, lo cual se debe a su comportamiento y características propias. Así, se tienen dos tipos de sistemas. Los sistemas abiertos, que mantienen fronteras abiertas con el mundo (el resto de sistemas) con los que comparten intercambios de energía e información. Y los sistemas cerrados, donde hay escaso intercambio de energía e información con el medio más amplio en que viven.

Siguiendo la idea antes descrita y centrando el enfoque en la matemática educativa, el estudiante, como subsistema inserto en la familia, está constantemente ligado a patrones o imágenes a seguir, en su búsqueda de herramientas matemáticas. Y es en la familia donde ocurren los primeros destellos de educación. La familia es la unidad natural y primaria que necesita para su subsistencia la convivencia y la unión de todos sus miembros (Rodríguez, Torío y Viñuela, 2004). Incluso hay estudiantes que, según lo que han recibido de su familia, piensan que la matemática es difícil de aprender, aburrida, compleja e incluso es odiada por quienes no la entienden, generando entonces un rechazo a intentar comprenderla, haciendo más complejo para un docente enseñarla y, por cierto, evaluarla (Martínez Padrón, 2005). Es en este escenario donde el estudiante se encuentra expuesto al medio circundante y a cómo se conjugan las creencias (aceptan lo que de sus padres reciben), actitudes (producto de lo observado y vivido: el sujeto plantea una actitud frente al estudio y posterior aprendizaje de las matemáticas), emociones (afloran sus seguridades o miedos propios del ser).

Un acercamiento desde el dominio afectivo

El estudiante entonces estará sometido a tres aspectos esenciales, las creencias (que tengan en su entorno como facilitador de los conceptos, en sí mismo y en el proceso que esté llevando a cabo con el estudio de las matemáticas), las actitudes (las que mantenga en relación a lo vivido, a lo aprendido u observado en sus primeras etapas como sistema y que mostrará frente al estudio y al aprendizaje) y las emociones (podrán aflorar seguridades o incluso miedos, producto de sus propias experiencias, las cuales influirán en su proceso de estudio). Estos pilares, centrados en una dimensión afectiva, juegan un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (McLeod, 1994). Algunos de ellos, están fuertemente arraigados en el sujeto y no son fácilmente desplazables por la instrucción (Gómez-Chacón, 2000). Situaciones como, por ejemplo, el rechazo a las matemáticas porque los respectivos padres también las rechazan, o también cuando los padres opinan que las matemáticas sólo dan problemas, vienen a constituirse en un componente cognoscitivo que podría instalarse en este estudiante como una idea que se generalice y prolifere. Siguiendo esta idea, el estudiante en conflicto, con un potencial riesgo en cuanto a estudio y aprendizaje de las matemáticas se refiera, será parte de una serie de etapas en su proceso y es en estas donde se tendrá que detectar una posible intervención.

Creencias

Las creencias se centran principalmente en cuatro áreas de interés (Gómez-Chacón, 2000):

- Identificar y describir las creencias del individuo.

- Determinar las influencias de las creencias en el estudiante.
- Conocer cómo se originan y desarrollan las creencias.
- Buscar condiciones para propiciar un cambio de creencias.

Las creencias, son una de las componentes del conocimiento subjetivo implícito del individuo sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Así, las concepciones que pudiese tener, están asociadas fuertemente a sus experiencias pasadas y, por tanto, definirán una postura en el presente. Cuando el estudiante atribuye sus éxitos a factores externos e incontrolables, como la suerte, y sus fracasos a su escasa capacidad, factor interno y estable, disminuye la motivación y el rendimiento, pues al percibirse con baja capacidad y sin posibilidad de modificar o controlar las causas a las que atribuye el resultado, el estudiante reduce las expectativas futuras y provoca sentimientos de baja autoestima y actitudes negativas hacia el aprendizaje (Núñez y González-Pienda, 1994). Así, se instala una creencia asociada a la capacidad y a la confianza que el estudiante tenga. Muchos factores están relacionados con el desarrollo de este aspecto. Por ejemplo, la actitud de los padres es uno de los factores que influye en las creencias que posteriormente tengan los hijos de sí mismos. Cuando los padres proveen suficiente apoyo a los hijos, promueven el desarrollo de sentimientos positivos y, por lo tanto, de confianza en ellos.

Tabla 1: *Creencias a partir del entorno*

"Mi familia cree que sirvo para las matemáticas y que me irá bien"	Creencia instalada en la conducta del estudiante. Confianza en sí mismo.
"Mis compañeros no estudiarán porque es difícil. Creo que me irá mal también"	

Fuente: Elaboración propia según observaciones realizadas

Los estudiantes pueden desarrollar diversas creencias que pueden interferir en la confianza en sí mismos, algunas de ellas son positivas y otras negativas. Pero, lo significativo es cómo la creencia puede instalarse en la conducta que el estudiante tenga frente al estudio. Las creencias afectan a la percepción de nosotros mismos, de los demás y de las cosas y situaciones que nos rodean.

Actitudes

Si el individuo se encuentra con situaciones similares repetidamente, produciéndole la misma clase de reacciones afectivas, entonces la activación de la reacción emocional, ya sea satisfacción, frustración, etc. puede automatizarse e instalarse como una actitud (Gómez-Chacón, 2000). Así, las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas se ponen de manifiesto en la forma en que se acercan a las tareas, pudiendo ser confianza, deseos de explorar caminos alternativos, perseverancia, interés, etc. Asimismo, van a estar determinadas por las características personales del estudiante (Gómez-Chacón, 2000). Luego, es posible distinguir que la actitud interviene como una percepción del estudiante ante la utilidad de las matemáticas, como el auto concepto del estudiante o confianza respecto a las matemáticas, como la percepción de las matemáticas desde el punto de vista del alumnado, de sus padres, de los profesores o

bien como una componente de ansiedad. Entonces, podremos entender la actitud como una pre disposición de tipo evaluativa, es decir, positiva o negativa, que determinará las intenciones y que influirá en el comportamiento.
Está regida por una componente cognitiva, es decir, la variable propia desde la razón que el estudiante tenga, otra afectiva, manifestándose en los sentimientos de aceptación o rechazo al estudio (un sentimiento punzante) y una componente asociada a la tendencia que tenga el entorno del estudiante, hacia un cierto tipo de comportamientos.

Tabla 2: *Actitudes a partir del entorno*

"Mis amigos me invitaron a estudiar matemáticas, entre todos haremos la guía, tenemos un buen grupo de estudio"	Componente intencional. Se instala una tendencia a un comportamiento, fuertemente marcada por la actitud que el estudiante tenga.
"Mis padres me dicen que la matemática no es lo mío, me sugieren que me cambie de carrera"	

Fuente: Elaboración propia según observaciones realizadas

Además, las actitudes que tienen los estudiantes pueden mostrarse de dos formas: aquellas actitudes dirigidas hacia la matemática, aprecio, respeto o valoración hacia la matemática, y las actitudes matemáticas en sí, centrado en un aspecto puramente cognitivo, desarrollada por capacidades propias en el estudiante (Callejo, 1994). A diferencia de las creencias, las actitudes que los estudiantes desarrollen son las predisposiciones a actuar que tengan, modelada por un estado mental que se organiza a partir de las vivencias.

Emociones

Las emociones son respuestas organizadas que van más allá de los sistemas psicológicos, incluyendo también al fisiológico, cognitivo, motivacional y al sistema experiencial. Es por esta razón, que las emociones que el estudiante de matemáticas enfrente, tendrán su origen en un conjunto complejo de atribuciones, las cuales van desde la respuesta a un suceso que puede ser interno o externo, hasta la posterior elaboración o valoración que el estudiante realice frente a dicho suceso. Desde un enfoque psicológico de la emoción, se integra la activación fisiológica y el proceso de evaluación cognitivo, siendo la emoción una interacción compleja entre el sistema cognitivo y el sistema biológico (Mandler, 1984). Así, se propone que ambos pilares forman parte de la emoción que el estudiante genere.

Tabla 3: *Emociones a partir del entorno*

"Me fue excelente en la prueba, mis padres me felicitaron, me han ayudado mucho a estudiar matemáticas, celebraremos"	Reacciones psicofisiológicas, modos de adaptación. Se altera la atención, se modifican conductas. Se desarrolla un sentimiento, como consecuencia de la emoción.
"Mis compañeros me sacaron del grupo, ahora tendré que hacer el trabajo sólo y no entiendo matemáticas"	

Fuente: Elaboración propia según observaciones realizadas

Modelo transteórico de prochaska

El cambio de actitud del estudiante frente al estudio de las matemáticas, es un proceso individual que puede experimentar la persona y donde la relación con su entorno cumple un rol fundamental. Si la persona no está dispuesta a generar el cambio, este no sucederá. Sin embargo, es posible identificar ciertos escenarios y entonces fomentar dicho cambio. Así, es posible distinguir las siguientes etapas:

1. Pre-contemplación: el estudiante no es consciente del problema. Se observan mecanismos de defensa como la negación. Se desconoce la existencia de algún problema.
2. Contemplación: el estudiante se da cuenta que tiene un problema, observa los pros y los contras de su situación, pero aún no decide hacer algo. La idea de cambio ronda. Aún no hay un compromiso de pasar a la siguiente etapa.
3. Preparación: ya se ha tomado la decisión de hacer algo. Se dan los primeros pasos: buscar, indagar. Se alcanza un criterio conductual pre establecido para alcanzar la etapa de acción. Se diseña un plan de acción.
4. Acción: se ejecutan los pasos primeros al cambio. Se toman los pasos necesarios, sin excusas. Se involucran activamente en la nueva conducta. Aquí se da el mayor riesgo de recaída.
5. Mantenimiento: la nueva conducta debe estar instaurada, se crea un hábito. Se instala. El elemento principal es la estabilización del cambio conductual y evitar recaídas.

El docente debe estar alerta a los estados que presente el estudiante. Su papel se centra en elaborar y organizar experiencias didácticas que logren esos fines, en el desarrollo, inducción y enseñanza de estrategias y de detectar como intervenir y apoyar (Martínez Muñoz, 1996).

Comentarios finales

Luego de asistir a clases y observar a un grupo de estudiantes de ingreso a la carrera de Ingeniería Comercial, en la Universidad Andrés Bello, se realizaron sesiones de entrevistas personales y grupales con estudiantes. El grupo observado durante un semestre fue dividido a su vez en dos grandes grupos.

- El primero de ellos, GDA1 evidencia marcadas características ligadas al dominio afectivo, poseen un clima de refuerzo por la familia, cuentan con recursos, mantienen un buen manejo de sus emociones y por sobre todo presentan una actitud positiva frente al estudio de las matemáticas, caracterizada por un compromiso y responsabilidad en su quehacer universitario.
- El segundo grupo, GDA2 se caracteriza por no presentar apoyo de sus familiares, no cuentan con redes o sistemas dentro del aula, carecen de manejo emocional, muestran frustraciones y malas experiencias del pasado en cuanto a estudio de matemáticas se refiera. Son estudiantes que muestran un factor externo marcado por el desapego e incluso muchos de ellos se encuentran solos.

Estos dos grupos de estudiantes, separados en estas características señaladas, fueron monitoreados durante el semestre académico cuya duración es de 4 meses y a su vez, pudo subdividirse en dos escenarios fuertemente marcados. Estos dos escenarios obedecen a características de permeabilidad y se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 4: *Escenarios detectados*

Sistema abierto GDA1: Caso A Estudiantes que reciben estímulos, refuerzos, instalan creencias positivas, muestran una actitud activa y positiva frente al estudio. *Sistema cerrado GDA1: Caso B* Estudiantes que reciben los estímulos y refuerzos, pero instalan una actitud negativa, se muestran despreocupados, sin interés ante el estudio de las matemáticas.	*Sistema abierto GDA2: Caso C* Estudiante no recibe estímulos, no recibe contención, se vincula con rechazo al estudio, presenta miedo y frustración. *Sistema cerrado GDA2: Caso D* Estudiante no recibe estímulos, no recibe contención. Podría desarrollar emociones e instalar conductas negativas, pero se impermeabiliza. Caso de resiliencia.

Fuente: Elaboración propia a partir de observaciones realizadas

Conclusiones

Las siguientes conclusiones forman parte de una investigación en curso. A partir de la tabla 4, se plantea:

1. El caso (A) está fuertemente marcado por el entorno. Es el estudiante quien permite el apoyo de su medio circundante, en una suerte de permeabilidad selectiva, pudiendo utilizar a su favor las cualidades que ofrecen quienes lo rodean. El caso (D) está fuertemente marcado por la capacidad intrínseca del estudiante. La conciencia y la fuerza con la que logra proyectar sus metas y luchar por conseguirlas, hacen que estos pilares sean muy particulares en el estudiante y obedezcan a un selecto grupo.
2. El caso (B) son el tipo de estudiantes que se caracterizan por tener todo a su favor, pero no lo aprovechan. Está marcado por un buen dominio afectivo. Este grupo fue tratado de manera que el estudiante haya sido capaz de darse cuenta que tiene todo a su favor y que con un poco de esfuerzo y teniendo un rol activo y protagónico, puede lograr lo propuesto. Si otros pueden, ¿Por

qué este grupo no? Este grupo fue monitoreado e intervenido, en el estadio de contemplación y apoyado en la preparación al cambio (Prochascka, 1993). El docente puede guiar el cambio y hacer consciente que puede cambiar su actitud, cooperar a que el estudiante desarrolle su capacidad o perspectiva endogénica, mediante la cual realice procesamientos internos con los cuales pueda organizar la realizad para hacerla entendible.

3. El caso (C) es un grupo que no cuenta con el refuerzo y apoyo del entorno, se evidencia un mal dominio afectivo y en particular se muestra cómo el estudiante permeable a su medio circundante, sigue el patrón esperable y finalmente muestra un desinterés en aprender matemáticas. Este grupo fue monitoreado e intervenido con modelo de Prochascka, sin embargo, al no contar con un adecuado dominio afectivo, resultó fallido el intento de generar el cambio.

Finalmente, el dominio afectivo tiene una gran influencia en la actitud de los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas, desde la relación con la familia y sus compañeros. Además, cuando el estudiante está dispuesto a aprovechar su actitud, es posible realizar el cambio en su conducta y mostrar una actitud proactiva frente al estudio de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Bertalanffy, L. (1969). *Teoría General de los Sistemas* (1o edición). Buenos Aires.

Fondo de la Cultura Económica.

Callejo, M.L. (1994). *Un club matemático para la diversidad* (2ª edición). Madrid. Narcea

Gómez-Chacón, I.M. (2000). *Matemática emocional.* Madrid. Narcea.

McLeod, D.B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for research in Mathematics Education*, 25(6), 637-647.

Mandler, G. (1984). *Mente y cuerpo: psicología de la emoción y el estrés*. Nueva York: Norton.

Martínez Muñoz, M. (1996). *El clima de la clase*. Barcelona. Wolters Kluwer.

Martínez Padrón, O. (2005). Dominio afectivo en Educación Matemática, *Paradigma*, *24*(2), 7-34.

Núñez, J.C. y González-Pienda, J.A. (1994). *Determinantes del rendimiento académico*. Oviedo: SPU.

Rodríguez, T., Torío, S. y Viñuela, M.P. (2004). Familia, trabajo y educación. En M. A. Santos y J. M. Touriñán (Eds.): *Familia, educación y sociedad civil. Santiago de Compostela*. Universidad de Santiago de Compostela.

Prochaska, J.O. y Prochaska, J.M (1993). Modelo Transteórico de cambio de conductas adictivas. En Casas y M.Gossop (eds.) *Recaída y prevención de recaídas. Tratamientos psicológicos en drogodependencias.* Barcelona. Ediciones de Neurociencias, Citrán, FISP.

CRIANÇAS COM SÍNDROME DE DOWN: CONCEPÇÕES SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA

Elizândra de Sousa Barroso, Janaína Isabela de Jesus, Daniela Alves da Silveira Moura, Maria Goreth Carneiro
Faculdade de Pará de Minas. (Brasil)
elizandra_sb1@hotmail.com, janainaisabela@outlook.com, danisilmoura@yahooo.com.br, gorethnogueira@yahoo.com.brfelipe.marin@unab.cl

Resumo

O presente trabalho aborda o ensino/aprendizagem de Matemática para crianças com Síndrome de Down. Propõe-se averiguar como essas crianças desenvolvem suas habilidades matemáticas, de que forma interpretam, como expressam e registram suas ideias. Pretende-se também apresentar estratégias que favoreçam uma aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos por esse público. O estudo foi realizado por meio de uma abordagem qualitativa, usando materiais concretos adaptados de acordo com a necessidade de cada criança investigada na pesquisa. Os resultados revelam que, embora haja limitações na aprendizagem dessas crianças, é possível promover a aprendizagem de Matemática. Dessa forma, a utilização de metodologias eficazes favorece a aprendizagem levando a um melhor desempenho.

Palavras-Chave: matemática; síndrome de down; campos aditivos.

Abstract

This work addresses the teaching and learning of Mathematics to children with Down's syndrome. It aims at analyzing how those children develop their mathematical skills, the in which they interpret, and how they express and record their ideas. It also aims at introducing strategies, which can promote a significant learning of the mathematical concepts in this audience. The study was carried out by means of a qualitative approach, by using concrete materials adapted according to the need of each child investigated in this research. The results have shown that although there are some limitations in these children's learning, it is still possible to promote mathematical learning. Therefore, the use of effective methodologies favours learning and leads to a better performance.

Keywords: mathematics; down syndrome; additive fields.

Introdução

É fundamental para o desenvolvimento humano criar conexões entre a vida real e problemas matemáticos. A Matemática está presente cotidianamente, em todos os lugares. Portanto, trabalhar sobre seus conceitos possibilita a abertura de um caminho para tornar o desempenho escolar mais bem sucedido e para que o cidadão alcance maior autonomia e independência.

Aprofundando-se sobre a questão do ensino e aprendizado dos conceitos matemáticos, depara-se com uma necessidade ainda maior de analisar a aquisição das relações matemáticas por sujeitos com necessidades especiais. Dentre estes, está a criança com Síndrome de Down que tem como uma das características, o déficit intelectual. Segundo Gomes, (2011), essas crianças possuem memória de capacidade auditiva curta, dificultando a aprendizagem que é transmitida somente através da fala.

De acordo com Portal Brasil (2015), os dados do Censo Escolar divulgado pelo MEC no ano de 2015, houve um crescimento expressivo de matrículas dos alunos com necessidades especiais na educação básica regular. De acordo com esses dados, em 1998, haviam aproximadamente 200.000 alunos matriculados na educação básica, e somente 13% estavam em classes comuns. Já em 2014, cerca de 900.000 alunos estavam matriculados, sendo 79% deles em turmas comuns e, quando se restringe os dados somente às escolas públicas, o percentual de inclusão escolar nas classes comuns sobe para 93%.

O intento da pesquisa é nortear as pessoas da comunidade acadêmica, futuros professores e os que já atuam, como também aqueles que se interessam em conhecer um pouco mais sobre como os alunos com Síndrome de Down interpretam, expressam e registram suas ideias, buscando uma estratégia simples que possa contribuir para a aprendizagem.

Neste sentindo, questiona-se sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática: é possível que alunos com Síndrome de Down aprendam matemática? Como esses sujeitos interpretam, expressam e registram suas ideias?

Para responder a essas perguntas, a metodologia adotada foi uma pesquisa qualitativa com ênfase em um estudo de caso, que se fundamentou nos conceitos de Ludke e André (1986), que afirmam que o estudo de caso deve ser utilizado quando se quer estudar algo singular, que tenha um valor em si mesmo. Para eles, a observação direta permite também que o observador chegue mais perto da perspectiva do sujeito.

Ensino da matemática para alunos com síndrome de down

De acordo com Castro e Pimentel (2007), a Síndrome de Down (S.D), também conhecida por trissomia do cromossomo 21, é causada por alteração genética. Essa Síndrome acarreta um atraso no desenvolvimento cognitivo, porém isso não impossibilita que a pessoa adquira potencial para atender a seus estímulos e às exigências externas.

Bassani (2012) afirma que os estudos têm comprovado que as dificuldades que as crianças possuem em aprender são um transtorno ou desordem e que as dificuldades que mais causam deficiências acadêmicas são as que estão interligadas a audição, visão, fala, leitura, escrita, habilidades motoras finas e raciocínio matemático. Isso resulta da dificuldade de focalizarem atenção.

Assim como qualquer criança, as crianças que nascem com Síndrome de Down possuem capacidade intelectual, porém apresentam algumas limitações cognitivas. Encurtar instruções, permitir tempo extra para conclusão, bem como o uso de imagens, objetos físicos, e outros processos multissensoriais, além de reduzir a quantidade de informações ou execução de habilidades motoras finas necessárias para concluir a tarefa, são ações que contribuem para a promoção da aprendizagem e da autonomia desse público.

Também é favorável conectar os interesses pessoais dos alunos com o tema, sempre que possível. Crianças com síndrome de Down apresentam características, como aprender a contar de forma mecânica, sem compreensão conceitual. Essas dificuldades na contagem são justificadas pela sua lentidão nos movimentos, o que prejudica a associação da contagem mecânica (verbal) à contagem do material (coordenação motora), implicando um déficit maior, no que se refere à compreensão do número em sua totalidade.

Experiências baseadas em materiais concretos têm revelado que esta modalidade torna para as crianças a aprendizagem mais favorável, significativa e bem sucedida. Kamii (1986) enfatiza essa ideia, afirmando que o número é construído por cada criança a partir de todos os tipos de relações que ela cria entre os objetos. Há que se lembrar: a alfabetização matemática é uma competência essencial para o desenvolvimento de todas as crianças, como apontado por documentos oficiais no Brasil:

> [...] construir o significado do número natural a partir de seus diferentes usos no contexto social, explorando situações-problema que envolvam contagens, medidas e códigos numéricos. Interpretar e produzir escritas numéricas, levantando hipóteses sobre elas, com base na observação de regularidades, utilizando-se da linguagem oral, de registros informais e da linguagem matemática (Brasil, 1997, p. 47).

Campos conceituais aditivos

A teoria dos campos conceituais é uma teoria do desenvolvimento que abarca dois objetivos, a saber, descrever e analisar a complexidade gradativa ao longo do tempo das habilidades e competências matemáticas que os alunos desenvolvem intra e extra-escolar, e correlacionar a forma operacional de conhecimento, que consiste na ação no mundo físico e social, com a forma qualitativa do conhecimento, compreendendo os fenômenos linguísticos e simbólicos desse conhecimento.

Vergnaud (1996) discrimina dois sistemas de campos conceituais, Aditivo e Multiplicativo. Nesta pesquisa, o estudo limita-se ao primeiro sistema, o Aditivo. Segundo o autor, compreende-se Campo Aditivo por "problemas do tipo aditivo", que são situações matemáticas cuja solução mobiliza ações operacionais da adição e da subtração, ou seja, as relações em jogo são formadas exclusivamente por adições ou subtrações.

Para elevar a efeito, serão apresentadas algumas propostas dos campos conceituais que foram aplicadas aos alunos com Síndrome de Down no próximo tópico.

Estudo de caso

Ramos (2009) afirma que fazer conexões e envolver historinhas matemáticas instiga o envolvimento, a comunicação, e as múltiplas maneiras de representar e compartilhar informações. O aluno com Síndrome de Down apresenta maior facilidade através de estímulos visuais, que, além de chamar mais a atenção proporciona uma eficaz estratégia na construção do conhecimento acerca da imagem conceitual de entes matemáticos.

Diante desta realidade, buscou-se desenvolver as habilidades matemáticas em situações problemas, aliadas a um material concreto, chamado Akio, desenvolvido por Leo Akio Yokoyama no ano de2012. O material Akio é um conjunto de objetos confeccionados com o uso de materiais acessíveis que consiste em formas numéricas que representam números de 1 a 10, fichas ou cartões numerados de 0 a 100, tampinhas de garrafas, e um barbante. Também foi feita adaptação de outro material chamado Numicon, que é um conjunto de materiais multissensoriais, desenvolvido na Inglaterra, composto por formas numéricas coloridas, cartões numerados, pinos coloridos, tabuleiro, proposta de atividades, dentre outros.

A pesquisa foi realizada em três cidades do estado de Minas Gerais, Brasil: em rede pública de ensino de Igaratinga, na rede particular de ensino de Itaúna e em uma escola para alunos com necessidades especiais de Pará de Minas. No entanto, para a discussão neste trabalho, escolheu-se aleatoriamente dois sujeitos com Síndrome de Down, os quais serão nomeados como aluno A, que tem 14 anos, e aluno B, que tem 12 anos, de uma escola privada de Itaúna.

Dentre essas tarefas, discutir-se-á no presente artigo algumas atividades que abarcam estruturas do campo aditivo, nas quais foram utilizados como objeto de estudo, os registros dos alunos nas resoluções dessas tarefas, cujo objetivo era avaliar a habilidade, tomada de decisão e registros destes no desenvolvimento das questões.

Proposta de atividade sobre campos conceituais aditivo

Para dar continuidade a essa análise, serão apresentada três situações - problema que envolvem campo aditivo. O objetivo dos próximos itens é desenvolver as estruturas de Composição, Transformação e Comparação, bem como identificar as estratégias de resolução, interpretação e registros dos alunos.

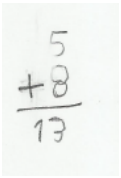
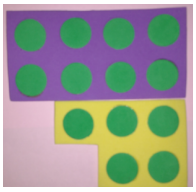
ATIVIDADE 1: Renato tem 5 bolinhas de gude. João tem 8 bolinhas a mais que Renato. Quantas bolinhas de gude tem João?		
Aluno A	Aluno B 	 *Numicon Adaptado*

Figura 1: Fichas enumeradas com os números 8 e 5, feitas de papel. Fonte: Elaboração Própria

A atividade 1 apresentou a Comparação e, nesse conceito, há uma ação de relacionar, comparar duas quantidades. Foi observado que o aluno A não interpretou corretamente. Usando registro pictórico (figuras), representando o total e marcando com um "x" a quantidade que pensou que deveria retirar. Vale ressaltar que, na situação problema, João tem mais bolinhas que Renato, no entanto na resposta do aluno A o resultado é menor do a quantidade de Renato. No desenvolvimento do aluno B, observou-se que ele

agrupou a quantidade de Renato com a quantidade que João tinha a mais, ou seja, somou e realizou a tarefa corretamente.

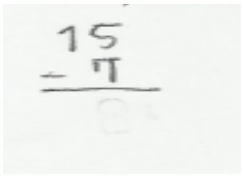
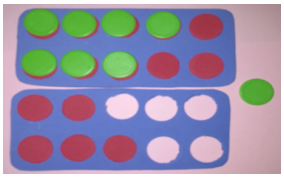
ATIVIDADE 2: Numa cesta há 15 frutas, sendo 7 maçãs e as demais, peras. Quantas são as peras nesta cesta?	
Aluno B 	***Material Akio*** 

Figura 2: Fichas enumeradas de base 2 feitas de papel E.V.A e pequenos círculos para identificar os números solicitados na situação problema. Fonte: Elaboração Própria

A partir desta tarefa foi observado que o desenvolvimento era complexo, e, por isso, apesar da tentativa e intervenções, o aluno A não conseguiu concluir. O conceito de Composição com variação como neste caso, busca-se o estado intermediário é um fenômeno que requer maior abstração, a tarefa instiga o ato de completar, ou quanto falta para completar, ou seja, buscar a quantia necessária que se deveria acrescentar para se obter o total de 15 frutas. Assim, com a colaboração da professora e o uso de fichas (verdes), como a apresentada ao lado do material Akio na imagem 2, o aluno B foi estimulado a cobrir o material com as fichas. Desse modo, ele prosseguiu no raciocínio, contou as "bolinhas vermelhas" e apresentou o resultado 8 oralmente. Em seguida registra a operação sem o resultado.

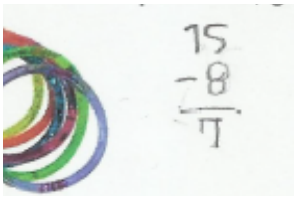
ATIVIDADE 3: Renata tinha 8 pulseiras, ganhou algumas e ficou com 15. Quantas pulseiras ela ganhou?	
Aluno B 	*Material Akio*

Figura 3: Fichas enumeradas de base 2 feitas de papel E.V.A e pequenos círculos para identificar os números solicitados na situação problema. Fonte: Elaboração Própria

Essa proposta abarca a estrutura Transformação com estado intermediário. Vale ressaltar que, ao mudar o estado, a palavra-chave "ganhar" incorpora um comando contrário, tornando a interpretação complexa e, nesse caso, espera-se que o evento se traduza numa subtração. Para resolvê-la, o aluno B faz analogia a

partir dos movimentos que realizou na tarefa anterior, ou seja, usa as fichas verdes e conta as "bolinhas que sobraram", registra a operação e soluciona o problema.

Além dessas atividades, várias outras foram aplicadas, envolvendo esses conceitos. Essa forma lúcida de abordar a Matemática objetivou a assimilação de noções numéricas o aperfeiçoamento da memorização. Para o desenvolvimento das atividades, as crianças utilizaram as peças de adaptação do material Numicon, do material Akio, e também utilizaram o próprio "instrumento" sensorial, as mãos.

Conclusão

Refletindo sobre a prática aplicada hoje pelos professores, percebe-se que ainda existe um grande desafio para o ensino da Matemática aos alunos com Síndrome de Down. Diante desta realidade, é essencial que haja aprofundamento nas pesquisas já desenvolvidas sobre o tema.
Campo Aditivo como forma de trabalho, teve a proposta de levar o aluno a entender as questões de adição e subtração de maneira coerente com sua vivência real, pois palavras, como ganhar ou perder/colocar ou tirar estão presentes em seu vocabulário e são capazes de subsidiar a resolução das questões.

No desenvolvimento desse trabalho, estimulou-se a aprendizagem dos alunos por meio do uso de materiais concretos, o que facilitou no processo ensino aprendizagem, como também buscou-se proporcionar às crianças a oportunidade de entrar em contato com o maior número de situações-problema com que se envolviam no dia-a-dia. Em uma análise geral, o uso desses materiais proporcionou uma aprendizagem construída através do prazer e do interesse pelo mundo desvendado através dos números.

A Matemática está presente todos os dias, em todos os lugares. Trabalhar sobre conceitos de Matemática, utilizando ferramentas eficazes e diversificadas estratégias, oferece maiores oportunidades para a construção do conhecimento desses alunos, abrindo o caminho para um desempenho escolar mais bem-sucedido, alcançando assim, maior autonomia e independência do cidadão.

Por meio dos dados coletados, fica evidente que a criança com Síndrome de Down é capaz, sim, de desenvolver suas habilidades matemáticas. Então, faz-se necessária a inclusão dessas crianças, pois, de acordo com Vygotsky e Cole (1998), a interação com o meio tem um papel relevante no desenvolvimento da mente e os processos de aprendizagem são estabelecidos com o convívio entre diferentes sujeitos. O sucesso reside em capitalizar os pontos fortes de aprendizagem visual desses alunos a partir de situações concretas e da utilização de materiais manipulativos, jogos e atividades usados para ensinar e manter a motivação.

Referências bibliográficas

Bassani, C. (2012). *A síndrome de Down e as dificuldades de aprendizagem.* Anhanguera Educacional. Unidade Taboão da Serra.

Brasil. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. 142 p. Brasília: MEC/SEF.

Castro, A; Pimentel, S. (2009). Síndrome de Down: desafios e perspectivas na inclusão escolar. Em. Díaz, F., et al. *Educação inclusiva, deficiência e contexto social:* questões contemporâneas. (pp. 303-312), Salvador: EDUFBA.

Gomes, R. (2011). *Processo de ensino-aprendizagem para alunos portadores de Síndrome de Down.* Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, Brasil.

Kamii, C. (1986). *A criança e o número:* implicações educacionais da teoria de Piaget para a educação junto a escolares de 4 a 6 anos. (5 ed). Campinas: Papirus.

Ludke, M; André, M. (1986). *Pesquisa em Educação:* Abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Portal Brasil. (2015). *Educação*. Recuperado de 23 de fevereiro de 2017 de http://www.brasil.gov.br/educacao/2015/03/dados-do-censo-escolar-indicam-aumento-de-matriculas-de-alunos-com-deficiencia

Ramos, L. (2009). *Conversas sobre números, ações e operações:* Uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos. São Paulo. (Ed). Ática.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais. En Brun, J. *Didática das Matemáticas*. (pp. 155-191), Lisboa: Instituto Piaget.

Vygotsky, L., Cole, M. (1998). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. (6a ed.) São Paulo: Martins Fontes.

Yokoyama, L. (2012). *Uma abordagem multissensorial para o desenvolvimento do conceito de número natural em indivíduos com Síndrome de Down.* (Tese de Doutorado). Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, Brasil.

PRÁTICAS PEDAGÓGICAS DO ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO ESCOLAR INDÍGENA E O DIÁLOGO COM A ETNOMATEMÁTICA

Aldenor Araújo da Silva, José Roberto Linhares de Mattos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. (Brasil)
aldenor.silva@ifrr.edu.br, jrlinhares@gmail.com

Resumo

Este trabalho versa sobre práticas pedagógicas do ensino de Matemática na Educação Escolar Indígena por meio do diálogo com a Etnomatemática. Procuramos identificar e analisar as dificuldades enfrentadas pelos discentes das etnias Macuxi, Wapixana e Mandalay e pelos docentes de um Curso Técnico em Agropecuária, nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Buscamos valorizar os saberes indígenas através da utilização da Etnomatemática como metodologia para facilitar a compreensão dos conteúdos matemáticos. Apesar de ainda em andamento, os resultados permitem concluir, preliminarmente, através do reconhecimento dos próprios indígenas, que os saberes nativos são fundamentais para a compreensão de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: práticas, educação escolar indígena, etnomatemática.

Abstract

This work deals with the pedagogical practices of mathematics teaching in Indigenous School Education based on a dialogue with Ethno-mathematics. We seek to identify and analyze the difficulties faced by the students of the Macuxi, Wapixana and Mandalay ethnic groups and by the teachers of an Agrarian Technical Course, in the teaching and learning processes of Mathematics. We seek to value indigenous knowledge using Ethno-mathematics as a methodology to facilitate the understanding of mathematical contents. Although still in progress, the results allow us to conclude, through the recognition of the natives themselves, that native knowledge is fundamental to the understanding of mathematical concepts.

Key words: practices, indigenous school education, ethnomathematics.

Introdução

Na última década ocorreu um aumento significativo da oferta de Ensino Médio, Tecnológico e Superior no Brasil. Os Institutos Federais de Educação são responsáveis, também, por esse processo de expansão, com a construção de campus em áreas do interior dos Estados. No Estado de Roraima, o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR), com sede na capital Boa Vista, ampliou sua oferta para os municípios do interior. O Campus Amajarí, localizado na Zona Rural, é resultado desse processo de expansão, com forte tendência para a agricultura e marcante presença indígena. Entretanto, mais do

que ampliar a oferta de ensino é importante discutir as políticas de formação, bem como refletir sobre a qualidade da educação prestada por essas Instituições.

Desta forma, estamos desenvolvendo um trabalho que decorre de experiências diretas vivenciadas no dia a dia dos docentes que lecionam matemática no ensino médio integrado do IFRR/Campus Amajarí, tendo em vista que muitos discentes apresentam baixo rendimento e dificuldade em aplicar os conhecimentos, devido ao modelo conteudista do currículo. O objetivo é ressignificar a aprendizagem e aproximar o ensino escolar dos saberes culturais dos discentes, por ser uma clientela composta, quase que totalmente, de indígenas. Para isso, buscamos responder à seguinte pergunta: Como a Etnomatemática pode contribuir, enquanto alternativa metodológica no ensino da Matemática, utilizando-se dos saberes culturais da Educação Escolar Indígena?

Nesta direção, buscamos identificar e analisar as dificuldades enfrentadas por docentes e discentes das etnias indígenas Macuxi, Wapixana e Mandalay, nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática do Curso Técnico em Agropecuária oferecido pelo IFRR, Campus Amajarí, Comunidade do Contão. Apesar da pesquisa estar em andamento, resultados parciais apontam que a Etnomatemática é de fundamental importância nestes processos, por meio da relação dos saberes culturais indígenas com os conteúdos escolares.

A importância da pesquisa reside no fato de ser um estudo sobre a revitalização dos saberes indígenas, que é um processo vivenciado por diversas comunidades em todo o mundo. Da mesma forma, por ser um estudo sobre um tema ainda incipiente e pouco estudado em comunidades indígenas, particularmente no Estado de Roraima, carente de estudos específicos. Sua relevância reside no fato de ser uma pesquisa que poderá servir de base para análise de casos semelhantes, de comunidades que estão buscando revitalizar seus saberes. E, também, por ser um estudo sobre os motivos que dificultam a adoção de saberes indígenas nos processos de ensino e de aprendizagem, fato que merece um olhar crítico e cuidadoso.

Etnomatemática e a prática pedagógica

Para D`Ambrosio (2011), a Matemática praticada na escola não é a única possibilidade de se fazer Matemática, pois existem outras formas inerentes a cultura das sociedades. Desse modo, a Etnomatemática pode ser vista como uma forma de valorizar os conhecimentos culturais dos mais variados grupos culturalmente diferenciados, utilizando os seus "modos de calcular, medir, estimar, inferir, raciocinar e problematizar" (Knijnik 2004, p.22).

Da mesma forma, para Brandão (1995), a educação é um processo dinâmico e continuo que envolve diversos sujeitos. Ela se dá em ambientes sociais dos quais participam educador e educando e é mediada por elementos que envolvem a vida concreta, pela tradição cultural e por experiências individuais. Esses aspectos são indissociáveis e interferem nos processos de ensino e de aprendizagem. Portanto, "não podemos desconsiderar, tanto para o estudante quanto para o professor, as experiências vivenciadas além dos muros da escola, em um ambiente cultural" (Mattos, 2016, p. 9). Neste sentido, a produção do conhecimento envolve atividades de trabalho, lazer, ritos, códigos, arte, religião e as diversas expressões culturais.

A Matemática do currículo escolar, assim como outras disciplinas, tem a função de auxiliar na compreensão de processos que vão do conceito ao uso de instrumentos e técnicas. Assim nos cursos técnicos como o de Agronomia, ela auxilia na utilização racional dos recursos disponíveis a partir da contextualização e na relação teoria e prática. Além do mais, como observa Gimeno Sacristán (2000, p. 09),

> [...] A qualidade da educação e do ensino tem muito a ver com o tipo de cultura que nela se desenvolve, que obviamente ganha significado educativo através das práticas e dos códigos que a traduzem em processos de aprendizagem para os alunos.

Alguns estudos e pesquisas indicam que a contextualização, a interdisciplinaridade e a transdisciplinaridade desempenham um importante papel na produção de conhecimentos por professores e estudantes nas práticas de ensino de Matemática, permitindo uma melhor aplicabilidade dos conteúdos. Desse modo, a Matemática ganha sentido para o ensino de tecnologias e para a vida cotidiana. Mas para isso é necessário superar o paradigma de que o conhecimento já está previamente estabelecido, trazendo os saberes dos estudantes e de sua comunidade no sentido de dar significado aos conteúdos matemáticos, tornando a aprendizagem significativa (Knijnik, 2004)

Fiorentini (1994, p. 38) afirma que aquele professor que ainda concebe a Matemática como uma ciência exata, pronta e acabada, terá uma prática pedagógica diferente daquele que a concebe como uma ciência viva, dinâmica e que se relaciona com a vida social. Por isso, é fundamental uma discussão dos caminhos pedagógicos que o ensino de Matemática deve tomar, buscando uma autorreflexão, a construção de novas propostas que venham colaborar com a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados.

É possível perceber que povos diferentes possuem formas diferentes de ver e organizar o mundo. Neste sentido, vale ressaltar que o mesmo pode se aplicar ao processo educativo, ou seja, culturas diferentes educam de formas diferentes! Assim, povos diferentes tendem a elaborar processos matemáticos também de formas diferentes. Reconhecemos então que as comunidades têm seus próprios costumes, tradições, elementos culturais e uma educação informal, aquela que existe independente de uma Instituição. Por outro lado, para que aconteça a educação formal, aquela sistematizada no saber escolar, deve-se respeitar a diversidade e considerar os elementos da educação informal como instrumentos facilitadores do ensino e da aprendizagem.

Pesquisadores, como D´Ambrosio (2009), Knijnik (2004) e Mattos (2016), por meio do programa Etnomatemática, que estuda como se dá a relação entre os saberes culturais e os escolarizados, têm buscado compreender a utilização das estratégias matemáticas nos mais diversos grupos culturalmente diferenciados.

A Etnomatemática, como alternativa metodológica de ensino, aproxima os saberes ou as competências já presentes nos sujeitos, mobilizando-as entre outras competências e conhecimentos, tendo como base a contextualização. Por exemplo, muitos estudantes possuem técnicas próprias de manejo com o gado ou uma plantação, estabelecidas no campo do conhecimento empírico, mas que necessitam ser sistematizadas por procedimentos do campo do conhecimento acadêmico. A Etnomátimatica torna-se fundamental, na medida em que busca compreender como esses conhecimentos se inter-relacionam.

Devemos entender que um saber não deve negligenciar outro, mas serem compreendidos como formas diferentes de leitura do mundo e de uso de técnicas, como as agrícolas. Isso equivale a pensar que "o caráter múltiplo da educação reside no fato de, a partir de certo momento, ter que se diversificar de acordo com a complexidade da sociedade" (Groppo, 2008, p.4), fazendo com que conhecimentos como o matemático se diversifiquem e utilizem outros para ganhar significado no ensino e na aprendizagem.

Nesta perspectiva, a Etnomatemática, por contemplar a Matemática construída com base em saberes das comunidades, possibilita novos caminhos para o desenvolvimento da aprendizagem e cria novas formas de ensino, contribuindo para o senso crítico, condição necessária para a transformação do sujeito e, consequentemente, da sociedade.

D'Ambrosio (2001) argumenta que a Matemática só poderá ganhar sentido se pudermos relacioná-la a atitudes morais e éticas que permitam diminuir a desigualdade social presente na sociedade, e quando possível contextualiza-la, ou seja, permitir que os conteúdos se relacionem com o contexto sociocultural, atribuindo significado a fórmulas e por meio de resolução de problemas. Isso significa produzir ou construir formas de conhecimento que venham ultrapassar o universo da sala de aula e os muros da escola.

Neste sentido, as práticas pedagógicas e o currículo escolar devem levar compreensão da existência de muitas formas de contar e manejar quantidades e como cada sociedade entende o mundo que a cerca e aplica os conhecimentos conforme sua forma de apropriação e representação do conhecimento (Peixoto Filho e Martins, 2009).

Vale ressaltar que o currículo deve ser algo flexível, e não uma forma rígida e autoritária de se pensar a realidade, o que acaba, em muitas circunstâncias, engessando o conhecimento. A prática pedagógica de Matemática depende da concepção que se tem do ensino e da aprendizagem. Para a Etnomatemática, é fundamental a valorização do saber local, sendo concebida como instrumento de aprendizagem, ultrapassando assim o entendimento de que a Matemática é uma ciência mediada por leis universais imutáveis.

A dimensão política na educação escolar indígena

A educação escolar no Brasil sempre apresentou a dicotomia entre Estado e sociedade, onde quase sempre permanecem duas questões, a de dominação e a de pluralismo cultural. A imposição de valores da cultura escolar dominante acaba prevalecendo sobre as outras formas de educar, muito embora essa realidade venha se modificando pelo ativismo social e pelas pesquisas na área da educação.

A prática de uma educação exógena às sociedades indígenas, imposta de fora, pode ser presenciada desde o processo colonizatório europeu, sendo a Igreja Católica sua principal articuladora, através da atuação particularmente jesuítica, uma das principais promotoras. Segundo Brandão (1995, p. 149),

> A implantação de projetos escolares para populações indígenas é quase tão antiga quanto o estabelecimento dos primeiros agentes coloniais no Brasil. A submissão política das populações nativas, a invasão de suas áreas tradicionais, a pilhagem e a destruição de suas riquezas, etc. têm sido, desde o Século XVI, o resultado de práticas que sempre souberam aliar métodos de controle político a algum tipo de atividade escolar civilizatória.

É importante observar quão problemática é a questão da educação escolar indígena, sempre que imposta de fora, quase sempre não valorizando os saberes tradicionais dos povos. Essa educação escolar descontextualizada, que não leva em conta os saberes tradicionais, acaba fazendo "estragos", como dizem Silva e Azevedo (1995, p. 153). Daí a importância de recorrer aos conhecimentos tradicionais internalizados pelos mesmos, e é neste contexto que se insere os cursos oferecidos pelo IFRR para as comunidades indígenas.

Os povos indígenas sempre estiveram à mercê dos esquemas assimilatórios impostos pela sociedade envolvente. Em comparação com o que antes existia das sociedades indígenas, pouco restou, o processo colonizatório europeu conseguiu dizimar grande parte destas populações. As que restaram, muitas acabaram perdendo seus patrimônios culturais em parte ou na totalidade, outras conseguiram manter seus patrimônios culturais, pelo pouco contato com a sociedade não indígena.

Diversos povos indígenas vêm sofrendo um processo de exclusão dos centros de decisões, ainda que iniciativas tímidas venham sendo estruturadas com a finalidade de inclusão dos mesmos. Diante da perspectiva apresentada para a região Raposa Serra do Sol, a formação acadêmica dos povos que ali habitam é indispensável para o desenvolvimento da mesma. Sabemos que a globalização é um fenômeno cada vez mais pujante, e quem não está em consonância com o mesmo é excluído. Com as comunidades indígenas ocorre o mesmo fenômeno e com mais agravantes.

Essas populações há décadas esquecidas por nossos governantes, desassistidas nos seus diretos básicos como saúde e educação, excluídos do desenvolvimento do país, enfrentam vários problemas, dentre eles o da aprendizagem. É nesta perspectiva que este projeto de pesquisa vem a somar esforços, oferecendo a estes estudantes uma metodologia de ensino alternativo, abordando os saberes locais, considerando sua cultura, seus ritos, suas crenças, como elementos balizadores da aprendizagem.

É notório o fato de que uma das disciplinas que apresenta mais dificuldade de aprendizagem é a Matemática, principalmente no nível básico. Sabemos que os povos indígenas desenvolvem sua própria Matemática, que soluciona os problemas voltados para sua realidade. Também existem diversas Matemáticas desenvolvidas por diversos povos que solucionam o mesmo tipo de problema, pois segundo D'Ambrosio (2001, p.16):

> Não há porém, uma só Matemática; há muitas Matemáticas. O que chamamos de história "da" Matemática, suposta aproximação progressiva de um ideal único, imutável, tornar-se-á, na realidade, logo que se afastar a enganadora imagem da superfície histórica, uma pluralidade de processos independentes, completos entre si, uma sequência de nascimentos de mundos de formas, distintos e novos, que são incorporados, transformados, abolidos; uma florescência puramente orgânica, de duração fixa, seguida de fases de maturidade, de definhamento, de morte.

O avanço das tecnologias é outro fator que pressiona as comunidades indígenas a se adequarem para sua inserção neste mundo da globalização, principalmente as tecnologias de comunicação e de informação. É comum os indígenas operarem vários equipamentos eletrônicos, principalmente computadores e telefones celulares. A necessidade do manuseio desses equipamentos faz com que os indígenas procurem cada vez

mais aprender conteúdos novos, e para tal, precisam ter conhecimento e embasamento teóricos mais elaborados, dentre estes os da Matemática.

Assim, ao absorver os elementos de outra cultura, os indígenas se transformam, tendo sua identidade modificada, influenciada pela cultura apreendida. Este processo é muito cruel para os indígenas, pois, às vezes, em curto espaço de tempo, têm que aprender conteúdos que levaram milhares de anos para serem desenvolvidos e alicerçados.

Com isto, é inevitável o fracasso de muitos deles, uma vez que não há uma contextualização deste conteúdo com a realidade vivenciada em suas comunidades ou aldeias. O resgate em parte de sua cultura original é de suma importante para sobrevivência das comunidades indígenas, uma vez que retoma hábitos e costumes tradicionais destes povos, fortalecendo sua cultura, suas crenças, ritos e costumes. A Etnomatemática é um programa que tem exatamente este enfoque, ela oferece estratégias para a sobrevivência de um povo (lidar com o cotidiano) e para transcender (diagnosticar fatos, fenômenos, mistérios e criar opções de futuro).

Segundo D' Ambrosio (2001, p. 09),

> É evidente a dimensão política da Etnomatemática. Etnomatemática é a Matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos. Além desse caráter antropológico, a Etnomatemática tem um indiscutível foco político. A Etnomatemática é embebida de ética, focalizada na recuperação da dignidade cultural do ser humano. A dignidade do indivíduo é violentada pela exclusão social, que se dá muitas vezes por não passar pelas barreiras discriminatórias estabelecidas pela sociedade dominante, inclusive e, principalmente, no sistema escolar.

A dominação dos conhecimentos da Matemática ao longo dos tempos, sempre representou poder. Em qualquer cultura existe a Matemática diversificada nas mais várias formas, nos trabalhos artesanais, nas manifestações artísticas nas práticas comerciais e industriais. Recuperar e incorporar isso à nossa ação pedagógica é um dos principais objetivos do Programa Etnomatemática. Segundo D' Ambrosio (2001), a Etnomatemática é eficiente em qualquer contexto:

> A Matemática contextualizada se mostra como mais um recurso para solucionar problemas novos que, tendo se originado da outra cultura, chegam exigindo os instrumentos intelectuais dessa outra cultura. A Etnomatemática do branco serve para esses problemas novos e não há como ignorá-la. A Etnomatemática da comunidade serve, é eficiente e adequada para muitas outras coisas, próprias àquela cultura, aquele etno, e não há porque substituí-la. (pp. 80-81)

Assim, ao absorver outra cultura, os indígenas se transformam, tendo sua identidade modificada, influenciada pela cultura apreendida, jamais voltando ao estado inicial. Resta aos educadores a tarefa de fortalecer, encorajar e revitalizar os saberes culturais desses povos indígenas, fazendo uma estreita relação dos saberes culturalmente apreendidos com o novo a ser descoberto. E ter sempre em mente um olhar holístico para a preservação da mãe natureza, tratando com reverencia o místico e o exótico.

Segundo Vergani (2007), a Etnomatemática tem o poder de descentralizar as referências habituais, não segue nenhuma linha formativa em especial. Para a referida autora,

> A Etnomatemática se descentraliza das referências habituais a um currículo uniforme ao qual a população escolar é obrigada a se conformar. Está consciente da necessidade de formar jovens capazes de se integrarem num mundo globalizante, mais uno e mais justo, mas sem os amputar dos valores socioculturais específicos do meio no qual se inserem. (p.7)

Assim, a pesquisa busca mostrar a importância da Etnomatemática como um instrumento não só pedagógico-didático, mas também político, na medida em que reivindica os direitos de povos que não têm, em muitas circunstâncias, como fazer valer seus costumes, tradições e referências culturais.

Considerações finais

O que percebemos até agora em nossa investigação é a necessidade da utilização dos saberes nativos dos indígenas para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem. Neste sentido, a Etnomatemática torna-se uma alternativa metodológica para o ensino da Matemática, tornando a aprendizagem significativa na formação do indivíduo, aproximando o ensino escolar dos saberes culturais dos estudantes, no sentido de romper com um currículo tradicional, pluridisciplinar, no qual os conteúdos são justapostos.

Um dos fatores que contribui para essa proposta decorre de os conteúdos trabalhados serem descontextualizados e o protagonismo estudantil ser pouco valorizado, aspectos que indicam a necessidade de reflexões sobre as práticas pedagógicas no ensino da Matemática e renovação metodológica. Aliada a essas questões, considera-se também a tríade reflexão-ação-reflexão, fato que nos faz refletir sobre o baixo rendimento escolar, a dificuldade de interpretação e assimilação por estudantes de certos conceitos matemáticos e sua utilidade.
Percebemos na prática de sala de aula diversas dificuldades que envolvem leitura e interpretação de texto, transposição de conteúdos teóricos para o campo prático na área de Matemática. No entanto, em algumas atividades práticas, de aula de campo, nas quais os estudantes utilizam os saberes de suas culturas, é perceptível as habilidades que possuem em operações e resoluções de problemas matemáticos.

Portanto, é preciso superar o distanciamento entre os saberes culturais dos discentes e aqueles adquiridos na escola, fazendo da Matemática algo vivo, lidando com situações reais, possibilitando ao professor e ao aluno interagirem na geração do conhecimento, aproximando o diálogo entre a Matemática escolar e a Etnomatemática.

Outro ponto importante que temos de considerar é a região onde esses discentes estão inseridos, uma vez que a comunidade do Contão está localizada dentro da gleba Raposa Serra do Sol, onde convivem várias etnias, entre as quais podemos citar os Macuxi, Wapixana e Mandalay.

As dificuldades aumentam quando se trata da formação docente. A qualificação acadêmica dos professores é um ponto que deve ser levado em consideração, pois alguns que lecionam na escola do Contão carecem de uma formação mais adequada para o exercício do magistério. Devido, entretanto, a carência de professores na região, pessoas de origem indígena e não indígena acabam exercendo a profissão de magistério sem a devida qualificação exigida por lei e sem o preparo profissional para tal.

A perda de elementos culturais talvez seja um dos principais problemas enfrentados pelas sociedades de pequena escala, particularmente as sociedades indígenas que têm sofrido com os processos descaracterizantes do contato com as populações envolventes. A perda desses elementos culturais em diversas comunidades tem sido uma constante, mostrando-se com muito vigor no processo educacional através de modelos importados de fora e impostos às comunidades indígenas, na maioria das vezes, sem qualquer senso crítico.

Além disso, os elementos da cultura envolvente acabam muitas vezes sobrepujando os elementos das culturas indígenas, fator que pode contribuir para o baixo rendimento dos discentes. Neste sentido, podemos perceber, muitas vezes, como os currículos das nossas escolas formais são impostos a outros contextos que organizam suas realidades educacionais de forma muito diferente da nossa, como no caso da educação voltada para as comunidades indígenas.

Referências bibliográficas

Brandão, C. R. (1995). *O Que é Educação?* (33. ed). São Paulo: Brasiliense.

D`Ambrosio, U. (2009). *Educação Matemática: Da teoria à prática*. (17. ed). Campinas: Papirus.

D`Ambrosio, U. (2001). *Transdisciplinaridade*. (2. ed.). São Paulo: Palas Athena.

D`Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Fiorentini, D. (1994). *Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática: O Caso da Produção Científica em Cursos de Pós-Graduação*. (Tese de doutorado). Faculdade de Educação, Campinas: UNICAMP.

Groppo, L. A. (Org.). (2008). *Sociedade e Educação. Estudos Sociólogos e Interdisciplinares*. Americana.

Knijnik, G. (2004). *Etnomatemática, Currículo e Formação de Professores*. Santa Cruz do Sul: EDUNISC.

Mattos, J. R. L. (Org.). (2016). *Etnomatemática: Saberes do Campo*. Curitiba: CRV.

Peixoto Filho, J. P. e Martins, T. A. (2009). A Etnomatemática e o Multiculturalismo no Ensino da Matemática. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.11, n.2, pp.393-409.

Gimeno Sacristán. J. (2000). *O Currículo: Uma Reflexão sobre a Prática*. (3. ed.). Porto Alegre: ArtMed.

Silva, M. F. & Azevedo, M. M. (1995). Pensando as escolas dos povos indígenas no Brasil: o Movimento de professores do Amazonas, Roraima e Acre. In: Lopes da Silva, A. & Grupioni, L. D. B. (Orgs.). *A Temática Indígena na Escola: novos subsídios para professores de 1o e 2o graus*. Brasilia-DF: MEC/MARI/UNESCO.

Vergani, T. (2007). *Educação Etnomatemática: o que é?* Lisboa: Flecha do Tempo.

INVENCIÓN DE PROBLEMAS EN UN CONTEXTO DE COMPETITIVIDAD Y COOPERACIÓN: UNA EXPERIENCIA CON SUMAS DE SERIES

Lorena Salazar Solórzano
Universidad de Costa Rica, Costa Rica, Universidad Nacional. (Costa Rica)
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr, lorena.salazar.solorzano@una.cr

Resumen

Se presentan aquí algunos resultados parciales de una investigación que pretende indagar el efecto que produce en la comprensión matemática, la combinación de estrategias de creación de problemas, competitividad y cooperación. El contexto temático empleado fue el de sumas de series en una muestra de 18 alumnos de un curso de cálculo introductorio de la Universidad de Costa Rica, en la que los estudiantes en grupos, debían crear problemas para que un grupo adversario los resolvieran en una actividad competitiva y colaborativa. Se lograron resultados positivos en motivación y comprensión de este tema mejorando el rendimiento académico de los participantes.

Palabras clave: educación matemática, invención de problemas, motivación en el aula, series de potencias.

Abstract

This paper shows some partial results of a research that attempts to investigate the effect produced by the combination of posing problem strategies, competitiveness and cooperation in ~~the~~ mathematical understanding. We used addition of series as the thematic context, in a sample of 18 students from an introductory calculus course at the University of Costa Rica, in which groups of students had to create problems for an adversary one to solve them in a competitive and collaborative activity. Positive results were obtained with respect to motivation and understanding of this topic, improving the academic performance of the participants.

Key words: mathematical education, posing problems, motivation in the classroom, powers series.

Introducción

Hallar la suma de series numéricas y de potencias es un tema que presenta dificultades de comprensión en los estudiantes (Delgado, Codes, Monterrubio, & González-Astudillo, 2014). Este estudio pretende mejorar la comprensión de este tema, usando el espíritu competitivo y cooperativo de los estudiantes como elemento motivador, dado que investigadores como Font (1994), Tapia (2005), señalan que la falta de motivación es una de las causas más importantes para explicar las dificultades de aprendizaje en matemáticas. Combinado a esto, se usó la estrategia de creación de problemas por su potencial en comprensión de la matemática. Es por esto que el objetivo del estudio fue investigar el efecto que produce,

en la comprensión del tema de sumas de series de potencias, la incorporación de tareas de invención de problemas en un contexto de competitividad y cooperación en un curso introductorio de cálculo.

Motivación en el aula

Tapia, (2005) indica que para lograr la motivación en los estudiantes, es importante presentar un esquema en el que se anticipen los contenidos, el despertar el interés inicial (con algún problema que les despierte la curiosidad), mantener el interés inicial (que es la parte más difícil), relacionar los contenidos nuevos con los que se han adquirido con anterioridad, hacer una exposición estructurada y a un ritmo adecuado, usar ejemplos o casos como elementos de apoyo, desarrollar la interacción entre profesor y alumno, inducirlos a la realización de trabajos prácticos con repercusión en la nota final. En la actividad realizada se tomaron en cuenta algunas de estas pautas. La actividad se inició con un esquema de los contenidos a desarrollar, se despertó el interés al involucrar a los alumnos en la confección de las reglas de la actividad y se tomó en cuenta que la misma tuviera un impacto en la nota final del curso; algo que no les generara tensión o preocupación por tal rubro, pero que sí contemplara algún reconocimiento que los motivara, tomándose una prueba corta con un valor extra de 3% de la nota final del curso.

Creación de problemas

En la última década se ha incrementado considerablemente el número de investigaciones sobre la creación de problemas con resultados positivos (Ellerton (2013); Espinoza, Lupiañez, y Segovia (2014); Malaspina (2016); Salazar (2014 y 2015); Singer y Voica. (2013). De acuerdo con Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014), la invención de problemas logra desarrollar la creatividad de los alumnos, da lugar a una mayor responsabilidad en los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento, es una ventana para observar la comprensión matemática por lo que puede ser una herramienta para evaluar su aprendizaje y también mejora su disposición y actitudes hacia esta disciplina. La autora de este trabajo ha utilizado el planteamiento de problemas como una estrategia de enseñanza en cursos de matemática para profesores, con resultados muy positivos (Salazar, 2014, 2015). Otros investigadores como Malaspina (2016) también señalan resultados muy alentadores al aplicar esta estrategia en diferentes talleres con profesores de matemática en formación y en ejercicio.

Competitividad y Trabajo colaborativo

En la actividad se promovió que aflorara en los estudiantes el espíritu competitivo y cooperativo de los estudiantes. De acuerdo con Cadoche (2009), cooperar significa trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes, mientras que competir consiste en trabajar para alcanzar un objetivo que solo puede conseguir un estudiante (o unos pocos). En esta experiencia se da una competencia sana, en el sentido de que todos pueden ganar, sin perjudicar a otros, es decir con esfuerzo todos los grupos podrían obtener la nota máxima en la evaluación. Según Cadoche (2009), competir es una constante en las relaciones interpersonales de la sociedad y en las aulas universitarias, estas acciones de interdependencia se dan de dos formas: la competitiva y la cooperativa. La ausencia de interdependencia da como resultado el individualismo, aspecto que debe evitarse en los cursos de matemática e incentivar el trabajo colaborativo. De modo que

en la actividad se trabajó bajo el lema de que el éxito individual depende del grupal. Según Spagni y Cadoche (2014, p. 213),

> el Aprendizaje Cooperativo es uno de los métodos de enseñanza y aprendizaje que sustentan su teoría en el principio de que el alumno no aprende solo; que, por el contrario, la actividad del sujeto durante dicho proceso está mediada por la influencia de los demás.

Metodología

La actividad se realizó con estudiantes de un curso introductorio de cálculo de la Universidad de Costa Rica (MA313), en el que participaron 18 estudiantes de la carrera de estadística del I ciclo del 2014. Se trabajó en una modalidad de grupos de 3 personas a los que se les proporcionó unas guías de trabajo, donde se les expuso algunas estrategias sobre cómo crear un problema cuyo fin fuera hallar la suma de una serie de potencias. Para la recolección de datos, se usó un diario detallado de los acontecimientos que se fueron dando en el aula y se fueron anotando comentarios y algunas discusiones internas de los estudiantes (para ello se contó con la ayuda de una asistente para poder cubrir las observaciones de los grupos). También se recolectaron evidencias escritas del trabajo de ellos, en este caso el problema propuesto y las soluciones dadas.

Descripción de la Experiencia

Cada grupo debería **c**rear y resolver un problema de suma de series de potencias siguiendo la guía dada y depositarlo en una caja. Luego debían **e**scoger aleatoriamente un problema de la caja y resolverlo. Las siguientes reglas para la actividad y adjudicación del puntaje, fueron creadas en consenso entre la docente y el grupo de estudiantes.

Reglas de la actividad

- Si un grupo encuentra y demuestra que el problema creado por un grupo adversario está mal planteado o mal resuelto, ellos obtienen 50 puntos y el grupo creador obtiene -25 puntos.
- Si un grupo no logra resolver el problema planteado por un grupo adversario, el grupo creador obtiene una nota de 50 puntos extra y el grupo que resuelve el problema, obtiene 0 puntos.
- La nota de la prueba corta se pondera así: creación del problema 25 puntos, la solución de su propio problema 25 puntos, solución del problema adversario 50 puntos (para un total de nota 100 que equivale al 3% de la nota final del curso). Pueden obtener 50 puntos extra de acuerdo al punto anterior.

Los estudiantes iniciaron la actividad con una actitud muy entusiasta y la mantuvieron en las dos horas siguientes en que esta se desarrolló, con muestras de risas y actitudes de camaradería y competitividad. En lugar de la seriedad y tensión usual mostrada ante exámenes cortos anteriores a este, esta vez parecía que lo estaban disfrutando, sin importarles que se trataba de una evaluación. A continuación se presenta

parte de las guías de trabajo dada a los estudiantes, que por razón de espacio, solo se presenta el final de las mismas, en la que se propone una tarea de modificación de problema, de acuerdo a una serie específica, y seguidamente se presentan algunas de las creaciones de los estudiantes.

Guía #1: Usando series de potencias

Sabiendo que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=senx$, verifique que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (e/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}==sen(e/2)$

1. Elijan otra serie de potencias relacionada a alguna función f
2. Realicen álgebra para "camuflar" la serie y cambie el valor de x por algún valor numérico que esté dentro del intervalo de convergencia de la serie dada
3. Planteen un problema de hallar la suma de dicha serie y pongan la respuesta sin la solución.

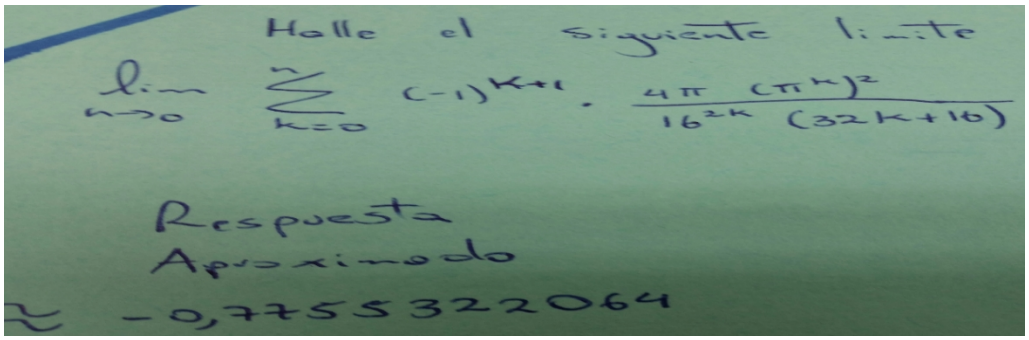


Figura 1. Problema creado por uno de los grupos de estudiantes

La figura 1 muestra una de las modificaniones de un grupo, en el que se da un poco más que una simple modificación del problema original. Observe que plantea la suma de la serie como el límite de una sucesión de sumas parciales. Puede observarse que también muestra cierto grado de ingeniosidad al reescribir la serie "camuflada".

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)(-1)^k\pi^{2k+1}}{16^{2k}16(2k+1)}=-4\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi/16)^{2k+1}}{(2k+1)}=-4\arctan(\pi/16)$$

Otro problema creado por otro grupo de estudiantes se muestra en la figura 2, el cual resulta interesante en cuanto a creatividad con una dificultad mayor a algunos problemas que usualmente la docente, en semestres anteriores ha planteado a sus estudiantes.

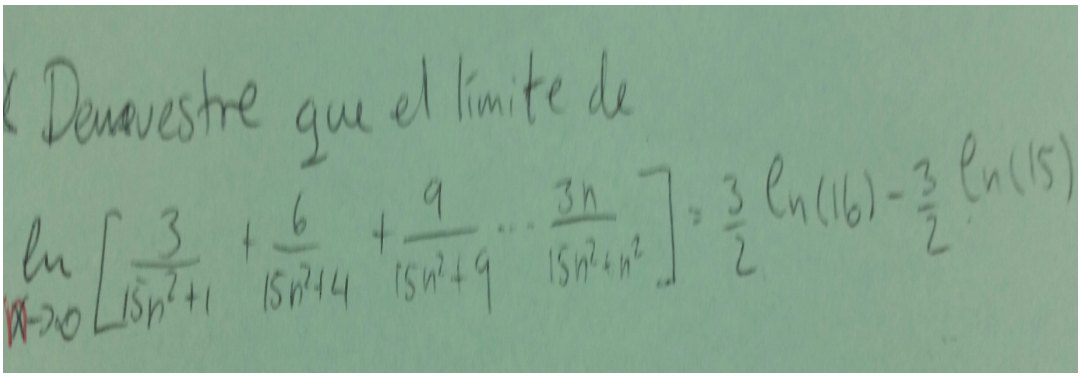


Figura 2. Problema creado por uno de los grupos de estudiantes

La solución a este problema es desarrollado por los estudiantes de la siguiente manera:

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3k}{n^2\left(15+\frac{k^2}{n^2}\right)} == \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3\frac{k}{n}}{\left(15+\frac{k^2}{n^2}\right)}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{3x}{15+x^2}dx = \frac{3}{2}\ln(15+x^2) =$$

$$\frac{3}{2}\ln(15+1^2)-\frac{3}{2}\ln(15+0^2) = \frac{3}{2}\ln(16)-\frac{3}{2}\ln(15)$$

Guía # 2: usando la serie geométrica

1. Elija un valor específico de r para la serie geométrica con $|r|<1$
2. Forme la sucesión $x_n = 1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$
3. Realice álgebra para "camuflar" la sucesión
4. Deduzca que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$.

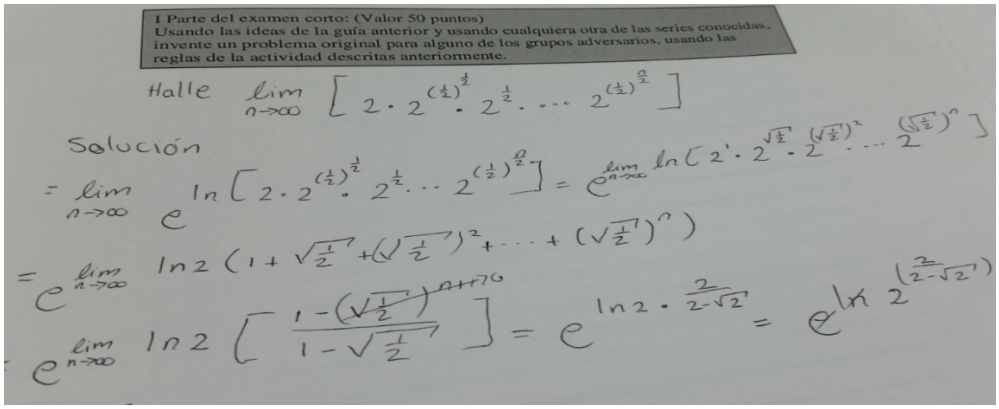


Figura 3. Problema creado por uno de los grupos de estudiantes

Como puede verse en la figura 3, el grupo creador presenta la creación de una sucesión como una productoria, tomando el valor de $r=\sqrt{1/2}$, y luego toman logaritmos para pasarlo a una suma. Todo esto siguiendo las ideas de la guía, pero aún así muestran gran originalidad al tomar el valor de r de esta forma. Cabe destacar que este grupo obtuvo puntos extra por la creacción de su problema, dado que mostró una mayor ingeniosidad y creatividad. Además, el grupo adversario no pudo resolverla, de modo que según las reglas estipuladas, este grupo obtuvo 50 puntos extra. La figura 4 muestra una de las soluciones de un grupo donde el grupo creador incluye elementos de integración de series en donde hacen un manejo de intercambiar el símbolo de suma e integral acertadamente.

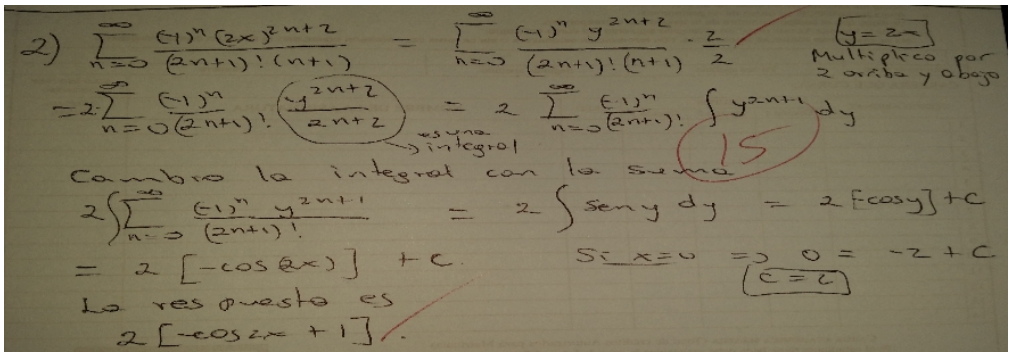


Figura 4. Solución de uno de los estudiantes

La segunda parte de este problema solicitaba la suma de una serie numérica, que corresponde a la serie dada en (a), pero evaluada en el valor de $x=\pi/2$, aspecto que muestra compresión de lo ejecutado en la primera parte.

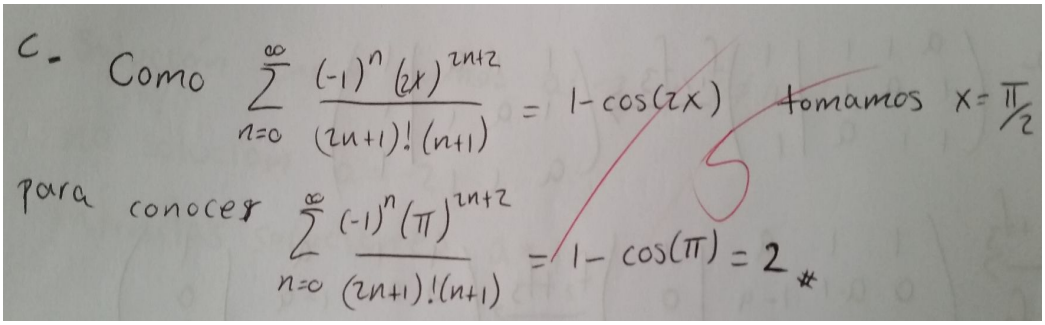


Figura 5. Solución de uno de los estudiantes a la parte 2b

Finalmente, se aplicó un instrumento con una escala de Lickert a los 18 estudiantes que participaron para evaluar la actividad con los estudiantes. Como puede verse en la tabla 1, en general los estudiantes sienten que la actividad les ayudó a comprender el tema.

Tabla 1. Resultados de la evaluación de la actividad

	Muy en desacuerdo	Algo en desacuerdo	Neutral	Algo de acuerdo	Muy de acuerdo
La actividad de creación de problemas le ayudó a reafirmar conceptos matemáticos.				17	2
Comprendió detalles y sutilezas de las series y con hallar las sumas, creando problemas.			1	15	2
El trabajo en grupos le resultó útil para el estudio y comprensión de los temas.		1		2	17
La actividad le ayudó a mejorar su comprensión individual de sumas de series.				19	
La actividad le resultó motivadora por la competencia.		1		18	

Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

La experiencia en general resultó muy positiva, los estudiantes se motivaron, a tal punto que minutos después de haber iniciado la actividad, olvidaron la tensión que implica una evaluación y algunos hasta le llamaron el juego. Se les notaba un interés diferente, una concentración inusual y disfrute. Por otra parte se escucharon comentarios que indicaban que hasta ahora entendían el tema, a pesar de que se suponía debían venir preparados al quiz. Los problemas planteados fueron desde simples modificaciones

al problema dado en la guía, como otros problemas donde se mostró un mayor nivel de dificultad, ingeniosidad y dominio de los conceptos. Por otro lado el trabajo cooperativo y competitivo resultó una buena combinación con la creación de problemas, dado que los estudiantes se integraron en su propio equipo participando activamente de las tareas, unos dando ideas, mostrando camaradería que no se había mostrado antes en trabajos en grupo. El elemento de competitividad ayudó a mejorar este trabajo conjunto. Por otro lado, cuando los estudiantes tuvieron que resolver el problema creado por otro grupo, estaban preparados debido a la experiencia previa de haber tenido que crear un problema similar. Estaban más desconfiados, y por primera vez buscaban dónde podría haber algunos camuflajes, en el intento de disfrazar una serie conocida. Los resultados del examen donde se evaluó el tema de convergencia y sumas de series de potencias, arrojó mejores resultados que otros semestres donde no se aplicó la actividad. Se logró un 83% de notas por encima de 70, lo cual según la experiencia de muchos años de enseñar este tema, representa una diferencia.

Referencias bibliográficas

Cadoche, L. (2009). *Aprendizaje cooperativo, competitivo e individualista, sus implicaciones en el aula de matemática*. Facultad de Ciencias Veterinarias. Universidad Nacional del Litoral. Esperanza. Santa Fe, Argentina. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/42%20Cadoche.pdf.

Delgado, M. L., Codes, M., Monterrubio, M. C., y González Astudillo, M. T. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo "folding back". *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 25 - 44.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101.

Espinoza, J. Lupiañez J., Segovia, I (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. Vol. 14, Marzo 2014.

Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Suma,* 17, 10-16.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* 11(15). 321-33.

Spagni, B., Cadoche, L. (2014). Aprendizaje cooperativo y desarrollo de habilidades sociales. *Acta de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática*. 212-217.

Salazar, L (2014). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto y su implementación con futuros profesores de matemática. *Revista Paradigma* vol. XXXV (1) junio 2014 V-2.

Salazar, L. (2015). Problem-posing as a didactc resource in formal mathematics courses to train future secondary school mathematics teachers. *Journal of Technology and Science Education (JOTSE)*, 5(2), 64-74. http://dx.doi.org/10.3926/jotse.141.

Singer. F. M. & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics,* 83(1), 9-26.

Tapia, A (2005). *Motivación para el aprendizaje: la perspectiva de los alumnos*. Ministerio de Educación y Ciencia. La orientación escolar en centros educativos. Madrid: MEC.

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA MEJORAR EL RAZONAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Carlos Manuel Sabino Escobar, Emilio Máximo Vera Namay, Gaspar Chávez Dioses, Ángel Gutiérrez
Universidad Nacional de Tumbes. (Perú), Universidad de Valencia. (España)
csabinoe@untumbes.edu.pe, emiliomaximov@gmail.com, gasparin908@hotmail.com, angel.gutierrez@uv.es
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr, lorena.salazar.solorzano@una.cr

Resumen

El propósito de este estudio fue promover el desarrollo de la capacidad de razonamiento en matemáticas de los estudiantes de primaria de Educación Básica Regular (EBR). Para ello elaboramos una secuencia de enseñanza con el objetivo de facilitar los procesos de razonamiento correctos apoyados en la construcción de imágenes mentales de conceptos de figuras geométricas básicas. La secuencia se desarrolló siguiendo una metodología activa que permitió a los estudiantes identificar y construir nuevos conceptos, a partir de la observación de ejemplos y contraejemplos de figuras geométricas, en los que se mostraron y analizaron sus atributos relevantes y sus atributos no relevantes.

Palabras clave: secuencia de enseñanza, razonamiento matemático, educación primaria

Abstract

The purpose of this study was to promote the development of primary school students' mathematical reasoning ability. So, we elaborated a teaching sequence aimed to facilitate correct students' reasoning processes based on the construction of mental images of basic geometric shape concepts. The sequence was organized following an active methodology that allowed students to identify and construct new concepts, from the observation of examples and counterexamples of geometric shapes, where their relevant and non-relevant attributes were shown and analyzed.

Key words: teaching sequence, mathematical reasoning, primary school

Introducción

La interpretación de propiedades y relaciones de formas geométricas y la orientación y movimiento en el espacio son dos aspectos relevantes que ayudan al desarrollo progresivo de la competencia en geometría. Así se describen en los Mapas de Progreso del Aprendizaje de la Matemática: Geometría (MPAG), elaborados por el Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación y el Ministerio de Educación (Ministerio de Educación, 2013). Además, en el referido MPAG se exige "una educación matemática que brinde al estudiante situaciones de aprendizaje problemáticas …

que ponga énfasis en los procesos de construcción de los conceptos matemáticos y en el desarrollo de competencias matemáticas" (Ministerio de Educación, 2013, p.7). En ese sentido, el objetivo de nuestro estudio fue explorar formas de promover el desarrollo del razonamiento matemático, tanto de los profesores como de los niños y niñas (6 y 7 años) de primer grado de primaria de Educación Básica Regular (EBR) de Tumbes, Perú. Para ello diseñamos y desarrollamos una secuencia de enseñanza con el objetivo de facilitar los procesos de razonamiento correctos apoyados en la construcción de imágenes mentales de conceptos de figuras geométricas básicas.

La secuencia se implementó y desarrolló siguiendo una metodología activa que permitió a los niños y niñas identificar y construir nuevos conceptos geométricos a partir de la presentación de ejemplos y contraejemplos, en los que analizaron sus atributos relevantes y no relevantes.

Como base para el diseño e implementación de la secuencia de enseñanza y el análisis de las respuestas a las tareas propuestas, asumimos los planteamientos del Modelo de Van Hiele, que permite analizar el nivel de razonamiento de los estudiantes en el trabajo geométrico y orienta en la elaboración y organización de actividades para la enseñanza de la geometría (Van Hiele, 1957, 1986; Gutiérrez, 1998; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993).

Nuestro estudio ofrece una estrategia que permite alcanzar los Estándares Nacionales de Aprendizaje descritos en el MPAG (Ministerio de Educación, 2013). Los beneficiados son los niños y niñas de 6 y 7 años así como los profesores de la Institución Educativa Nº 010, "08 de octubre", donde se desarrolló el estudio, pudiendo extenderse los resultados y conclusiones obtenidos a todas las instituciones educativas del nivel primario del país.

Marco teórico

El Modelo de Van Hiele

El Modelo de Van Hiele considera dos aspectos (Jaime y Gutiérrez, 1990):

i) Descriptivo, en cuanto intenta explicar cómo razonan los estudiantes de matemáticas. Esto se hace a través de la definición de cinco *niveles de razonamiento matemático*.
ii) Prescriptivo, porque orienta a los profesores y les da pautas a seguir en la organización de la enseñanza para lograr que los estudiantes progresen en su forma de razonar. Esto se hace mediante la descripción de cinco *fases de aprendizaje de las matemáticas.*

Los niveles de razonamiento de Van Hiele

Van Hiele presenta una caracterización de diferentes estilos de razonamiento matemático que corresponden a sucesivos momentos de la formación matemática de los estudiantes, desde la forma de razonar típica de los niños de la educación infantil hasta la típica de los matemáticos profesionales.

Primer Nivel: La consideración de los conceptos es global. Las figuras geométricas se perciben como objetos físicos y no se tienen en cuenta sus elementos ni propiedades matemáticos.

Segundo Nivel: Los conceptos se entienden y manejan a través de sus elementos y propiedades matemáticos. El razonamiento se basa en la experimentación con ejemplos concretos y la inducción y justificación de conclusiones generales a partir de los resultados experimentales.

Tercer Nivel: La característica básica de este nivel consiste en el establecimiento de relaciones lógicas entre propiedades matemáticas. El razonamiento es de tipo deductivo, ya que la obtención y justificación de conclusiones generales se basa en relaciones entre propiedades y en el establecimiento de implicaciones.

Cuarto Nivel: Está caracterizado por la comprensión y el empleo del razonamiento deductivo formal, y por la comprensión de la estructura axiomática de las matemáticas y los diferentes elementos que lo forman (axiomas, definiciones, teoremas, etc.).

Quinto Nivel: Es posible manejar de forma simultánea diversas geometrías, procedentes de diferentes sistemas axiomáticos y relacionar una con otra.

Las fases de aprendizaje de Van Hiele

Un profesor, además de conocer cómo evoluciona el razonamiento de sus estudiantes, también debe conocer cómo orientar sus clases para ayudarlos a progresar en la adquisición del siguiente nivel de razonamiento. En ese sentido, Van Hiele formula una propuesta desde una perspectiva constructivista, constituida por cinco fases, que pone a los estudiantes en condiciones de participar activamente en la construcción de nuevos conceptos matemáticos.

Primera Fase, *información*: Su finalidad es la obtención de información por el profesor y los estudiantes. El profesor averigua qué saben sus alumnos sobre el tema que se va a abordar y qué formas de razonar tienen en ese tema. Los estudiantes toman contacto con el nuevo tema que van a empezar a estudiar.

Segunda Fase, *orientación dirigida*: El profesor dirige a los estudiantes para que éstos vayan descubriendo los nuevos conocimientos que van a constituir la base del tema objeto de estudio.

Tercera Fase, *explicitación*: Se persigue en todo momento que los estudiantes expresen verbalmente o por escrito sus ideas, conclusiones, argumentos, etc., aprendiendo a utilizar el vocabulario propio de los contenidos matemáticos estudiados y del nivel de razonamiento en el que se encuentran ubicados. Esta es una fase transversal, ya que debe estar siempre presente, desde el inicio hasta el final del tema.

Cuarta Fase, *orientación libre*: Su finalidad es lograr que los estudiantes consoliden los conocimientos recién aprendidos y que sigan desarrollando el nivel de razonamiento. Para lograrlo, se busca en todo momento que los estudiantes resuelvan actividades en las que, utilizando lo aprendido anteriormente, puedan explorar diversas posibilidades de resolución, combinar sus conocimientos de manera diferente o descubrir y aprender nuevas propiedades.
Quinta Fase, *integración*: Tiene como objetivo establecer y completar la red de relaciones objeto de ese nivel para el concepto que se trabaja.

Teoría de formación de conceptos matemáticos de Vinner

Vinner (1991) presenta un modelo para explicar los procesos de aprendizaje de conceptos matemáticos con un soporte gráfico o visual y propone a los profesores formas de prevenir o corregir aprendizajes erróneos. Este modelo, distingue dos formas de recepción de la información matemática por los estudiantes: verbal y gráfica.

La información verbal está formada, inicialmente, por las definiciones de los conceptos y también por enunciados de propiedades, fórmulas, clasificaciones, etc. Esta información se almacena en la memoria de los estudiantes formando lo que Vinner denomina *definición del concepto*.

La información gráfica está formada, inicialmente, por dibujos, figuras, objetos, etc. que representan ejemplos concretos de conceptos matemáticos y también por otras informaciones gráficas como diagramas y esquemas. Toda esta información se almacena en la memoria de los estudiantes formando lo que Vinner denomina *imagen del concepto*.

La secuencia de enseñanza

Planificamos las secuencias de enseñanza para facilitar procesos de razonamiento apoyados en la construcción de imágenes mentales de conceptos de figuras geométricas básicas teniendo en cuenta el modelo de Vinner (Vinner, 1991). La secuencia se implementó y desarrolló siguiendo una metodología activa que permitió, a los estudiantes, identificar y construir nuevos conceptos geométricos, a partir de la presentación de ejemplos y contraejemplos en los que se analizaron sus atributos relevantes y sus atributos no relevantes (Gutiérrez y Jaime, 2012; Hershkowitz, Bruckheimer y Vinner, 1987). Además se tuvieron en consideración las cinco fases de Van Hiele. A continuación describimos las actividades que realizamos en cada una de ellas.

Primera Fase, información

Se comentó que abordarán un tema del área de geometría elemental y se informó a los estudiantes que, en la secuencia de enseñanza, aprenderán a reconocer las figuras geométricas básicas: triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo. Se dio a conocer a los estudiantes qué es el geoplano y para qué sirve. Se exploraron conocimientos previos de los estudiantes. Se indagó la forma de razonar que tenían los estudiantes. Se presentaron actividades que permitieron reconocer las figuras geométricas básicas. Se utilizó como motivación la construcción de cometas que harán volar el fin de semana.

Segunda Fase, orientación dirigida

Se presentaron variados ejemplos y contraejemplos de las figuras geométricas básicas, en los que se mostraron y analizaron sus atributos relevantes y no relevantes, con el objetivo de que los estudiantes se formen la imagen del concepto. Se cuidó, en todo momento, de no incurrir en el error didáctico de presentar ejemplos que solo muestren figuras geométricas en posición estándar. Se mostraron fotografías captadas de nuestro entorno y se solicitó a los estudiantes que identificaran las figuras geométricas básicas que veían.

Tercera Fase, explicitación

Se realizó, de manera explícita, la traducción del vocabulario utilizado por los niños, al vocabulario matemático. Se propusieron actividades mediante las cuales expresaran, verbalmente, lo que habian descubierto anteriormente. Se fomentó la discusión entre estudiantes. La empatía con los estudiantes permitió un diálogo fluido entre el profesor y sus alumnos.

Cuarta Fase, orientación libre

Se propusieron problemas que se resuelven aplicando los conocimientos y la forma de razonar que han adquirido en las fases anteriores, que presentan situaciones nuevas, que son abiertos y con varios caminos de resolución.

Quinta Fase, integración

Se desarrollaron actividades que permitieron comparar las figuras geométricas y reunirlas en función del número de lados.

A continuación mostramos un ejemplo de una de las actividades que forman parte de la secuencia de enseñanza. La actividad fue propuesta en la segunda fase, orientación dirigida.

Objetivo: identificación de triángulos que ven en las fotografías.

Observa y retiñe con el plumón los triángulos que ves en la figura.

Figura 1

Análisis de resultados

Como base para el análisis de resultados, asumimos los planteamientos del modelo de Van Hiele, que nos permite analizar el nivel de razonamiento de los estudiantes y la organización de actividades para la enseñanza de la geometría (Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993). Se pudo determinar que luego de culminada la secuencia de enseñanza, referida a las figuras geométricas básicas, los estudiantes alcanzaron el primer nivel de razonamiento de Van Hiele. Asimismo, reconocen y describen fácilmente dichas figuras dentro de un conjunto de objetos concretos de su entorno, sin embargo, las propiedades son enunciadas de forma memorística y visual.

Estas afirmaciones se evidencian al analizar las respuestas de los estudiantes a una tarea planteada que tuvo como objetivo el reconocimiento de un triángulo. En ella se muestran un contraejemplo (Figura 1) y un ejemplo (Figura 2) de triángulo en posición no estándar. Describimos a continuación un extracto del diálogo que surgió durante la resolución de la tarea, en el cual se demuestra que los niños y niñas se encuentran, inicialmente, en el nivel 1 de razonamiento de Van Hiele.

Figura 1. Contraejemplo de un triángulo

Figura 2. Ejemplo de un triángulo en posición no estándar

Profesor : *¿La figura que se muestra* [*Figura 1*] *será un triángulo?*
Carlos : *Sí, sí es.*
Heidi : *Sí, profesor.*
Profesor : *¿Por qué consideran ustedes que sí es un triángulo?*
Heidi : *Porque tiene tres puntitas* [y cuenta los vértices en la figura].

Casi inmediatamente después de que Heidi terminara de justificar su respuesta, escuchamos una réplica:

Carlos : *No, no, no es un triángulo, profesor.*
Profesor : *Carlos, ¿por qué crees tú que no es un triángulo?*
Carlos : *Tienen que ser rectos.*
Profesor : *¿Quiénes tienen que ser rectos?*
Carlos : *Éstos* [señalando las tres curvas de la figura].
Heidi : *Más bien parece un calzón.*

Observamos que, hasta aquí, los niños y niñas no reconocen explícitamente las partes geométricas de las que se compone la figura ni las propiedades matemáticas de un triángulo (atributos relevantes) y que describen la figura buscando semejanza con otros objetos de su entorno. Afirmamos que lo descrito son características que nos permiten ubicar a los estudiantes en el nivel 1 de razonamiento geométrico de Van Hiele.

Asimismo, con respecto a la tarea (*Figura 2*), en el que se muestra un triángulo en posición no estándar (atributo irrelevante), se observó lo siguiente:

Profesor : *¿La figura 2 que se muestra será un triángulo?*
Carlos : *No es, profesor.*
Heidi : *Nooooo.*
Profesor : *¿Por qué consideran ustedes que no es un triángulo?*
Heidi : *Porque tiene tres puntitas pero está virado* [término utilizado en la región para señalar que está girado].
Carlos : *Si es triángulo… si lo seguimos virando* [señala al triángulo girándolo hasta adoptar una posición estándar].

En estas respuestas se comprobó que un atributo irrelevante, como la posición de la figura descansando horizontalmente, confunde a los estudiantes y no les permite reconocer un triángulo colocado en otra posición.

El profesor aprovechó los términos "estos", "puntitas", "está virado" que surgieron en el diálogo con los estudiantes para lograr traducir, de manera explícita, el vocabulario utilizado por los niños, en un vocabulario matemático; así por ejemplo las "puntitas" serán llamados vértices.

Al culminar la secuencia de enseñanza, luego del análisis de las respuestas a las tareas propuestas, se comprobó que los estudiantes han alcanzado el primer nivel de razonamiento (nivel 1). Asimismo, en la fase de integración, al momento de consolidar un resumen de lo aprendido el profesor, formuló la siguiente pregunta:

Profesor : *Entonces, ¿cómo definimos un triángulo?*
Estudiante : *Es una figura que tiene tres lados, tres vértices y tres ángulos.*

En esta respuesta, el estudiante describe las partes o elementos de un triángulo, lo cual es un claro avance en su forma de describir los triángulos respecto de las respuestas mostradas más arriba. En este momento de la secuencia de enseñanza, al analizar la respuesta de este estudiante de primer grado de primaria, se observa que utilizó elementos básicos y visuales de los triángulos para describir las principales características de estas figuras. Podríamos, de manera errónea, considerar que el estudiante ha alcanzado el segundo nivel de razonamiento, ya que menciona partes del polígono, pero lo que ocurre realmente es que el estudiante había entrado en un periodo de transición del primer al segundo nivel, durante el cual aparecen razonamientos de ambos niveles consecutivos (Jaime, 1993), pues:

> Es importante tener en cuenta que el paso de un nivel al siguiente requiere tiempo, años incluso, si los estudiantes no poseen todavía en ningún campo de la geometría el nivel para el que se están desarrollando las actividades en ese momento. Por tanto, no se puede pensar que una secuencia de actividades que recorra ordenadamente las fases asegurará la adquisición del nivel correspondiente en un periodo limitado de tiempo, aunque esté bien organizada, con suficientes actividades. (Jaime, 1993, pp. 33-34)

Conclusiones

Los estudiantes han desarrollado su razonamiento matemático y se encuentran ubicados en el primer nivel de razonamiento de Van Hiele. Además, algunos estudiantes han mostrado un comienzo de la transición hacia el segundo nivel de razonamiento.

Introducir nuevos conceptos, de forma adecuada, es más productivo cuando se proponen actividades que muestren variados ejemplos y contraejemplos en los que se muestren y analicen sus atributos relevantes y no relevantes, con el objetivo de que los estudiantes se formen la imagen del concepto.

Se debe cuidar, en todo momento, de no incurrir en el error didáctico de presentar ejemplos que solo muestren figuras geométricas en posición estándar.

La presentación de fotografías captadas de nuestro entorno permitió la identificación de las figuras geométricas básicas y la interpretación del mundo que nos rodea.

El aprendizaje de la geometría está apoyado por las representaciones visual y geométrica de los conceptos.

Referencias bibliográficas

Gutiérrez, A. (1998): Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista de Educación Matemática de la Universidad de los Andes,* 3(3), pp. 193-220.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis, 32*, 55-70.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., y Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. En M. Lindquist, A. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 222-235). Reston, VA, EE.UU.: NCTM.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Valencia. España.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría*: *el modelo de Van Hiele*. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Ministerio de Educación (2013). *Mapas de progreso del aprendizaje de la matemática: geometría*. Lima, Perú: Ministerio de Educación. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/minedu/archivos/a/002/03-bibliografia-para-ebr/49-mapasprogreso_matematica_geometria.pdf

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en connexion con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Utrecht. Holanda. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Londres: Academic Press.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

APRENDER MATEMÁTICA, HACIENDO MATEMÁTICA: LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Guadalupe Xochitl Chávez Pérez, Ángel Homero Flores Samaniego, Adriana Gómez Reyes
Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM.; CECyT 13 IPN. (México)
matematica60_xch@hotmail.com, ahfs@unam.mx, orodelsilencio@yahoo.com.mx

Resumen

En el presente reporte damos cuenta de los resultados de un experimento de enseñanza cuyo propósito fue determinar el grado de compresión del concepto de función cuadrática en estudiantes de nivel medio superior de la Ciudad de México. El experimento consistió en una serie de actividades que se trabajaron siguiendo el modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*; el análisis se centró en las Dimensiones Contenido y Acceso Equitativo al Contenido definidas en el marco de referencia TRU (Teaching for Robust Understanding: *Enseñanza para un Entendimiento Sólido*). Los avances en la compresión del concepto se consignaron en una rúbrica.

Palabras clave: reconocimiento de patrones, generalización, funciones cuadráticas.

Abstract

This paper reports the outcomes of a teaching experiment whose objective was to determine the level of understanding of quadratic function concept in senior high school students in Mexico City. The experiment consisted of a series of activities developed under the teaching model *to learn mathematics doing mathematics*; the analysis focused on the Content and Equitable Access to Content Dimensions defined in the *Teaching for a Robust Understanding* framework. Advances in the understanding of quadratic function concept were recorded in a rubric.

Key words: pattern recognition, generalization, quadratic functions.

Introducción

En este artículo damos cuenta de algunos resultados obtenidos de un experimento de enseñanza (Steeffe y Thompson, 1999) cuyo propósito fue determinar el grado de compresión del concepto de función cuadrática en estudiantes de nivel medio superior en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), perteneciente a la Universidad Nacional Autónoma de México (edades entre 14 y 18 años).

El estudio forma parte de una investigación educativa en el aula encaminada a la documentación de la eficacia de una serie de actividades. Nuestro objetivo es promover la comprensión del concepto de función matemática en bachillerato.

El concepto de función tiene un papel fundamental en el entendimiento de conceptos matemáticos que se estudian en cálculo, ecuaciones diferenciales y álgebra lineal, entre otras ramas de la matemática. Es muy importante en el uso de la matemática como un cuerpo de conocimiento que ayuda a explicar fenómenos a través del modelado (entendido como el proceso de creación de un modelo matemático que ayuda a entender un fenómeno, natural o no).

En experimentos anteriores (Chávez, Flores y Gómez, 2016), nos enfocamos en la promoción del entendimiento del concepto de función a través de la modelación matemática (uso del modelado matemático con fines educativos: se trata de una combinación de los términos *modelado* y *educación*). Dado que los resultados obtenidos no han sido óptimos, en esta ocasión integramos actividades de graficación y un juego de dominó. La hipótesis que subyace en nuestro razonamiento es que las actividades de modelado no son suficientes para entender el concepto de función y que es necesario incluir actividades y ejercicios de otro tipo. Otro de los factores que pueden estar influyendo en los resultados poco satisfactorios se refieren al tratamiento de las actividades en el aula, consideramos que durante su desarrollo debe haber un ambiente de aprendizaje propicio. Para determinar si el ambiente de aprendizaje es el adecuado se pondrá atención en las Dimensiones Contenido de la Materia y Acceso Equitativo al Contenido definidas en el marco conceptual de referencia *Enseñanza para un Entendimiento Sólido* (TRU, por sus siglas en inglés; Schoenfeld, 2016).

Así, los propósitos del presente experimento fueron:

a. *Determinar el grado de comprensión del concepto de función cuadrática a través del desarrollo de una serie de actividades de modelado, graficación y conversión entre representaciones semióticas del concepto.*
b. *Analizar las dimensiones Contenido de la Materia y Acceso Equitativo al Contenido.*

Lo anterior en el contexto del modelo de enseñanza-aprendizaje *Aprender Matemática, Haciendo Matemática.*

Marco teórico

El experimento consistió en una serie de actividades que se trabajaron siguiendo el modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2007, 2010) que privilegia la resolución de problemas (principalmente a través de la modelación matemática) y el trabajo en equipo. Este modelo será considerado como nuestro marco teórico, y corresponde a una didáctica centrada en el aprendizaje cuyos cimientos se encuentran en:

- El pensamiento reflexivo que describe Rodgers (2002) como "un proceso de formación de significados que lleva al individuo de una experiencia a otra con un entendimiento más profundo de sus relaciones y sus conexiones con otras experiencias y otras ideas*"* (p. 845)
- En el planteamiento de que el aprendizaje depende del ambiente, de la mediación de las herramientas (Vigosky, 1978) y de las acciones que desarrollan los estudiantes (Dewey, 1989). El aprendizaje es una actividad individual que se desarrolla en la convivencia social.

- La teoría de las Representaciones Semióticas de Duval (1995) que establece que que un objeto matemático tiene varias representaciones semióticas: la comprensión cabal de un concepto matemático se da cuando el individuo es capaz de hacer un tratamiento del concepto en todas sus representaciones, y tiene la habilidad de transferir el objeto matemático de una representación a otra.
- El Modelo Educativo del CCH, que promueve la autonomía del estudiante basándose en tres principios fundamentales: *Aprender a aprender, Aprender a hacer y Aprender a ser* (UNAM, 1971).

Así mismo, el análisis de los resultados se hará desde la perspectiva del marco de referencia TRU (Schoenfeld, 2016) que explica lo que sucede en el aula, con la intención de mejorar la enseñanza en búsqueda de un entendimiento sólido. Para esto el acontecer en el aula se divide en cinco dimensiones: Contenido de la Materia; Demanda Cognitiva; Acceso Equitativo al Contenido; Disponibilidad, Dominio e Identidad; y Usos de la Evaluación.

En particular, nos interesa el análisis en cuanto al Contenido y al Acceso Equitativo al Contenido. Schoenfeld (2016) define el *Dominio Contenido* como el grado en el que el contenido que abordan los estudiantes representa el mejor entendimiento disciplinario; los estudiantes deben tener oportunidades para aprender la matemática y las prácticas matemáticas importantes, y para desarrollar hábitos mentales productivos en el quehacer matemático. Mientras que el *Dominio Acceso Equitativo al Contenido* está definido como el grado en el que las estructuras de la actividad en el aula fomentan el involucramiento activo de todos los estudiantes de la clase con el contenido que se aborda.

Desarrollo experimental

El experimento de enseñanza estuvo conformado por una secuencia de ocho actividades sobre funciones cuadráticas cuya temática se abordó a través de resolución de problemas, graficación y conversión entre representaciones. El experimento se llevó a cabo en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), en cuatro grupos de primer semestre (15-16 años) del turno vespertino.

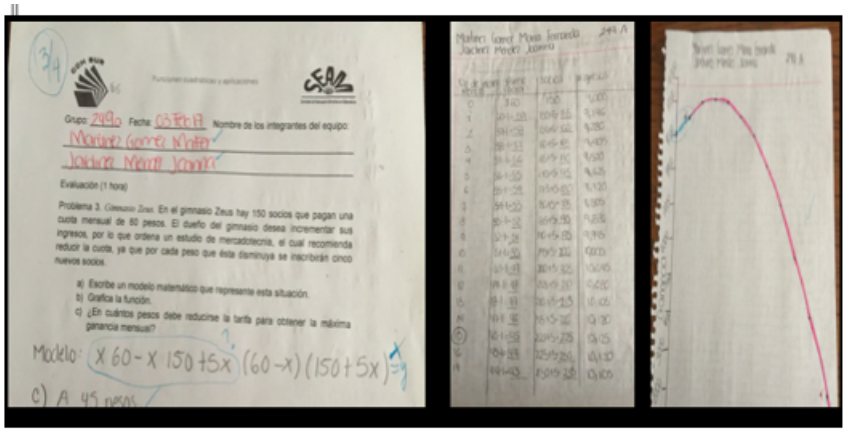


Figura 1. Hoja de trabajo sobre funciones cuadráticas. Fuente propia

Los alumnos consignaron los resultados en hojas de trabajo que analizamos por medio de listas de cotejo, matrices de resultados y bitácoras COL; los resultados de estos instrumentos se condensarán en una rúbrica sobre la comprensión del concepto de función cuadrática. Durante las actividades se propició el trabajo cooperativo con la formación de equipos pequeños que se abocaron al desarrollo de las actividades. Tuvo una duración de tres semanas, cinco horas por semana, distribuidas en dos sesiones de dos y una de una hora. La última hora fue utilizada para llevar a cabo actividades de evaluación. En la Figura (1) se muestra la hoja de trabajo de una de las actividades de evaluación.

En la Tabla 1 presentamos la rúbrica para determinar el grado de comprensión del concepto de función cuadrática (Flores y Gómez, 2009):

Tabla 1. Rúbrica de evaluación del concepto de función cuadrática. Fuente propia.

Rubros	Principiante	Intermedio	Avanzado
Concepto de función	Procedimiento que se realiza a través de una ecuación para resolver un problema y obtener su resultado.	Relación entre dos variables. Puede definir dominio, contradominio y regla de correspondencia, pero no con suficiente claridad.	Relación de dependencia entre dos variables, en la que a cada valor de la variable independiente, le asocia un único valor de la variable dependiente. Reconoce dominio, contradominio y regla de correspondencia
Variación	No reconoce la variación de la función, en relación con la variable independiente.	Reconoce la diferencia entre una variación lineal y la que no lo es, puede generalizar lo que no es lineal como cuadrática	Reconoce la diferencia entre una variación lineal, una variación cuadrática, y otras
Representación gráfica	No relaciona la parábola con la función cuadrática, puede distinguirla de la recta.	Reconoce la parábola vertical como representación de una función cuadrática, pero no reconoce los diferentes parámetros y su influencia.	Reconoce la parábola vertical como representación de una función cuadrática. Es capaz de reconocer los elementos de la parábola. Reconoce la influencia de los parámetros.
Representación algebraica	No reconoce la expresión algebraica correspondiente a una función cuadrática	Reconoce la función cuadrática en la forma general, pero no cuando está factorizada o en otra forma.	Puede reconocer la función en su forma general y en la forma estándar.
Representación tabular	No reconoce la variación en una tabla	Sabe que se puede obtener el tipo de variación mediante diferencias.	Reconoce la variación cuadrática en una tabla mediante las diferencias de las diferencias.
Tránsito entre una y otra representación	No reconoce una representación y otra como elementos de una misma función	Tiene algunos problemas para transitar de una función a otra. Es capaz de encontrar los ceros, pero no los relaciona con las raíces	Es capaz de transitar de un modelo a otro, y reconoce que pertenecen a la misma función. En particular relaciona las raíces de la gráfica con los ceros de la expresión algebraica
Modelación	No reconoce un modelo cuadrático cuando se le presenta.	Reconoce con ayuda, un modelo cuadrático en distintas situaciones	Reconoce el modelo cuadrático en distintas situaciones. Encuentra máximos y mínimos mediante las propiedades o elementos de la parábola.

En la Tabla 2 se presenta la rúbrica utilizada para evaluar las dimensiones TRU.

Tabla 2. *Rúbrica para evaluar las dimensiones Contenido y Acceso Equitativo al Contenido. Adaptada de Schoenfeld (2016)*

	Contenido ¿En qué medida el contenido que abordan los estudiantes representa el mejor entendimiento de la matemática?	***Acceso Equitativo al Contenido*** ¿En qué medida el profesor mantiene el acceso del contenido de la lección para todos los estudiantes?
1	Las actividades de enseñanza no están enfocadas en el contenido propuesto y no tienen coherencia, se carece de oportunidades para involucrarse en prácticas clave de razonamiento y de resolución de problemas.	Hay un acceso diferenciado al contenido matemático, o una participación desigual en su desarrollo, y no se hacen esfuerzos para remediar esta situación.
2	Las actividades están principalmente orientadas hacia el desarrollo de habilidades, con someras conexiones entre procedimientos, conceptos y contextos y se da una mínima atención a prácticas matemáticas clave.	Hay un acceso o participación disparejos, pero el profesor hace algunos esfuerzos para proporcionar acceso matemático a un número más amplio de estudiantes.
3	Las actividades dan apoyo a conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para involucrarse en prácticas matemáticas clave.	El profesor apoya activamente una participación amplia y significativa de sus estudiantes y lo logra en gran medida; o lo que parecen ser estructuras establecidas en el ambiente de enseñanza-aprendizaje promueven dicha participación.

Resultados

En algunos casos los estudiantes llegan a la expresión correcta del modelo algebraico pero no la insertan en una relación funcional; muchos no llegan a la regla de correspondencia correcta. La mayoría presenta problemas para distinguir entre variable dependiente e independiente. Con respecto a las representaciones gráfica y algebraica, la mayoría reconocen cuándo se trata de una función cuadrática e identifican el vértice, las raíces o ceros de la función y su concavidad. Los estudiantes tienen problema para transitar de una representación a otra, sobre todo de la tabular a la algebraica. A pesar de que la mayoría reconoce un modelo cuadrático, sobre todo en sus representaciones algebraica y gráfica, no todos son capaces de determinar algebraicamente el máximo o mínimo de la función.

Con el análisis de la rúbrica sobre entendimiento del concepto de función cuadrática determinamos situar a los estudiantes, en su mayoría, en el nivel de comprensión intermedio, aunque es posible colocar a algunos en un nivel a medio camino entre el intermedio y el avanzado.

Por su parte, con respecto al *Dominio Contenido*, definido como el grado en el que el contenido que abordan los estudiantes representa el mejor entendimiento disciplinario, proporcionando a los estudiantes la oportunidad de aprender el contenido y las prácticas importantes de la materia, y de desarrollar hábitos mentales disciplinarios y productivos, la secuencia de actividades cubre por completo el contenido disciplinario y los aprendizajes propuestos en el programa oficial de la escuela en donde se aplicó. El análisis, entonces, debería hacerse tomando en cuenta qué tanto el programa de matemática cumple con

este Dominio. En un análisis somero, podemos decir que, a pesar de que se dice que el programa se centra en los aprendizajes del estudiante, el énfasis se pone en los contenidos y en estrategias de enseñanza (que no de aprendizaje). El problema con este programa es que no hubo una reflexión suficiente sobre qué es un aprendizaje y, en la mayoría de los casos se consignan procedimientos en vez de un aprendizaje. En la Figura 2 se muestra parte del programa.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Expresa la función $y=ax^2+bx+c$ en la forma estándar $y=a(x-h)2+k$, usando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto. Además, interpreta el impacto de sus parámetros en el registro gráfico. • Comprende los términos de concavidad, vértice, máximo, mínimo y simetría.	• La función $y=ax^2+bx+c$ y sus propiedades gráficas. - Simetría, concavidad, máximo o mínimo. • Forma estándar $y=a(x-h)^2+k$	• El profesor cuestiona a los alumnos sobre la simetría de la gráfica de las funciones cuadráticas, y su utilidad para determinar el valor máximo o mínimo y las coordenadas del vértice. • El profesor plantea a sus alumnos la actividad de transformar una función cuadrática a la forma $y=a(x-h)^2+k$ y analizar su utilidad para determinar las características analíticas y gráficas de la función.
Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.	Problemas de aplicación.	El profesor resalta la importancia de los métodos algebraicos en la resolución de problemas de optimización en diversos contextos, por ejemplo, numéricos, de áreas, costos y ganancias.

Figura 2. Parte del programa de la Unidad 2. Funciones cuadráticas y su aplicación. CCH (2016).

Como las actividades se ciñen a este programa, consideramos que se pueden colocar en el nivel dos de la rúbrica correspondiente (Tabla 2).

Para observar en qué medida el profesor mantiene el acceso del contenido para todos los estudiantes, la información de las bitácoras resulta de utilidad. Por ejemplo, tenemos el caso de dos compañeros estudiantes: el estudiante A indicó desde el inicio del curso que las matemáticas le cuestan mucho trabajo y "no sabe nada", mientras que la estudiante B es muy hábil, y le gusta apoyar a sus compañeros; se les recomendó que trabajaran juntos (aunque tenían la libertad de asociarse con quién ellos quisieran). Al final del curso la estudiante B consignó en una de sus reflexiones: "Creo que una de las cosas más importantes es aprender a trabajar en equipo, me sentí muy bien, sentí que las cosas que aprendí las aprendí por mí misma". Mientras que el estudiante A mencionó que lo importante fue "…entender más las matemáticas, subir el nivel en una materia que casi no entendemos, […] superar mis metas paso a paso…". Estos comentarios son muestra de cómo el trabajo en equipo, en particular con dos estudiantes en situaciones muy diferentes, es de utilidad para que el estudiante sienta que está aprendiendo y tenga la oportunidad de acceder al conocimiento. La propuesta de la profesora puede ser un factor que ayudó a lograr un acceso equitativo, sin embargo, a pesar de éstas y otras muestras similares, se tiene la convicción de que los esfuerzos no son suficientes, pues se tiene la impresión de que algunos estudiantes no tuvieron el mismo acceso, entre otras cosas, por falta de motivación.

De acuerdo con la rúbrica de la Tabla 2, se llegó a la conclusión de que la Dimensión Acceso Equitativo quedó en el Nivel 2: *hay un acceso o participación disparejos, pero el profesor hace algunos esfuerzos para proporcionar acceso matemático a un número más amplio de estudiantes.*

Conclusiones

Consideramos que los avances en ambos aspectos de la investigación, grado de comprensión del concepto de función cuadrática, y la atención a los dominios Contenido de la Materia y Acceso Equitativo al Contenido, son insuficientes con respecto a las expectativas que se tenían al inicio de la puesta en práctica. No tenemos certeza de las causas de estos resultados, pero es posible aventurar algunas hipótesis que podrían determinar la dirección de nuestra investigación:

- Es necesario redefinir los aprendizajes planteados en el programa de acuerdo con una concepción puntual sobre el término aprendizaje y, a partir de esto, determinar las actividades y las estrategias a seguir, dando un papel central al estudiante en las estrategias de aprendizaje sugeridas.
- El tiempo para tratar funciones cuadráticas es insuficiente (15 horas) falta tiempo para la reflexión. Una posible solución sería integrar la unidad anterior a ésta, Ecuaciones Cuadráticas, y diseñar actividades que cubran ambas temáticas de manera simultánea.
- Se ha descuidado el ambiente en el aula, en el sentido de que se sigue poniendo más énfasis en la enseñanza que en el aprendizaje (esto también se manifiesta en las estrategias sugeridas en el programa). Es necesario hacer una reflexión más profunda sobre este tema y diseñar ambientes de aprendizaje mejores en los que se garantice el acceso equitativo al contenido.

Referencias Bibliográficas

CCH, (sf). *Misión y filosofía.* Recuperado el 30 de septiembre de 2017 de http://www.cch.unam.mx/misionyfilosofia.

Chávez, G. X., Flores, A. H. y Gómez, A. (2016). Modelación Matemática en el Desarrollo de Funciones Lineales y Variación Directamente Proporcional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 29, 634-642.

Dewey, J. (1989) *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo.* Barcelona: Paidós.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne, Peter Lang.

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2016). *Programas de Estudio Área de Matemáticas: Matemáticas I a IV*. México: UNAM.

Flores, A. H. (2007). Aprender Matemática Haciendo Matemática: modelo de enseñanza centrado en el estudiante. *Acta Scientiae*, *9*(1), 28-40.

Flores, A. H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model. *Educaçao Matemática e Pesquisa*, 12(1), 75-87.

Flores, A. H. y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*. 21(2), 117-142.

Rodgers, C. (2002). Defining Reflexion. *Teachers College Record*, 104(4), 842-866.

Schoenfeld, A. H., & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework.* Recuperado el 18 de enero de 2017 de http://map.mathshell.org/trumath.php

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. En Kelly, A y Lesh, R. (eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Vigotsky, L. S. (1978). *Mind in Society, The development of Higher Psychological Processes*. Massachusetts: Harvard University Press.

ALGUNAS EXPERIENCIAS DE INTEGRACIÓN ENTRE LA DISCIPLINA MATEMÁTICA CON OTRAS DE LA CARRERA DE ARQUITECTURA Y URBANISMO EN LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA HABANA

Miriam C. Crespo Estrada, Karen Sanabria Ortega, María de los Ángeles González Peñalver
Universidad Tecnológica de la Habana *José Antonio Echeverría*, Cujae (Cuba)
mcrespo@cemat.cujae.edu.cu, karen@arquitectura.cujae.edu.cu, mangeles@cemat.cujae.edu.cu

Resumen

La integración de las disciplinas ha constituido uno de los factores de éxito en la enseñanza de la Arquitectura y el Urbanismo en Cuba en las últimas décadas. Esta práctica, involucra a disciplinas no propias de la especialidad como la Matemática, la cual trabaja en la proyección y ejecución de experiencias integradoras con otras disciplinas de la carrera. El presente trabajo, muestra algunas experiencias de integración de la disciplina Matemática con Expresión Gráfica y con Diseño Arquitectónico y Urbano, reconoce distintos niveles alcanzados y relaciona aspectos a considerar para trazar una estrategia que permita lograr resultados superiores en este sentido.

Palabras clave: experiencias de integración, integración interdisciplinar, estrategias de integración, matemática, arquitectura

Abstract

The integration of different disciplines has constituted a successful factor in architecture and urbanism teaching, in Cuba in the last decades. This practice involves disciplines that do not belong to the specialty, like Mathematic, and works in the projection and carrying out of integrating experiences with other disciplines in this field. This paper is aimed at showing some integrating experiences of mathematics with Graphics and Urban and Architecture Design disciplines. It also recognizes the different levels achieved and it relates the aspects to take into consideration in order to set up a strategy that allow the achievement of higher results in this sense.

Key words: integrating experiences, interdisciplinary integration, integration strategies, mathematics, architecture

Introducción

Qué enseñar de las ciencias básicas y cómo enseñar estas disciplinas que no forman parte del perfil profesional pero que si tributan a la formación del futuro egresado, han sido temas de reflexión a la hora de diseñar los Planes de Estudios en las Escuelas de Arquitectura de diferentes latitudes.

En la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Valencia, por sólo citar un ejemplo, consideran que las ciencias básicas hay que abordarlas desde otro punto de vista que propicie un mayor protagonismo del aprendizaje autónomo del estudiante. Opinan que la clave del éxito podría radicar en una mayor interrelación y coordinación entre las diferentes asignaturas y en el desarrollo de trabajos multidisciplinares. Docentes de esa institución de altos estudios desarrollan una propuesta de docencia interdisciplinar muy sugerente, que involucra a las asignaturas Dibujo Arquitectónico, Fundamentos Matemáticos en Arquitectura y Ampliación de Matemáticas que se imparten en los primeros cursos. (Calvo, Capilla y Gómez-Collado, 2008)

En Cuba, los intentos de integración entre las diferentes disciplinas de la carrera de Arquitectura, se han ido incrementando en las últimas décadas, los cuales se concretan en estrategias diversas de formación, no sólo entre disciplinas de la especialidad, sino también, entre estas y las ciencias básicas.

A partir de los años 90´ del pasado siglo la disciplina Matemática ha incorporado progresivamente esta práctica, proyectando y ejecutando experiencias integradoras con otras disciplinas del Plan de Estudios, lo que sin dudas, ha contribuido notablemente a la elevación de la motivación de los estudiantes por la Matemática.

A continuación se muestran algunas experiencias de integración de la disciplina Matemática con otras de la carrera de Arquitectura y Urbanismo en la Universidad Tecnológica de la Habana, se reconocen distintos niveles alcanzados, así como se relacionan aspectos a considerar para trazar una estrategia que permita lograr resultados superiores en este sentido.

Algunas experiencias de integración entre la disciplina matemática con otras de la carrera de arquitectura y urbanismo en la universidad tecnológica de la habana

Con la intención de lograr un mayor compromiso en el enfoque integracionista de la formación y de la capacitación de los docentes en la especialización para Arquitectura en general, y para Matemática en particular, se ha desarrollado un trabajo metodológico conjunto con la participación de los docentes de las asignaturas involucradas en las acciones integradoras en cuanto al uso de la terminología, orden y tratamiento de los contenidos, determinación de los nodos de articulación, definición de conocimientos y habilidades, aplicación de un sistema de evaluación coherente, análisis de la posición relativa de materias según intereses de otras disciplinas de la especialidad en las secuencias de actividades docentes y en la planificación de las mismas, así como del diseño de actividades docentes y científicas.

En la disciplina Matemática, si bien se han desarrollado experiencias de este tipo con otras disciplinas de la especialidad en diferentes temas, desde el 2007, el énfasis ha estado en los de Proporciones y Geometría Analítica, en los cuales ya hay una práctica acumulada en la implementación de ejercicios integradores con las disciplinas Expresión Gráfica y Diseño Arquitectónico. A partir del 2012 se logra extender a otros temas como el Álgebra Lineal, el Cálculo Diferencial e Integral y la Estadística y Probabilidades. Todas estas experiencias se han desarrollado hasta la actualidad con los estudiantes de primer y segundo año de la carrera de Arquitectura y Urbanismo de la Universidad Tecnológica de La Habana, Cujae.

En el tema "Proporciones", está prevista una conferencia orientadora, en la cual se abordan los conceptos matemáticos que sustentan el mismo, sus modalidades y significados, así como se muestran aplicaciones en el diseño y producción de objetos urbano-arquitectónicos.

Paralelamente, se orienta la realización de un trabajo investigativo por equipos, el cual aborda diferentes temas, entre ellos: *la sección áurea, el modulor de Le Corbusier, la coordinación modular, la proporción y la forma de los objetos urbano-arquitectónicos, la proporción y los significados de los objetos urbano-arquitectónicos y la serie de Fibonacci.* En cada uno de ellos, se les exige contemplar los antecedentes históricos, la fundamentación matemática y su aplicación en el diseño arquitectónico. Este trabajo investigativo logra en los estudiantes de primer año un impacto favorable en la motivación por la matemática, ya que aprecian su aplicación en la carrera.

En todas las temáticas a investigar los estudiantes muestran cómo se manifiesta lo estudiado en obras nacionales e internacionales del patrimonio construido, así como realizan el análisis de las ventajas y desventajas, identificando aspectos positivos, negativos e interesantes del tema desarrollado. Los temas en los que los estudiantes desarrollan su investigación desde la Matemática, son tratados en asignaturas de las disciplinas Expresión Gráfica para la Arquitectura y el Urbanismo (EGAU), Diseño Arquitectónico y Urbano (DAU) y Teoría Historia y Crítica de la Arquitectura y Urbanismo (TCHAU), los profesores que imparten sus asignaturas apoyan a los estudiantes con la orientación oportuna y utilizan elementos estudiados en diferentes ejercicios, en los que se confeccionan maquetas, se diseñan configuraciones a partir de muestras elementales utilizando la coordinación modular y se realizan análisis de fachadas.

Estos trabajos investigativos son presentados, con el apoyo de pancartas, multimedias u otras formas de presentación, en un seminario donde se socializa el conocimiento y se propicia el debate colectivo. Los mejores trabajos son seleccionados para ser presentados, dentro de la categoría de trabajos curriculares, en la Jornada Científica Estudiantil que se realiza en la Universidad.

En el tratamiento del tema de Geometría Analítica en Matemática, se profundiza en el uso consecuente de conceptos y terminologías, propios de la Geometría Descriptiva utilizados en la disciplina EGAU, así como en la adquisición de habilidades en el dibujo a mano libre y/o con instrumentos de curvas, sólidos y sus proyecciones. Recíprocamente, la disciplina EGAU también utiliza los elementos de la Geometría Analítica estudiados en la disciplina básica, con el fin de entender las construcciones geométricas, la obtención de la forma real de caras planas y, en consecuencia, la representación de desarrollos y elaboración de maquetas. En ambos casos, tanto en los procedimientos, como en la presentación de los resultados, se combinan técnicas de representación manuales y digitales, y se profundiza en el diseño gráfico plano.

En el desarrollo de este tema se han reeditado también ejercicios integradores realizados en programas anteriores por otros docentes como la arquitecta Isabel Fernández y el doctor. Guillermo Pérez Pantaleón, entre otros, donde los estudiantes aplican los conocimientos matemáticos adquiridos en la Geometría Analítica, a la descomposición de obras arquitectónicas: gráfica y analíticamente.

Se realizan además trabajos de cursos, trabajos extracurriculares y exámenes de premio en Matemática, para los alumnos de altos rendimientos, que vinculan contenidos de esta disciplina con los de EGAU.

En el tema de Álgebra Lineal, se realiza una actividad donde se trata la rotación y la reflexión, (transformaciones en el plano estudiadas en EGAU), como ejemplos de aplicaciones lineales y sobre la base de la teoría matemática que sustenta las mismas, se muestra la forma de obtener configuraciones a partir de un módulo, vinculándolo también con lo estudiado en el tema Proporciones.

En el Cálculo integral, se relaciona el tema con lo que se estudia en la disciplina Análisis y Diseño Estructural (ADE), se realizan ejercicios de cálculos de áreas, centroides y momentos en secciones transversales de vigas usadas con frecuencias en las construcciones.

En los temas de Estadística y Probabilidades se proponen problemas asociados a la calidad de la construcción utilizando datos reales.

A pesar de lo logrado, la concepción de la integración a la que se aspira requiere de una valoración más detallada acerca de la calidad y el alcance de la que ha tenido lugar hasta ahora, así como proyectar el trabajo conjunto a realizar por las disciplinas involucradas para lograr la verdadera integración. En tal sentido, partiendo de las experiencias ya instrumentadas, es necesario valorar los resultados y niveles alcanzados en la integración entre la disciplina Matemática con otras de la carrera, así como proponer pautas conceptuales generales hacia las cuales dirigir el trabajo para conquistar niveles superiores.

Valoración de la integración de la matemática con otras disciplinas de la carrera de arquitectura en la universidad tecnológica de la habana, cujae.

En las tentativas de integración interdisciplinar en la carrera de Arquitectura, la disciplina Matemática ha trabajado en dos sentidos, de una parte, en el diseño de su programa en los distintos planes de estudios que apuntan a una Matemática más contextualizada y, de otra, en la proyección y ejecución de experiencias pedagógicas integradoras con otras disciplinas de la carrera.

La investigación se basó fundamentalmente en la revisión de los Planes de estudio, planes temáticos de las disciplinas y resultados de ejercicios integradores realizados en cursos anteriores por diversos profesores en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, hoy Universidad Tecnológica de la Habana. La metodología fundamental utilizada fue la cualitativa. Su aplicación nos permitió recolectar y valorar toda la información necesaria. Paralelamente se desarrolló una investigación en la acción. Con la utilización de un registro anecdótico fue posible recoger los aciertos y desaciertos de cada experiencia realizada, permitiendo valorar su implementación y a la vez perfeccionar ajustar en la práctica.

El estudio comprendió el análisis de tres aspectos fundamentales: la evolución de la enseñanza de la Matemática en la formación de arquitectos en Cuba, la caracterización de la integración de la Matemática fundamentalmente con EGAU y con DAU y la valoración de los resultados alcanzados.

El primero de ellos permitió conocer y analizar en qué medida se han transformado y adecuado los programas de Matemática, específicos para esta carrera.

El segundo facilitó la identificación de las acciones de integración que han sido desarrolladas, los períodos específicos en los que han tenido lugar las mismas y en cada caso, los aspectos positivos y limitaciones.

Finalmente, el análisis comparativo de los resultados anteriores, permitió, caracterizar y valorar la integración lograda en los diferentes períodos, esbozar pautas conceptuales generales para lograr niveles superiores de integración e identificar aquellos aspectos que se deben tener en cuenta para trazar una estrategia con este fin.

Evolución de la enseñanza de la Matemática en la formación de arquitectos en Cuba

A comienzos del siglo XX se inicia la formación de arquitectos en Cuba, y en todos los planes de estudios ha estado presente en mayor o menor medida la Matemática. Hasta 1990, sus programas se caracterizaron por ser un agregado de asuntos que seguían fundamentalmente la lógica de la ciencia y centraban la atención en el ordenamiento de contenidos, algunos no necesarios ni de interés para los estudiantes, y otros se presentaron tal cual como fueron diseñados para primer año de ingeniería. En las clases, se enfatizaba fundamentalmente en los métodos de cálculo y resolución de ejercicios, en detrimento de la aplicación y vinculación de los contenidos con las asignaturas de la especialidad.

En las tres últimas décadas, con los reiterados intentos por transformar el panorama de la enseñanza y del aprendizaje de la Matemática en esta carrera, se han ido introduciendo paulatinamente cambios, dirigidos a lograr la Matemática necesaria para la formación del futuro arquitecto.

Con el Plan C (1990-1998), comenzó una etapa significativa de acercamiento a la Matemática necesaria para este profesional. Para su perfeccionamiento, conocido por Plan C´ (1998-2007), se tomaron en cuenta los contenidos del plan anterior, a partir del establecimiento de los nodos de articulación entre los temas de Matemática y los de las demás disciplinas de la especialidad, se hicieron algunos ajustes en cuanto a la profundización en su tratamiento y se introdujeron otros, también importantes para los estudiantes de esta carrera.

En el curso 2007-2008 se implementa por primera vez el Plan de Estudios D, y con él la disciplina "Matemática para Arquitectos" (Crespo, 2007), la cual fue el fruto de un exhaustivo análisis de las deficiencias detectadas en los planes precedentes, de la aplicación consecuente de tres principios fundamentales para la selección de sus contenidos: los contenidos seleccionados por la lógica de la Profesión, los seleccionados por la lógica de la ciencia sistematizada como asignatura o disciplina científica en la práctica pedagógica y los seleccionados por la lógica del instrumento o la etapa de realización de una tarea profesional. (Corral y Núñez, 1990) y de la estrategia de perfeccionamiento definida. Su programa difiere de los de ingenierías y procura responder a las necesidades de la formación de un arquitecto, por lo que para su diseño fue necesario determinar con exactitud el verdadero papel que debe jugar la Matemática en este caso.

Utilizar en el proceso docente métodos activos y estrategias de enseñanza y aprendizaje que contribuyan a un aprendizaje consistente y duradero, constituye hoy día una prioridad en la implementación de sus asignaturas y forma parte de la estrategia del perfeccionamiento continuo que se realiza en la Disciplina, en la CUJAE. En las indicaciones metodológicas y de organización para su ejecución se destacan entre sus líneas directrices la resolución de problemas de la especialidad y la integración de contenidos, tanto dentro de la propia Matemática como con las restantes asignaturas del Plan de Estudio donde sea posible. (Crespo, 2007). Todos estos presupuestos, constituyen la base sobre la cual se proyectan y ejecutan en la actualidad las experiencias de integración.

Caracterización de la integración de la Matemática con otras disciplinas de la carrera en la Universidad Tecnológica de la Habana, CUJAE

En los Planes de Estudios C y C´, se instrumentaron, en la Facultad de Arquitectura, diversas experiencias de integración, vinculadas fundamentalmente con la disciplina Comunicación, hoy EGAU, que en el de cursar de los años, tuvieron diferentes alcances, en algunos momentos retrocesos, determinados, entre otras cosas, por la concepción del Plan implementado, los incrementos de las matrículas y la experiencia, estabilidad y dedicación de los docentes de las asignaturas involucradas. Para desarrollar estas experiencias se requirió de una mayor preparación de los profesores de Matemática en temas de Geometría Descriptiva, así como de los de Comunicación en temas de Geometría Analítica. Sin embargo, la resolución de ejercicios similares en ambas asignaturas conllevó a la duplicidad de sistemas de conocimientos y habilidades en las mismas, una de las razones por la cual fue necesario ajustar el programa de Matemática para esta carrera.

Si bien en estos planes de estudios precedentes, las experiencias fueron aisladas, unilaterales en su mayoría y no en todos los casos como parte de un sistema planificado, ni consensuado a nivel de los años implicados (Crespo, Sanabria y Guerra, 2012), en la implementación de la actual disciplina "Matemática para Arquitectos" (Crespo, 2007), que tiene identidad propia y es el resultado de experiencias acumuladas por años en la integración entre esta disciplina y otras de la carrera, se ha revelado una evolución favorable en correspondencia con la paulatina toma de conciencia del problema, tanto de los profesores de Matemática, como los de la especialidad, por lo que se han ido sistematizando y consolidando las experiencias de integración, también en otros temas de Matemática, fundamentalmente con las disciplinas EGAU y DAU y en menor medida, con TCHAU y ADE.

Las experiencias desarrolladas en el tema Proporciones han contribuido al aumento de los materiales bibliográficos específicos que abordan, tanto los conceptos matemáticos, como ejemplos reales del patrimonio edificado, a través de la aplicación del análisis de la forma a objetos urbano-arquitectónicos. Por primera vez se aplica el tema al análisis de fachadas como ejercicio de EGAU, en edificaciones que conforman plazas, lo que constituye una experiencia de integración desde EGAU con Matemática.

En la actualidad, todos estos esfuerzos aislados o ligeramente sistematizados son pensados en sistema, y han conducido a la ejecución del primer proyecto de la línea de investigación también denominada Expresión Gráfica para la Arquitectura y el Urbanismo, en el que participan estudiantes y profesores de ambas disciplinas. El proyecto denominado "La métrica en la arquitectura cubana", combina la geometría descriptiva y la analítica, las proporciones y la métrica de formas urbanas y arquitectónicas.

Valoración de los resultados

Como consecuencia del análisis de las experiencias pedagógicas integradoras, aplicadas en la disciplina Matemática y en otras de la carrera de Arquitectura en la CUJAE en los distintos planes de Estudios, se reconoce la existencia de diferentes niveles de integración. (Tabla 1)

Tabla1: *Niveles de integración entre la disciplina Matemática y otras de la carrera de Arquitectura en la CUJAE*

Nivel Bajo de integración	Nivel Medio de integración	Nivel Alto de integración
Se logra sobre la base del uso en Matemática, en el tratamiento de la Geometría Analítica, de conceptos y terminologías de la Geometría Descriptiva estudiada en EGAU	Se concreta con el diseño y aplicación de experiencias integradoras unilaterales de la Matemática con EGAU, DAU, ADE y TCHAU	Está centrado en el diseño de experiencias integradoras bilaterales o diseñadas y ejecutadas de manera conjunta que involucra a la Matemática y otras disciplinas de la carrera.

Entre los aspectos positivos identificados están, la toma de conciencia acerca de la necesidad de integración en general y entre las disciplinas involucradas en particular; la superación del personal docente en las materias implicadas y la realización de trabajo metodológico conjunto intra e interdisciplinar.

Como limitaciones se señalan: experiencias unilaterales y no consensuadas, falta de preparación suficiente de los docentes de las disciplinas relacionadas, debido a la inestabilidad de los colectivos de otras disciplinas de la especialidad. Se destaca además que en ocasiones ha sido insuficiente la voluntad de los directivos para apoyar y priorizar la integración entre asignaturas de las disciplinas básicas con las de la especialidad.

Para la definición de una estrategia que revierta esta situación, los esfuerzos deberán estar dirigidos, tanto a la capacitación de los docentes, como a la profundización en el trabajo metodológico conjunto, de manera que el diseño y la realización de actividades no sean unilaterales, es decir solo desde la Matemática y que las mismas hagan mayor énfasis en el aprendizaje basado en problemas y contribuyan al desarrollo científico-metodológico de las disciplinas implicadas, así como a una mayor motivación y preparación de los estudiantes.

Conclusiones

Las acciones realizadas en términos de integración por la disciplina Matemática en la carrera de Arquitectura de la Universidad Tecnológica de la Habana, han alcanzado diferentes niveles, con características y resultados desiguales.

A pesar de los logros alcanzados, como consecuencia de la insuficiente toma de conciencia de los docentes de otras disciplinas sobre la necesidad de trabajo mancomunado, persisten dificultades para alcanzar niveles superiores de integración. Dentro de las limitaciones en ese sentido se destacan: experiencias unilaterales y no consensuadas y la inestabilidad y falta de preparación de los docentes en temas susceptibles a ser integrados.

Es indispensable establecer una estrategia que revierta esta situación, en la que los esfuerzos deberán estar dirigidos, tanto a la capacitación de los docentes, como a la profundización en el trabajo metodológico conjunto, logrando la realización de actividades que tengan mayor énfasis en el aprendizaje basado en

problemas y contribuyan al desarrollo científico-metodológico de las disciplinas involucradas, así como a una mayor motivación de los estudiantes por la Matemática.

Referencias bibliográficas

Calvo, V., Capilla, E. y Gómez, M.C. (2008). *Una propuesta de experiencia conjunta en la enseñanza del Dibujo Arquitectónico y las Matemáticas.* Actas del XII Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica (pp 155-165). Madrid: Editorial Instituto Juan de Herrera. ISBN 978-84-9728-270-

Corral, R. y Núñez, M**.** (1990). Aplicación de un método teórico a la elaboración del perfil profesional en la Educación Superior. *Revista Cubana Educación Superior. Vol. X*

Crespo, M. (2007). *Programa de la Disciplina Matemática para Arquitectos (Plan D)*. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana. Cuba

Crespo, M., Sanabria, K. y Guerra, C. (2012). Matemática para arquitectos: convergencias conceptuales y experiencias pedagógicas integradas con Expresión Gráfica. *Revista Arquitectura y Urbanismo*, *vol. XXXIII, No 3, 113-121*.

VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Sandra Baccelli, Sergio Anchorena, Stella Maris Figueroa
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata. (Argentina)
sbaccelli@gmail.com, pollo_mdp@yahoo.com, stellafigueroa@gmail.com

Resumen

Se presenta, en esta comunicación, la valoración de secuencias didácticas de problemas de optimización, en un curso de Ingeniería, de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Dicho análisis se realizó en dos secuencias didácticas: la implementada en una intervención didáctica y la tradicional, en comparación con la idoneidad *a priori* de la secuencia diseñada para la intervención didáctica. El marco teórico utilizado es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS). La valoración se realizó a partir del estudio de la Idoneidad Didáctica con el objetivo producir una mejora en la enseñanza y el aprendizaje de problemas de optimización.

Palabras clave: secuencias didácticas-idoneidad didáctica-enfoque ontosemiótico

Abstrac

This paper shows the evaluation of didactic sequences of optimization problems, in the context of an Engineering course, at the National University of Mar del Plata. This analysis was carried out in two didactic sequences: the one implemented in a didactic intervention and the traditional one, compared to the a priori suitability of the sequence designed for the didactic intervention. The theoretical framework used is the Onto-semiotic Approach to Cognition and Mathematical Instruction (OSA). The assessment was made from the study of Didactic Suitability aiming to produce an improvement in the teaching and learning of optimization problems.

Key words: didactic sequences-didactic suitability-ontosemiotic approach

Introducción

Numerosas son las dificultades que enfrentan los estudiantes en un primer curso de Cálculo Diferencial en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. En particular, la problemática recurrente referida a la resolución de problemas de optimización, en el contexto de la derivada. Adquiere importancia el estudio de la resolución de dichos problemas si se piensa en el rol central que tienen las tareas de optimización para los ingenieros que, frecuentemente, tienen como trabajo específico obtener la solución de un problema técnico, maximizando o minimizando el uso de los recursos disponibles.

Con el objetivo de producir una mejora en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de problemas de optimización, que permita superar las dificultades manifestadas por los estudiantes, se realizó una intervención a partir de la implementación de una secuencia didáctica en uno de los grupos de Análisis Matemático A, materia que se cursa en el primer año de estudios de las carreras de Ingeniería.

En esta publicación, se presenta la valoración la idoneidad didáctica de dos secuencias didácticas: la implementada en una intervención didáctica, y la tradicional implementada habitualmente, en comparación con la idoneidad *a priori* de la secuencia diseñada para la intervención didáctica. Pretendiendo con ello dar respuesta a si: las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas de optimización ¿pueden originarse en una baja idoneidad de la secuencia didáctica implementada para enseñar este tema en un curso de Cálculo Diferencial?, ¿es posible producir una mejora realizando una intervención educativa?

La presente investigación se enriqueció con metodologías y conclusiones que otros investigadores arribaron sobre el tema. En ese sentido, Dávila (2010) en su tesis doctoral *La Derivada a Partir de Problemas de Optimización en Ambientes Dinámicos Creados con GeoGebra*, analiza la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, orientado a la modelización y a la resolución de problemas de optimización.

El marco teórico que sustenta esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2009).

Marco teórico

Uno de los conceptos centrales, para el EOS, es el de *práctica matemática* como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). En estas prácticas matemáticas intervienen objetos que emergen de las mismas, pueden ser *ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.). Son ellos los denominados *objetos primarios*: elementos lingüísticos, situaciones-problema, conceptos, procedimientos, argumentos (Godino et al, 2009). Todos estos objetos primarios pueden ejercer el rol de expresión o de contenido de una *función semiótica*. Entendida como la correspondencia entre un objeto primario (antecedente) y el sistema de prácticas matemáticas (consecuente) que activa dicho objeto matemático.

Otro de los constructos, de este enfoque teórico, es la *Idoneidad Didáctica*, que permite realizar el análisis y la valoración del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, brindando herramientas metodológicas y criterios valorativos para el estudio de la idoneidad didáctica, mediante un sistema de indicadores empíricos que se expresan, interactúan y sirven de guía para la valoración de acciones planificadas o implementadas.

Al respecto del análisis de idoneidad, Pochulu y Font (2011) afirman que:

> Este análisis didáctico minucioso, al igual que una radiografía, penetra en la estructura interna de la clase, resaltando aspectos y matices que, si bien pueden parecer obvios después de haber

> sido encontrados, se hallan ocultos ante una mirada general y prematuramente valorativa de esta práctica matemática. (pp. 361-394)

El EOS define la Idoneidad didáctica, como la articulación coherente y sistémica de seis componentes. Ellas son: *Idoneidad epistémica*, relativa a los significados institucionales; *Idoneidad cognitiva*, relativa a los significados personales; *Idoneidad interaccional*, relativa a las interacciones docentes-discentes; *Idoneidad mediacional*, relativa a los recursos tecnológicos y temporales; *Idoneidad emocional*, relativa a las actitudes, afectos y emociones; *Idoneidad ecológica*, relativa a las relaciones intra e interdisciplinares. Esta noción, con sus criterios y dimensiones (Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2007) permite el paso de una didáctica descriptiva–explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula (Godino, 2011).

Metodología

La valoración de la idoneidad didáctica, se realizó a partir de los seis criterios de idoneidad, con sus respectivos componentes y descriptores. Para cada una de las dimensiones se efectuó la comparación entre lo pretendido a partir del diseño de la secuencia (a priori), lo implementado (a posteriori) y una secuencia tradicional de la materia. A excepción de la idoneidad epistémica, a priori y a posteriori, de la secuencia propuesta, cuya valoración es invariante del momento en que se efectúe. Para dicha comparación, se consideró una escala de cinco grados: baja (b hasta un 20%), media-baja (mb de 20% a 40%), media (m hasta de 40% a 60%), media-alta (ma de 60% a 80%) y alta (a de 80% a 100%). El porcentaje asignado estuvo de acuerdo a los descriptores presentes en cada una de las seis idoneidades, en la secuencia didáctica valorada. Los componentes y descriptores que operativizan cada idoneidad son los formulados por Godino et al (2007).

Se definieron, también, seis funciones semióticas (Tabla 1) que, de estar establecidas por los estudiantes, conducen a la resolución satisfactoria de los problemas de optimización analizados. Asimismo, dejan al descubierto las dificultades que están asociadas a los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes en sus razonamientos.

Tabla 1. *Funciones semióticas intervinientes en la resolución de problemas de optimización*

Antecedente	*Función semiótica*	*Consecuente*
Condición del problema	F_1 →	Relación entre variables que debe presentarse en la función a optimizar
Función área en dos variables	F_2 →	Identificación de la función a optimizar en dos variables
Función a optimizar en una variable	F_3 →	Re-expresión en función de una sola variable la función área

Derivada de la función	$\xrightarrow{F_4}$	Función obtenida a partir de la aplicación de reglas de derivación a la función a optimizar
Punto crítico	$\xrightarrow{F_5}$	Obtención del valor que hace cero la derivada primera o que no la define
Criterios para determinar si un valor crítico es un extremo relativo	$\xrightarrow{F_6}$	Variación del signo de la derivada primera en un entorno del punto crítico o signo de la derivada segunda en dicho punto o variación de la función en un entorno

Las funciones definidas se utilizaron como instrumento para realizar análisis de índole cualitativo, detectando las dificultades, y también en un sentido cuantitativo, comparando las producciones de los estudiantes antes y después de la intervención didáctica (Baccelli, 2017), en los dos grupos con los que se trabajó, la Comisión 1(no intervenidos) y la Comisión 5 (intervenidos).

Resultados y discusión

Los resultados de la valoración de las secuencias didácticas, tanto la implementada como la tradicional, se obtuvieron a partir del análisis de la presencia o no de los descriptores, para cada componente, según la idoneidad evaluada. Dicha valoración se realizó por medio de tablas que brindan el detalle de los porcentajes obtenidos para ubicar a cada idoneidad en el grado correspondiente.

Se muestra en este trabajo, una parte del análisis realizado, para la valoración de la idoneidad epistémica y de la cognitiva, a modo de ejemplo.

Considerando que una secuencia didáctica tendrá mayor idoneidad epistémica cuando las prácticas implementadas (o pretendidas) sean acordes al nivel educativo, y relativas a las prácticas operativas y discursivas que se requieran, se muestra, en la Tabla 2, cómo se operativizó la valoración, en la secuencia tradicional en uno de los grupos, y en la secuencia en el grupo que se realizó la intervención educativa.

Tabla 2. *Valoración de la Idoneidad epistémica en las dos secuencias*

COMPONENTES	*DESCRIPTORES*	*Secuencia tradicional*	*Secuencia en la intervención*
Situaciones-problemas	Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación	-	✓
	Propuesta de situaciones de generación de problemas	-	✓

Lenguaje	Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos	-	✓
	Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige	✓	✓
	Propuesta de situaciones de expresión e interpretación	-	✓
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen	✓	✓
	Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema, según el significado de referencia y el nivel educativo	-	✓
	Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas	-	✓
Argumentos	Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones, al nivel educativo a que se dirigen	-	✓
	Se promueven momentos de validación	-	✓
Relaciones (conexiones, significados)	Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan	-	✓

La Tabla muestra un grado alto (a, 100% de descriptores presentes) para la idoneidad epistémica en la secuencia implementada en la intervención y un grado bajo (b, 18% de descriptores presentes) en la tradicional. En ambas secuencias, los enunciados fueron claros y adaptados, pero no así la propuesta de generación de reglas, ya que en la tradicional sólo se proponían problemas que no promovían ni el establecimiento de las funciones semióticas definidas, imposibilitando la emergencia de los objetos matemáticos esperados. La secuencia implementada en cambio se diseñó pensando un trabajo grupal con momentos de discusión e institucionalización que permitiera la negociación de reglas y la superación de conflictos a partir del establecimiento de la mayor cantidad de funciones semióticas.

Para realizar la valoración de la idoneidad cognitiva, pensada como el grado en que los significados implementados (pretendidos) son adecuados, es decir, que están en la zona de desarrollo potencial de los

estudiantes (Vygotski, 1934), se confeccionó la Tabla 3 que muestra los componentes y descriptores que operativizan este constructo.

Tabla 3. *Valoración de la Idoneidad cognitiva en las dos secuencias*

COMPONENTES	*DESCRIPTORES*	*Secuencia tradicional*	*Secuencia en la intervención*
Conocimientos previos (Componentes similares a la dimensión epistémica)	• Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien porque se han estudiado anteriormente o porque el profesor planifica su estudio)	✓	
	• Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes	-	
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo	-	
Aprendizaje	• Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas	-	

La Tabla muestra un grado medio-alto (m-a, 75% de descriptores presentes) para la idoneidad cognitiva en la secuencia implementada y un grado bajo (b, 18% de descriptores presentes) en la tradicional.

Es de observar que el primer descriptor está presente en ambas secuencias valoradas, ya los estudiantes tenían, al momento de la valoración, estudio completo de las funciones como conocimiento previo. En cambio, en cuanto a la valoración del descriptor relativo a la apropiación de los conocimientos, se advierte presente en la secuencia de la intervención pero no en la tradicional.

Tal afirmación se realizó por medio de la comparación de las funciones semióticas que establecían los estudiantes de los dos grupos. Se muestra, en la Figura 1, un ejemplo de resolución de un estudiante que estableció todas las funciones semióticas en el siguiente problema: *Se quiere construir una caja de cartón de base cuadrada, abierta (sin tapa) de 32 dm 3 de volumen. Calcular las dimensiones para que dicha*

caja tenga superficie mínima. Además, se incluyen los porcentajes de establecimiento de cada función semiótica en cada grupo.

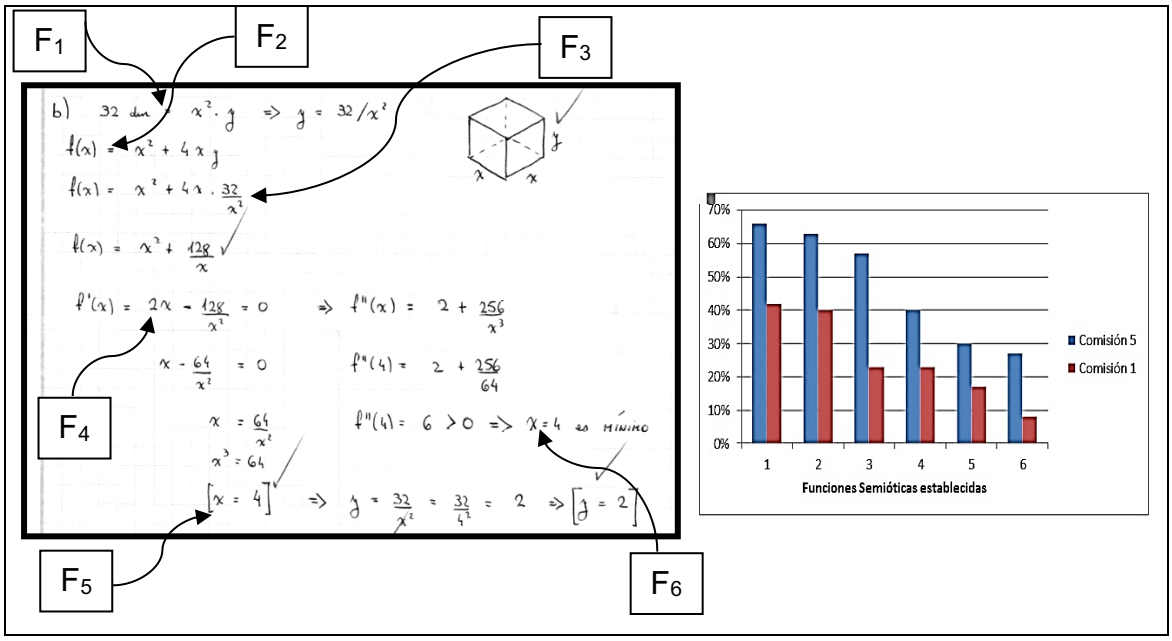


Figura 1. Resolución de un estudiante que establece todas las funciones semióticas en el problema y porcentaje de estudiantes que establecieron las funciones semióticas para las dos comisiones.

La descripción de lo realizado en cada secuencia, para la valoración de cada una de las dimensiones de la idoneidad didáctica con sus respectivos descriptores, se encuentra detallada en las investigaciones en el marco del Análisis didáctico de las resoluciones de Problemas de Optimización en carreras de Ingeniería (Baccelli, 2017).

Finalmente todo el análisis de valoración realizado, por medio de los criterios de idoneidad, se puede visualizar resumidamente en la Figura 2. El hexágono regular representa la idoneidad didáctica, *a priori*, considerada como alta. El hexágono irregular sombreado representa la idoneidad de la secuencia implementada en la intervención, *a posteriori*. Y por último la idoneidad de la secuencia tradicional de la materia, representada por el hexágono irregular interior a los dos anteriores. Los hexágonos que representan los procesos de instrucción implementados son irregulares, ya que es difícil que todos los criterios alcancen el mismo nivel, mientras que en un proceso ideal todos deben tener el grado máximo.

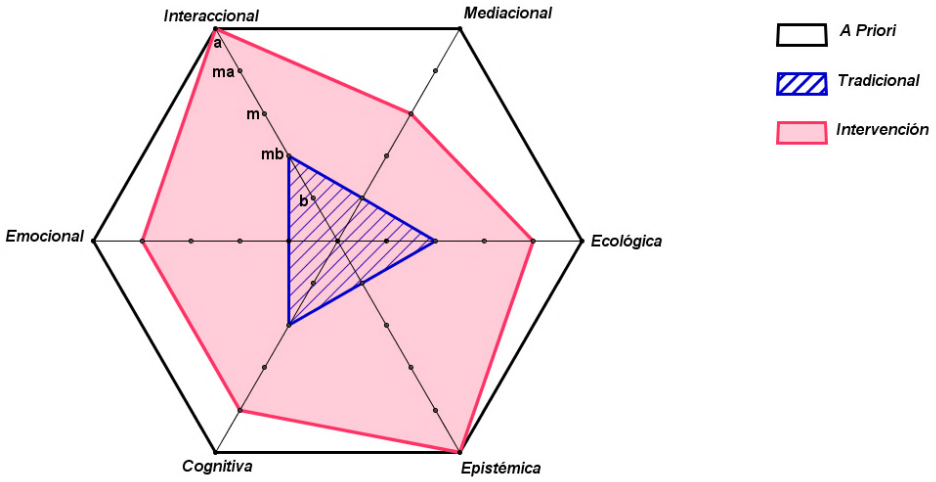


Figura 2. Idoneidad didáctica. Fuente: Baccelli, 2017.

Al comparar las idoneidades valoradas con el hexágono regular es de resaltar que: en la secuencia tradicional de la materia todas las idoneidades se observan medias-bajas o bajas. En cambio, las idoneidades referidas a la secuencia implementada a posteriori, todas se mantienen en el grado medio-alto o alto con excepción de la idoneidad mediacional.

Conclusiones

El análisis de la idoneidad didáctica realizado, permitió concluir que secuencia tradicional de la materia, implementada en ese momento, tenía una baja o media-baja idoneidad en todas sus dimensiones. En cambio, en la secuencia implementada en la experiencia didáctica, el mejoramiento de idoneidad didáctica es notorio en todas sus dimensiones.

Esta comparación de idoneidades didácticas, dio respuesta a las preguntas planteadas, concluyendo que es posible producir una mejora a partir de la realización de una intervención educativa. El establecimiento de la diferencia entre lo "esperado"(a priori máxima idoneidad) y lo "alcanzado"(a posteriori), tanto en la secuencia implementada como en la tradicional, permitió responder a: ¿qué ha sucedido en cada secuencia y por qué?, desde diferentes dimensiones: la epistémica, la cognitiva, la interaccional, la mediacional, la ecológica y la emocional.

La determinación de la red de funciones semióticas representó una herramienta teórico-metodológica potente, no solo en la detección de dificultades, sino también un insumo para el diseño de intervenciones que permitieran superar los errores detectados en las resoluciones de los estudiantes.

El estudio de la idoneidad didáctica es una herramienta cuya aplicación da lugar a una progresiva mejora, facilitando el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. Proporciona, también, una guía para la mejora en un proceso de enseñanza y aprendizaje en condiciones semejantes sobre el objeto "problemas de optimización".

Referencias bibliográficas

Baccelli, S. (2017). *Análisis didáctico de las resoluciones de problemas de optimización en carreras de ingeniería* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Mar del Plata, Mar del Plata, Argentina. Disponible en https://sites.google.com/site/tesisdelosmiembrosdelgrupo/

Dávila, M. T. (2010). *La Derivada a Partir de Problemas de Optimización en Ambientes Dinámicos Creados con GeoGebra*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Sonora. México.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Versión ampliada del artículo: Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, ZDM-*The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135. Recuperado el 16 de octubre de 2012 de: http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Actas del XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperado el 19 de agosto de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2679/1140.

Pochulu, M., Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (3), 361-394.

Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica-Grijalbo.

MEJORA DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA SOBRE LA VINCULACIÓN ENTRE UNA VARIABLE ESTADÍSTICA Y SU VARIABLE ALEATORIA ASOCIADA

Stella Maris Figueroa, Sandra Baccelli
Universidad Nacional de Mar del Plata. Facultad de Ingeniería. (Argentina)
stellafigueroa@gmail.com, sbaccelli@gmail.com

Resumen

Este trabajo muestra la propuesta de mejora de un proceso de instrucción con un problema cuya modelización corresponde a una distribución binomial. Se utilizan herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Los datos corresponden a estudiantes de estadística de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. El análisis de la idoneidad didáctica provee información y propone un diseño instruccional que considera los conflictos cognitivos encontrados y favorece la vinculación entre una variable estadística con su variable aleatoria asociada para propiciar una enseñanza de la estadística con proyectos de la ingeniería.

Palabras clave: variable estadística, variable aleatoria, simulación con GeoGebra

Abstract

This work shows a proposal to improve a teaching process with a problem whose modelling corresponds to a binomial distribution. Theoretical tools of the Onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction are used. The data correspond to students of statistics of Engineering Faculty at the National Universidad in Mar del Plata. The analysis of didactic suitability provides information and proposes an instructional design that considers the cognitive conflicts found and improves the link between a statistical variable and its associate random variable to encourage statistics teaching through engineering projects.

Key words: statistical variable, random variable simulation with GeoGebra

Introducción

Los textos de estadística para carreras de ingeniería, en general, se inician con estadística descriptiva, y desarrollan el concepto de variable estadística como aquella *característica medible* que se estudia a partir de los resultados obtenidos de una muestra. Recién con la teoría de probabilidades, se presenta la unidad relativa a variables aleatorias, pero en general, en la mayoría de los textos, no existe una vinculación explícita entre ambas variables. Luego del cálculo de probabilidades, los estudiantes "ya olvidaron" la variable estadística por lo que no la relacionan con la variable aleatoria. La falta de conexión entre estos objetos matemáticos provoca que no se explote la relación entre conceptos claves como el de muestra y

población, estimación (como el valor numérico de un estadístico) y parámetro. Ante esta dificultad, los estudiantes no advierten la forma natural de vincular la teoría de probabilidades con la estadística, esto introduce mayores dificultades cuando se tratan los contenidos de inferencia. Acerca de esta problemática, se presentó un trabajo, disponible en las actas del 2do Congreso Internacional Virtual del Enfoque Ontológico Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, (2 CIVEOS) que propone un proceso instruccional para favorecer la vinculación entre una variable estadística y su variable aleatoria asociada. En esa propuesta se parte de un problema, en este caso, modelizado por una variable aleatoria binomial, para la comparación posterior de su distribución de probabilidades con la distribución de frecuencias relativas de su variable estadística asociada. Se aplica la ley de los grandes números como una manera de argumentar los resultados de los datos obtenidos al relacionar la estadística y la probabilidad. El acercamiento empírico se produce por la simulación de los datos con el software GeoGebra (https://www.geogebra.org/).

El objetivo de este trabajo es presentar una propuesta de mejora del proceso de instrucción mencionado, para estudiantes que cursan Estadística en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. Se aplica el marco teórico y metodológico del Enfoque Ontológico Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, (Godino, Contreras y Font, 2006) y se realiza la propuesta de mejora a partir del análisis de la idoneidad didáctica de este proceso instruccional en la dimensión epistémica (Godino, 2011). La evaluación de los descriptores junto a la información obtenida de los significados personales de los estudiantes, proporcionan elementos necesarios para la superación de los conflictos semióticos detectados y para el favorecimiento de las relaciones entre los conceptos involucrados, considerados en la nueva propuesta

Descriptores de la idoneidad epistémica en términos de la nueva propuesta

Los descriptores de la idoneidad epistémica están agrupados según los objetos matemáticos primarios del Enfoque Ontológico Semiótico (EOS) (las situaciones problemas, el lenguaje, las definiciones, proposiciones los procedimientos y los argumentos) y están adaptados a la nueva propuesta:

Las situaciones problemas: 1) La muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación debe incluir mayor cantidad de experimentos aleatorios con sus espacios muestrales correspondientes. 2) La variable aleatoria debe surgir naturalmente de la correspondencia entre los resultados del experimento y el número que se le asigna a cada resultado. Se pretende que el estudiante relacione los resultados del experimento aleatorio con los valores posibles que toma la variable aleatoria al considerar toda la población, y los valores que toma su variable estadística asociada al considerar los resultados de una sola muestra. *El lenguaje*: 3) El uso de diferentes modos de expresión matemática, sea verbal, gráfica, simbólica, y las traducciones y conversiones entre los mismos, debe incluir las distribuciones de frecuencias presentadas para distintos tamaños de muestras. Es conveniente que, para evitar confusiones en la construcción de estas distribuciones, las bases de datos utilizadas sean generadas por los mismos estudiantes, y si las proporciona el profesor, que sean los estudiantes quienes encuentren resultados y resuman la información. 4) Se pretende lograr la comprensión del significado de los elementos que componen estas distribuciones de frecuencias con los tamaños de muestras respectivos, para su comparación posterior con la distribución de probabilidades correspondientes. *Las reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos):* En el proceso de instrucción implementado, no han sido especificadas completamente las reglas, por lo que se propone agregar situaciones donde los estudiantes generen o

negocien definiciones, proposiciones o procedimientos. Entre ellos: 5) el manejo del GeoGebra para la simulación de experimentos aleatorios y la recopilación de información. 6) los conceptos de frecuencia relativa y probabilidad, 7) la aplicación de la ley de los grandes números, 8) el reconocimiento de los sucesos mutuamente excluyentes, de los sucesos independientes y el cálculo de las probabilidades respectivas en cada caso, 9) la construcción de las tablas de frecuencias y de frecuencias relativas en forma manual y con un software como el GeoGebra, por ejemplo. 10) Diferenciar el número de veces que se produce el experimento aleatorio de los tamaños de muestras elegidos y de los valores que toma la variable. Para los otros objetos matemáticos, referidos a *los argumentos* y a *las relaciones* entre problemas, definiciones, y proposiciones, se propone relacionarlos y conectarlos al vincular la teoría de probabilidades con el análisis de datos.

En consecuencia, para lograr una mejora en *la idoneidad epistémica* del proceso de instrucción implementado, el objetivo es ampliar el número de situaciones problema de la ingeniería donde los estudiantes de estas carreras tengan más situaciones de argumentación, de comprobación y de justificación, en una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. (Por razones de espacio, se plantean 2 situaciones). Se incluyen experimentos aleatorios con sus espacios muestrales correspondientes, donde deben identificar las variables de Bernoulli y binomial en cada caso. Para la comprobación de resultados, el acercamiento empírico se produce por la simulación de los datos con GeoGebra al comparar las distribuciones de frecuencias relativas y de probabilidad y los estadísticos con sus parámetros respectivos. La justificación teórica es proporcionada por la demostración de la ley de los grandes números, a partir de la desigualdad de Tchebycheff.

Esquema de la propuesta didáctica

Luego de aplicar los descriptores de la idoneidad epistémica al proceso de instrucción implementado, se presenta la nueva estructura que esta propuesta didáctica plantea. Parte de un problema de la ingeniería que se resuelve de dos maneras: una, aplicando el análisis de datos, a través de una enseñanza de la estadística con proyectos, y la otra, aplicando la teoría de probabilidades. Se establece un paralelismo entre estos dos contextos con actividades que las relaciona, como se muestra en el Gráfico 1 y como se ejemplifica en las dos situaciones problemas que se describen a continuación.

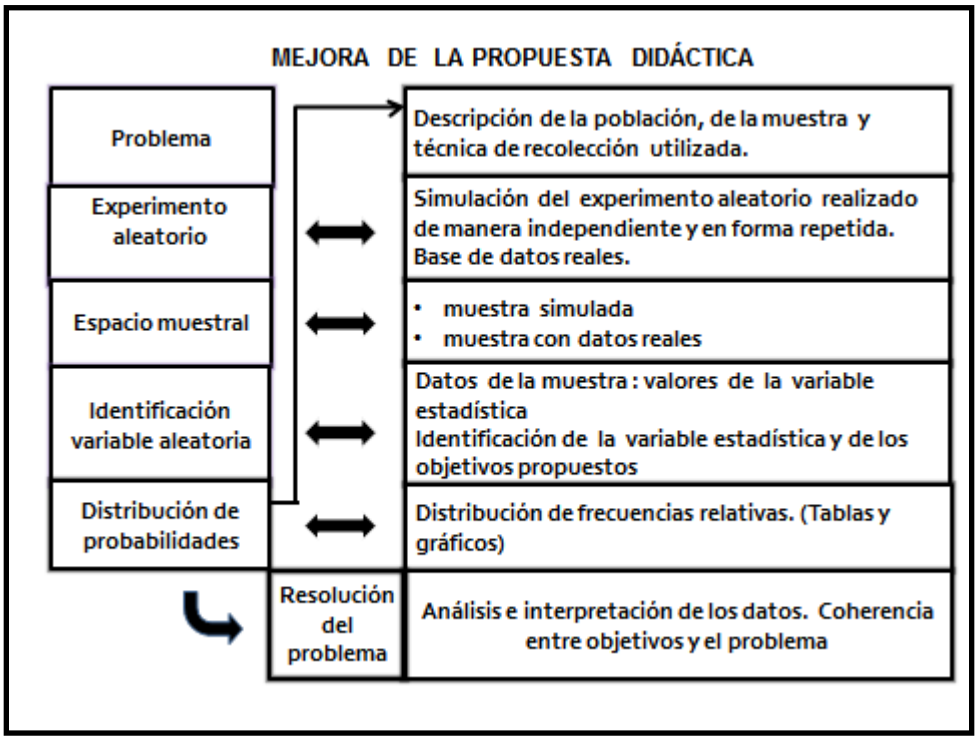


Gráfico 1. Estructura de la propuesta didáctica mejorada.

Situación problema1

a. Observa la tabla siguiente que representa la hoja de registro de artículos defectuosos para una embotelladora X. Define y clasifica las variables intervinientes.

Tabla 1. *Hoja de registro de artículos defectuosos para una embotelladora*

Fecha de inspección: Fecha de fabricación: Nombre del inspector:	Número de lote:30 Número de artículos inspeccionados:1000 Observaciones: muchos envases sucios	
Tipo de defecto	Frecuencia	Subtotal
Nivel fuera de especificaciones. Envases sucios Botellas sin tapas. Envases vacíos. Envases rotos Acabado defectuoso.	IIIII IIII IIIII I IIIII III IIIII II IIIII IIIII IIIII III IIIII IIIII	9 6 8 7 18 10
	Total	58
Total de rechazado		43

a) ¿Cuál es el experimento aleatorio del que surgen estas variables?
b) El resumen de la hoja de registro indica que se inspeccionaron 1000 envases y hubo 43 rechazados. Considera esta información como la de una población. Simular con GeoGebra esta población real dada por un lote de N = 1000 envases con un 4,3% de defectuosos. Para ello:

c) Utilizar el comando =BinomialAleatorio[n,p] de GeoGebra considerando los parámetros n = 1 y p = 0,043. Esta elección simula efectuar *una* inspección (n = 1) que tiene dos resultados posibles. Estos dos resultados dan lugar a una variable, llamada variable de Bernoulli. Si el envase es defectuoso, la variable toma el valor 1, con probabilidad de defectuoso p = 0,043 y si el envase no tiene defectos, la variable toma el valor 0, con probabilidad 1- p = 0,057.

d) Para aumentar el número de inspecciones a 1000, arrastrar el mouse en la planilla de cálculo, desde la casilla B1 a B1000. Se genera una población de unos y ceros de tamaño 1000. Luego listar la población de A1 a A1000. Cada inspección o prueba puede pensarse como un experimento aleatorio repetido e independiente, que dio como resultado un uno o un cero. La suma de variables de Bernoulli define otra variable: "la variable binomial" de parámetros n = 1000 y p = 0,043. (De ahí el nombre del comando de GeoGebra).
e) Seleccionar la población y crear una lista. Nombrarla "Población"

f) Construir la tabla de frecuencias relativas seleccionando el comando TablaFrecuencias[<Lista de datos brutos>, <Factor de escala (opcional)>]. En "lista de datos brutos", se escribe el nombre de la lista creada: Población y en el factor de escala opcional, se escribe 1/1000 porque 1000 es el tamaño de la población, y el factor de escala indica que la tabla es de frecuencias relativas. Si se considera como factor el número 1, la tabla que devuelve el programa es la de frecuencias absolutas.

g) Construir la gráfica de la distribución de frecuencias seleccionando el comando Barras[<Lista de datos brutos>, <Ancho de barras>, <Factor de escala vertical (opcional)>] .Como es una variable discreta, el gráfico correspondiente es el de bastones, por lo que el ancho de barras debe ser cero.

h) Calcular los parámetros poblacionales seleccionando los comandos: Media[<Lista de datos brutos>] ; Mediana[<Lista de datos brutos>]; Moda[<Lista de números>] ; Varianza[<Lista de datos brutos>] y analizar simetría y variabilidad de la población.

i) Seleccionar muestras aleatorias con reposición, de tamaño n = 10, 20, 30, 50 y 80 de la población binomial. Para ello utilizar el comando =Elemento[Población,AleatorioEntre[1,1000]]

j) Tabular y representar gráficamente para cada tamaño de muestra, la variable estadística número de envases defectuosos. Trabajar con frecuencias absolutas y relativas.

k) Calcular las estimaciones de los parámetros de las muestras anteriores y analizar simetría y variabilidad en cada muestra. ¿Encuentras buenas aproximaciones de cada estimación con su parámetro poblacional respectivo? De ser así. ¿En qué casos?

l) Obtener la distribución de probabilidades de la variable aleatoria binomial "número de envases rechazados" de esta población de tamaño N =1000 y proporción de envases rechazados P= 0,043.

Para ello, selecciona la planilla de cálculo de GeoGebra, abre la ventana de cálculos de probabilidad y elige la distribución binomial con esos parámetros.

m) Comparar los valores que toma la distribución de probabilidades de esta variable aleatoria con la distribución de frecuencias relativas de su variable estadística asociada, para los distintos tamaños de muestras obtenidas en h). ¿En qué casos hay mejores aproximaciones?

n) Verificar la desigualdad de Tchevycheff con las variables "número de envases rechazados" de esta población de tamaño N = 1000 y "proporción de envases rechazados" para p = 0,043.

o) Demostrar el teorema de Bernoulli, la ley de los grandes números, para un suceso A. ¿A partir de qué valor de n la frecuencia relativa de un suceso converge probabilísticamente a la probabilidad de dicho suceso?

p) ¿Cuál debiera ser el número de experimentos que debemos realizar para que la frecuencia relativa de un suceso sea una buena estimación de la probabilidad de ese suceso?

q) ¿Cuál debiera ser el número de experimentos que debemos realizar para que la frecuencia relativa de un suceso sea una buena estimación de la probabilidad de ese suceso?

Situación problema 2

En cualquier sistema de comunicaciones, la señal que se recibe difiere de la señal transmitida debido a dificultades sufridas en la transmisión. En las señales analógicas, estas dificultades pueden degradar la calidad de la señal. En las señales digitales, se generarán bits erróneos: un 1 binario se transformará en un 0 y viceversa.

Sabiendo que la probabilidad de generar un bit erróneo es 0,4 y que sobre un canal telefónico se transmiten datos binarios.

a) ¿Cuál es el experimento aleatorio?
b) ¿Cuáles son los valores que toma la variable asociada al experimento aleatorio si se efectúa: 1) una sola transmisión? 2) cinco transmisiones?
c) Escribe el espacio muestral asociado al experimento aleatorio de transmitir cinco señales y observar el número de señales erróneas que se pueden registrar.
d) Utilizar el comando =BinomialAleatorio[n,p] de GeoGebra para simular una transmisión (n=1) con probabilidad p= 0,4 de generar un bit erróneo. Arrastrar el mouse en la planilla de cálculo, desde la casilla B1 hasta B100. De esta manera se genera una población binomial (de unos y ceros) de 100 transmisiones repetidas e independientes. Seleccionar la población y crear una lista. Nombrarla "Población". Para listar la población de A1 a A100, escribir el número de orden.
e) Construir las tablas de frecuencias absolutas y relativas con el comando TablaFrecuencias[<Lista de datos brutos>, <Factor de escala (opcional)>]. En "lista de datos brutos", se escribe el nombre de la lista creada: "Población" y en el factor de escala opcional, se escribe 1/100 si 100 es el tamaño de la población. En este la tabla es de frecuencias relativas. Si se considera 1 como factor de escala, la tabla que devuelve el programa es la de frecuencias absolutas.

f) Construir la gráfica de la distribución de frecuencias seleccionando el comando Barras[<Lista de datos brutos>, <Ancho de barras>, <Factor de escala vertical (opcional)>] Como es una variable discreta, el gráfico correspondiente es el de bastones, por lo que el ancho de barras debe ser cero.
g) Calcular los parámetros poblacionales seleccionando los comandos: Media[<Lista de datos brutos>] ; Mediana[<Lista de datos brutos>]; Moda[<Lista de números>];Varianza[<Lista de datos brutos>] y analizar simetría y variabilidad de la población.
h) Seleccionar muestras aleatorias con reposición, de tamaño n = 10, 20, 30, 50 y 80 de la población binomial. Para ello utilizar el comando =Elemento[Población,AleatorioEntre[1,100]]
i) Tabular y representar gráficamente para cada tamaño de muestra, las dos variables estadísticas: el número y la proporción de señales erróneas para estas muestras. Trabajar con frecuencias absolutas y relativas.
j) Calcular las estimaciones de los parámetros de las muestras anteriores y analizar simetría y variabilidad en cada muestra. ¿Encuentras buenas aproximaciones de cada estimación con su parámetro poblacional respectivo? De ser así. ¿En qué casos?
k) Construye la distribución de probabilidades de las variables aleatorias asociadas a las variables estadísticas respectivas para los distintos tamaños de muestras. Verifica los resultados con GeoGebra.
l) ¿Cuál es el número de señales erróneas más probable de transmitirse?
m) Compara las distribuciones probabilísticas con las distribuciones de frecuencias relativas. ¿En qué casos hay mejores aproximaciones? Extrae conclusiones relativas a:
n) Los valores que puede tomar una variable aleatoria y su variable estadística asociada.
o) Las frecuencias relativas de la variable estadística con las probabilidades respectivas de su variable aleatoria asociada. ¿Qué papel juega el tamaño de la muestra?
p) La relación entre una variable estadística y su variable aleatoria asociada.

Reflexiones Finales

Entre las ventajas más importantes que surgen de esta propuesta didáctica sobre la vinculación de una variable estadística con su variable aleatoria asociada, se encuentra la contextualización de los datos y la aplicación de contenidos difíciles de abordar, en cuanto a su complejidad, como son los de Inferencia Estadística. Entre esos contenidos se encuentran los de población y muestra, estimador y estimación; estimación y parámetro. En esta vinculación, se trabaja en forma paralela con una población y con las muestras aleatorias extraídas de ella, creando el espacio adecuado para integrar estos conceptos. Se logra una ampliación de los significados involucrados al incorporar prácticas matemáticas relativas al análisis de datos y a la teoría de probabilidades en un ambiente computacional. Este abordaje de contenidos conduce a las distribuciones muestrales – tema central dentro de la inferencia estadística- de una manera natural, adaptando los procesos de enseñanza y aprendizaje comenzando por las prácticas matemáticas utilizadas y descriptas en este trabajo.

Referencias bibliográficas

Figueroa, S. y Aznar, M. (2017). *Significados personales sobre la vinculación entre una variable estadística y su variable binomial asociada en el contexto de un problema*. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del 2do Congreso International Virtual sobre el

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Actas del XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Disponible en http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2679/1140

Ruiz, B; Batanero, C. y Arteaga, P. (2011) *Vinculación de la Variable Aleatoria y Estadística en la Realización de Inferencias Informales por parte de Futuros Profesores* Boletim de Educação Matemática. 24 (39), 431-449.

ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE TAREAS PARA FAVORECER CONVERSIONES DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS A SIMBÓLICAS

María Andrea Aznar, María Laura Distéfano, Emilce Moler
Universidad Nacional de Mar del Plata. (Argentina)
maznar@fi.mdp.edu.ar, mldistefano@fi.mdp.edu.ar, egmoler@yahoo.com.ar

Resumen

En esta comunicación se presenta un análisis Ontosemiótico de actividades propuestas para favorecer la conversión de representaciones semióticas de curvas y regiones del plano complejo desde el registro gráfico hacia el registro algebraico. El contexto institucional corresponde a una asignatura de álgebra inicial de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. Las herramientas teóricas utilizadas provienen de la Teoría de Registros Semióticos y del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Se analiza la configuración de objetos matemáticos en la resolución de las actividades propuestas que permite describir los conocimientos implicados en estas transformaciones.

Palabras clave: números complejos, representaciones semióticas, conversiones, análisis ontosemiótico

Abstract

This paper presents an onto-semiotic analysis of proposed activities to improve the conversion of semiotic representations of curves and regions of the complex plane from the graphic register to the algebraic register. The institutional context corresponds to an initial algebra subject of engineering degree courses at the National University of Mar del Plata, Argentina. The theoretical tools used come from the Semiotic Registers Theory and the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. Configurations of mathematical objects in the resolution of the proposed activities are analyzed, which allows describing the knowledge involved in these transformations.

Key Words: complex numbers, semiotic representations, conversions, ontosemiotic analysis

Introducción

El rol de los distintos sistemas de representación de objetos matemáticos es central en el quehacer matemático. Esta es una de las razones por las que la semiótica ha adquirido notable interés en el campo de la educación matemática (Radford, 2006).

Considerando las múltiples formas de representar un mismo objeto matemático, Duval (2004, 2006) señala que toda representación semiótica es parcialmente cognitiva respecto de lo que representa y destaca que,

para que los estudiantes logren la conceptualización, es necesario que distingan al objeto matemático de su representación. Por ello afirma que la comprensión de un objeto matemático requiere del estudiante la capacidad de coordinar representaciones del mismo en distintos registros de representación.

Por otra parte, coordinar diversas representaciones de un objeto matemático es relevante para la tarea de resolución de problemas pues permite al resolutor poder seleccionar la representación que más lo acerque a la resolución. Este tipo de tareas requiere de la habilidad de visualizar, es decir, interpretar, usar y reflexionar sobre figuras, imágenes o diagramas, para comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión (Arcavi, 2003).

En el contexto de la asignatura inicial de álgebra de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, dos de los registros de representación semiótica usados corresponden al registro del lenguaje algebraico y al registro gráfico. Las coordinaciones mencionadas por Duval (2004), involucran la habilidad de transformar representaciones de un objeto, efectuadas en el registro algebraico, a sus correspondientes gráficas, y transformaciones en el sentido inverso, es decir que, partiendo de la representación gráfica se puedan obtener ecuaciones o inecuaciones que la caracterice en el lenguaje algebraico. Entre los contenidos temáticos de la asignatura mencionada figura la unidad de Números Complejos, la cual tiene gran relevancia conceptual y multiplicidad de aplicaciones. En el desarrollo de dicha unidad se trabaja con representaciones de curvas y regiones en el plano complejo. Las mismas corresponden a subconjuntos de números complejos representados en el registro algebraico mediante condiciones sobre alguno de sus elementos característicos: parte real, parte imaginaria, módulo y/o argumento. Dado que las transformaciones de las representaciones de esas curvas y regiones –desde el registro gráfico hacia el algebraico– no resultan espontáneas y presentan dificultades para los estudiantes, se diseñaron actividades con el propósito de favorecer en los estudiantes la habilidad de efectuarlas.

En este trabajo se presenta un análisis de las prácticas matemáticas involucradas en algunas de las actividades diseñadas, utilizando herramientas de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004) y del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font (2009). El análisis combinado, utilizado ambos marcos teóricos, ya ha sido planteado y estudiado por Pino-Fan, Guzmán, Duval, y Font, (2015), quienes sostienen que, mientras que desde la TRRS la actividad cognitiva de los sujetos se analiza sin realizar valoraciones desde un punto de vista matemático, con herramientas del EOS se pueden analizar los objetos matemáticos que intervienen en los procesos de tratamiento y conversión. Un objetivo similar es desarrollado por Godino, Wihelmi, Blanco, Contreras, y Giacomone (2016).

Las tareas propuestas apuntan a desarrollar prácticas matemáticas necesarias para lograr la conversión de representaciones semióticas desde el registro gráfico al registro algebraico. En particular en esta comunicación se analizan dos actividades:

- La primera está focalizada en construir parcialmente expresiones, en el registro algebraico, que expresen relaciones o características de elementos de números complejos representados en el registro gráfico.
- La segunda pretende favorecer la identificación de la unidad significante que caracteriza a conjuntos de infinitos números complejos representados en el registro gráfico (unidad significante) para su posterior expresión, representada como una ecuación o inecuación en el registro algebraico.

- El análisis de estas tareas, cuyos objetivos están planteados desde la perspectiva de la TRRS, se realiza a través de la configuración epistémica propuesta por el EOS, que caracteriza y vincula los objetos primarios involucrados.

La configuración hace visible la multiplicidad de objetos matemáticos requeridos para esa tarea, revelando y explicando la complejidad de las prácticas matemáticas requeridas para poder efectuar este tipo de conversiones.

Marco Teórico

Duval (2004,2006) desarrolla su Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) poniendo en foco el hecho de que los objetos de conocimiento matemático sólo son accesibles a través de sus variados "contextos de representación". Al respecto señala que es necesario que un estudiante reconozca al mismo objeto matemático en distintos contextos de representación. Argumenta que no hay *Noesis* (conjunto de actos cognitivos tales como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia) sin *Semiosis* (aprehensión o producción de una representación semiótica). Duval (2004) distingue tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis reagrupadas e integradas en lo que se llaman tareas de comprensión y producción: la *formación* de representaciones en un registro semiótico particular (para expresar una representación mental o evocar un objeto real), el *tratamiento* (la transformación de una representación semiótica en otra dentro del mismo registro) y la *conversión* (la transformación de una representación semiótica en otra en un registro diferente). Existen reglas de funcionamiento que son propias a cada una de estas actividades y que dependen de los sistemas semióticos involucrados; sin embargo se señala a las conversiones como de mayor dificultad porque no pueden reducirse a codificaciones pues, en general, no tienen reglas de transformación como existen para los tratamientos. Ciertas conversiones en particular, como es el caso de las que parten del registro gráfico y arriban en el registro algebraico, presentan mayores obstáculos porque se produce un fenómeno de *no congruencia* entre representaciones: la conversión no resulta transparente pues no pueden ponerse en correspondencia unívoca los elementos que las constituyen, a los que denomina *unidades significantes*. Es en la identificación de unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada, donde reside la dificultad. Duval (2006) propone, como una de las posibles alternativas para fomentar el reconocimiento de las unidades significantes, tareas que denomina de *variaciones comparativas*, donde la variable independiente sea la variación del contenido visual del registro inicial con estas características: 1) de un gráfico a otro sólo se cambia una variable visual a la vez y no dos o tres; 2) la conversión no se realiza sobre una presentación aislada de los casos particulares y 3) la conversión se transforma en un método para analizar lo que es matemáticamente significativo en el contenido de la representación dada.

El *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* o EOS es una propuesta teórico-metodológica dentro de la Didáctica de la Matemática desarrollada por Juan Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font (2009). Se concibe a la Matemática en su triple aspecto como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. Se plantea como *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino et al., 2009, p.4). Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones – problemas, lenguajes,

conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la denominada *configuración* de objetos primarios (Godino et al, 2009): *elementos lingüísticos*, *situaciones-problemas, conceptos-definición*, p*roposiciones*, p*rocedimientos y argumentos*.

Siguiendo lo anterior se contempla como *significado* de un objeto matemático al sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas (Godino et al., 2009). En el contexto de una clase, para un determinado objeto matemático se considera el *significado personal* que cada alumno le asigna a dicho objeto para diferenciarlo del significado fijado por el profesor, por el libro de texto o en un currículo, como expresiones del *significado institucional* del mencionado objeto. En ese sentido, en una trayectoria de enseñanza-aprendizaje se produce un acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales y el aprendizaje se traduce en la apropiación, por parte del estudiante, de los significados institucionales (Godino et al., 2009).

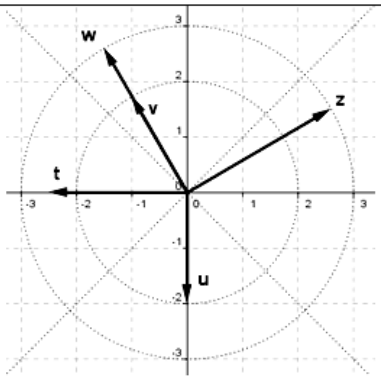
Análisis de actividades propuestas para favorecer este tipo de conversiones

Las conversiones de representaciones de curvas o regiones del plano complejo, desde el registro gráfico al algebraico, fueron analizadas en términos de la TRS (Aznar, Distéfano, Figueroa y Moler, 2010). En dicho análisis se distinguió que, para efectuar este tipo de conversiones, se requiere de dos acciones: el *reconocimiento de la unidad significante*, esto es identificar cual es el rasgo visual que caracteriza al conjunto y qué valor o valores toma, y *la representación en el registro algebraico* de la relación entre unidad significante y valores, de acuerdo con las reglas de formación de representaciones en dicho registro. Al diseñar una secuencia de actividades para favorecer en los estudiantes el desarrollo de la habilidad de realizar este tipo de conversiones se tuvo en cuenta esta distinción.

A continuación se presentará y analizará la Actividad II de dicha secuencia que puede observarse en la Figura 1. La misma aborda la tarea de *representación en el registro algebraico* de la relación entre unidad significante y valores. Requiere del estudiante construir *parcialmente* expresiones, en el registro algebraico, que expresen relaciones o características de elementos de números complejos representados en el registro gráfico. Las conversiones demandadas para las componentes que figuran en cada ítem son congruentes y parten del registro algebraico hacia el gráfico. Es la relación entre dichas componentes la que el estudiante debe leer visualmente en el registro gráfico y luego representar en el registro algebraico.

La aparente simplicidad de la tarea descripta es objetada a partir de un análisis realizado desde el EOS en el que pueden distinguirse multiplicidad de objetos matemáticos interrelacionados en una configuración.

Actividad II) De acuerdo al gráfico, completa con >, < o = según corresponda:



Respuesta
a) Arg(z).....Arg(w)
b) Re(v) .....Re(w)
c) Arg(z)..... $\frac{1}{4}\pi$
d) Im(z) .....Im(w)
e) Arg(w)..... $\frac{1}{2}\pi$
f) | z |..... | w |
g) Arg(z).....Arg(-3)
h) | t | 2
i) Arg(v) .....Arg(w)

Figura 1: Enunciado de la Actividad II con sus incisos

Si se considera, por ejemplo, el inciso b), se pueden señalar los objetos primarios detallados a continuación:

Situación problema: la planteada en el enunciado.

Lenguaje: coloquial, simbólico algebraico (Re(v), Re(w), > , <, =), gráfico.

Definiciones:

- Representación de un número complejo z, como su afijo o como el vector con origen en (0; 0) y extremo en su afijo.
- Parte real del número complejo z: proyección sobre el eje real del afijo de z.

Proposición: Si la proyección del afijo de un número complejo z sobre el eje real está ubicada sobre un valor ***a*** del eje, entonces la parte real de z es igual a ***a***; si dicha proyección está a la derecha (izquierda) de un valor dado ***a*** del eje real entonces la parte real de z es mayor (menor) que ***a***.

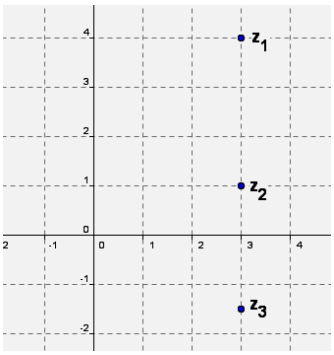
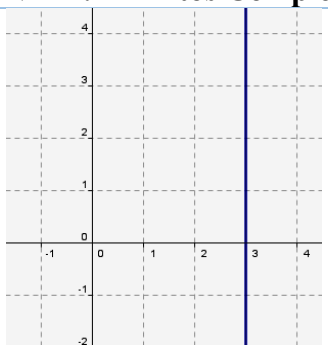
Procedimientos:

- Identificar, en la representación gráfica, los dos elementos planteados en el ítem: dos componentes de números complejos representadas en lenguaje algebraico (Re(z), Re(w)).
- Identificar, en la representación gráfica, la relación entre los dos elementos aplicando proposiciones.
- Representar semióticamente la relación completando la representación en el lenguaje algebraico de la ecuación o inecuación con el símbolo correspondiente.

Argumentaciones: Si bien en la actividad propuesta no se solicita al estudiante argumentaciones explícitas, las validaciones están determinadas por las definiciones y proposiciones enunciadas.

Seguidamente se presenta y analiza la Actividad III de la secuencia. El enunciado y uno de sus ítems se exponen en la Figura 2. La actividad fue propuesta para favorecer *el reconocimiento de las unidades significantes*. Para resolverla el estudiante debe lograr la inducción de una condición que caracteriza a conjuntos de infinitos números complejos representados en el registro gráfico en la columna de la derecha a partir de la identificación de elementos particulares en la columna de la izquierda. Posteriormente debe expresar, en el registro algebraico, dicha condición como una relación. Desde el punto de vista de la TRRS, el gráfico de la izquierda representa un caso simple de tareas de variaciones comparativas. En el caso del inciso que se observa en la figura el único contenido visual que cambia es el de la proyección sobre el eje imaginario.

Actividad III) En la columna 1 se representan algunos complejos que comparten alguna característica (puede ser sobre su parte real, su parte imaginaria, su módulo y/o su argumento principal). En la columna 2, se representan infinitos complejos z que poseen esa misma característica. Escribir, en cada inciso, la expresión que los determina de acuerdo con la característica común.

COLUMNA I: Algunos Complejos	**COLUMNA II: Infinitos Complejos**
	

a) ----------

Figura 2: Enunciado de la Actividad III de la secuencia con uno de sus incisos

Analizada con herramientas del EOS se distinguen, en la práctica de resolución del inciso a), los siguientes elementos:

Situación problema: la planteada en el enunciado.

Lenguaje: coloquial, gráfico.

Definiciones:

- Parte real (imaginaria) del número complejo z: proyección sobre el eje real (imaginario) del afijo de z.

Proposiciones:

- Un número complejo *pertenece* al conjunto representado en una curva/región graficada si su afijo está ubicado sobre la misma.
- Si la proyección del afijo de un número complejo z sobre el eje real está ubicada sobre un valor ***a*** del eje, entonces la parte real de z es igual a ***a***; si dicha proyección está a la derecha (izquierda) de un valor dado ***a*** del eje real entonces la parte real de z es mayor (menor) que ***a***.

Procedimientos:

- Identificación de los afijos graficados a la izquierda como elementos del conjunto de la derecha.
- Identificación de componentes invariantes en los elementos del conjunto.
- Identificación de la relación que cumplen dichas componentes.
- Representación de la relación que caracteriza al conjunto mediante una ecuación, inecuación o un sistema de ellas en el que figure la representación simbólica identificada.

Argumentaciones: Si bien en la actividad propuesta no se solicita al estudiante argumentaciones explícitas, las validaciones para efectuar los procedimientos están determinadas por las definiciones y proposiciones enunciadas.

Reflexiones finales

La necesidad de favorecer en los estudiantes la habilidad de representar, en el registro algebraico, curvas o regiones del plano complejo representadas en el registro gráfico, impulsó el diseño de actividades con dichas conversiones como objetivo pedagógico.

Desde la TRRS se planteó que, para el logro de estas conversiones se requiere de dos acciones: el reconocimiento de la unidad/es significante/s que caracteriza a la curva o región y su escritura en el registro algebraico.

En este trabajo se expusieron dos tareas que apuntan a trabajar dichas actuaciones. Sin embargo, las configuraciones presentadas por el EOS hacen visibles la multiplicidad de objetos matemáticos requeridos para tareas de apariencia sencilla, revelando y explicando su complejidad.

Se observa la necesidad del uso de ciertas definiciones de naturaleza geométrica que no siempre son explicitadas.

Estas definiciones "geométricas" verifican lo enunciado por Duval en relación con que cada representación es *parcialmente cognitiva* respecto del objeto que representa y avala la importancia de presentar al alumno tareas de coordinación de representaciones para propiciar la *comprensión.*

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Instituto de educación y pedagogía de la Universidad del Valle.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación en *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009) Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 91-110.

Pino-Fan, R., Guzmán, I., Duval, R. y Font, V. (2015). The Theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. En K. Beswick, T. Muir y J. Wells. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Hobart, Australia: PME Group.

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(Especial), 7-21.

ANÁLISIS DE LAS EXPLICACIONES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS SOBRE EL FUNCIONAMIENTO DE JUEGOS DE AZAR EN PROBABILIDAD

Beatriz Adriana Rodríguez González, Isaias Miranda Viramontes
Universidad Politécnica de Zacatecas. (México), Instituto Politécnico Nacional. (México)
betyrogo9@hotmail.com, imirandav@ipn.mx

Resumen

El objetivo de este artículo es analizar el uso que hacen estudiantes universitarios de conceptos de probabilidad en explicaciones sobre el funcionamiento de juegos de azar que involucran riesgo. Como parte de la estrategia de enseñanza que los profesores de estos estudiantes consensuaron entre ambos, al inicio del curso, estos juegos debían ser diseñados por medio de, o bien la elaboración de problemas vistos en clase, o bien la variación de juegos de azar ya conocidos. En este sentido, los juegos de azar pueden considerarse como un ejemplo de la metodología conocida como creación de problemas (*problem posing*). Así, el análisis de las explicaciones se hizo con base en el uso explícito de los conceptos involucrados en las explicaciones de los juegos, así como en el significado que para los estudiantes ha tenido la experiencia de elaborar o modificar problemas. Los resultados indican que los estudiantes lograron comprender el significado del concepto de probabilidad.

Palabras clave: probabilidad, explicación, juego de azar, creación de problemas

Abstract

The aim of this report is to analyze how university students' use the concept of probability in their explanations on the organization of the games of chance that involve risk. As part of the teaching strategy, which both, teachers and students agreed on at the beginning of the course, these games had to be designed based on the exercises previously seen in class or on the modification of already known games of chance. In this sense, such games can be considered as an example of the well-known methodology called problem posing. Thus, the analysis of the students' explanations was based on the explicit use of concepts involved in the explanation of the games, as well as the meaning that the experience of elaborating and modifying problems has had for the students. The results show that the students could understand the meaning of the concept of probability.

Key words: probability, explanation, gaming, problem posing

Introducción

Un importante número de estudios establece que la gran mayoría de los estudiantes de nivel universitario no entienden el concepto de probabilidad de un curso introductorio de estadística. (Garfield et al., 2000). Incluso, por considerarlo poco atractivo para los estudiantes, durante algunos años se creyó necesario eliminar este concepto de los planes de estudio de la formación universitaria (Tovar, Castillo y Marín,

2007; Díaz y Hernández, 2002). Los motivos de esta decisión se basaron en el hecho de que se aseguraba que, para algunos estudiantes, el curso de probabilidad es un curso aburrido que se limita al aprendizaje de procedimientos mecánicos y conceptos estadísticos descontextualizados. Para la educación universitaria, Díaz y Hernández (2002) muestran que los contenidos estadísticos no se enseñan con una adecuada profundidad y que la enseñanza de la estadística descuida el trabajo con datos reales y el ejercicio del razonamiento lógico. Aunado a esta problemática, Batanero (2001) ha encontrado que la formación específica de los profesores en este ámbito es prácticamente inexistente. Afortunadamente, pese a todas estas disyuntivas, la mayoría de las carreras incluyen temas de probabilidad en sus currículos (Friz, Sanhueza y Figueroa, 2011). En este contexto, según Friz, Sanhueza y Figueroa (2011), el trabajo actual y futuro de la estadística debiera centrar su atención en definir aprendizajes fundamentales para los diferentes niveles educativos y en las competencias que debe incluir el profesor para su enseñanza. En años recientes se nota una tendencia a renovar la enseñanza de la probabilidad y estadística al volverla más experimental con la intención de que pueda proporcionar a los estudiantes una experiencia estocástica desde su infancia (Batanero, 2005). Para los investigadores en la enseñanza de la probabilidad, es un reto hacer propuestas eficientes que ayuden a mejorar el aprendizaje de conceptos como el azar y la aleatoriedad (Jones, Langrall y Money, 2007), ya que a pesar de los esfuerzos didácticos de esta disciplina, prevalecen las dificultades que tienen los estudiantes para comprender su significado (Delmas, Garfield y Ann, 2003).

Un concepto que tiene un significado importante en la investigación sobre tópicos de probabilidad es el de probabilidad condicionada (Penalva, Posadas y Roig; 2010). Éste puede estudiarse mediante la utilización correcta de herramientas como tablas de contingencias o por medio del teorema de Bayes. En la investigación de Díaz y Batanero (2005) se muestra que las dificultades mostradas por estudiantes de bachillerato en relación con la comprensión de este concepto persisten aun después de la instrucción docente.

Con base en la idea metodológica denominada *creación de problemas* (problem posing), en la presente investigación se analiza el aprendizaje de los principales conceptos de probabilidad, en estudiantes universitarios, en un contexto de creación de juegos de azar que involucren riesgo. La característica de estos juegos es que, en su elaboración, estén involucradas reglas de probabilidad. Así, la creatividad del estudiante tiene un papel primordial dentro del desarrollo de su nuevo juego. En específico, con la creación de estos juegos, se pretende contribuir a resolver la problemática de aprendizaje relacionada con el razonamiento de conceptos que involucran azar y aleatoriedad.

Marco Conceptual: Creación de problemas

La noción de creación de problemas o “problem posing” ha sido explorada por algunos investigadores a partir del uso de diferentes perspectivas. Se ha encontrado que esta forma de enseñar matemáticas ayuda a la generación de nuevas formulaciones de un problema ya conocido, motiva la generación de nuevos problemas, hace que los estudiantes construyan una interpretación personal con base en una situación concreta y formulen un significado para los problemas en matemáticas (Duncker, 1945; Mamona-Downs, 1993; Malaspina, 2013a; Stoyanova y Ellerton, 1996).

Al respecto, Malaspina (2013b) propone que la creación de un problema en matemáticas se puede dar a través de la variación o de la elaboración. Este autor define la variación como el proceso para construir un problema nuevo al modificar la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático. Por otra parte, la elaboración es el proceso mediante el cual se construye un problema cuyo contexto contiene información que se obtiene por la selección o modificación de la información percibida en la situación original del problema, y que es factible de resolver mediante relaciones lógicas, dentro de un determinado entorno matemático. De esta forma, todo problema matemático, según Malaspina, tiene cuatro elementos fundamentales: Información, requerimiento, contexto y entorno matemático.

Para Malaspina (2013b) la creación y planteamiento de nuevos problemas modifica el aprendizaje de un concepto en particular. Este autor afirma que la creación de problemas por parte de los estudiantes contribuye a motivar el estudio, desarrolla la creatividad, fortalece las capacidades tanto para resolver problemas como para formular preguntas.

Metodología

Dos grupos de estudiantes universitarios, de la licenciatura en negocios internacionales, participaron en este estudio. Los profesores de ambos grupos impartían el mismo curso: Probabilidad y Estadística; ambos tenían 10 años de experiencia y se reunían de manera informal para compartir estrategias que beneficiaran el aprendizaje de sus estudiantes. La propuesta de solicitar a los estudiantes la elaboración de los juegos de azar fue, de hecho, el resultado de una de esas reuniones. Los profesores acordaron en evaluar el aprendizaje de los conceptos de la Unidad III de su curso por medio de solicitarles a sus respectivos grupos la elaboración de juegos de azar que implicaban riesgo. Los grupos fueron divididos en equipos de 4 a 5 integrantes. En este artículo se describen y muestran las propuestas de 3 de los 12 juegos presentados. Los juegos podían ser, o bien la variación de algún problema visto en clase, o bien la elaboración de un juego a partir de ejemplos que no necesariamente tienen que ver con juegos de azar. Los conceptos involucrados en cada juego debían ser los siguientes conceptos, mostrados en el libro de texto de Lind, Marchal y Wathen (2008): regla especial y regla general de la adición, regla especial y regla general de la multiplicación, regla general para eventos no independientes. Los profesores explicaron estas reglas en clase y, además, estudiaron el significado del análisis combinatorio en la aplicación de problemas relacionados con juegos de azar. De esta forma, lo que se pretendía era que cada equipo explicara cómo estos conceptos podían identificarse en el juego de azar propuesto. Las explicaciones de los estudiantes fueron grabadas.

Análisis de los resultados

Las propuestas de los tres equipos analizados se han dividido en subsecciones. Los nombres de cada subsección aluden al juego propuesto por cada equipo.

Las pelotas lanzadas del Equipo A

El equipo A utiliza el enfoque de probabilidad clásica y su juego consiste en solicitar al participante que intente meter dos pelotas dentro de 50 vasos, que fueron previamente enumerados del 1 al 50. El

participante no puede ver el número con el que está marcado el vaso y debe, antes de lanzar la primera pelota, seleccionar una de las siguientes tres opciones:

a) Obtener un múltiplo de 6 (M6) o un múltiplo de 8 (M8);
b) Un múltiplo de 7 (M7) o un múltiplo de 14 (M14);
c) Un múltiplo de 10 (M10) o un múltiplo de 15 (M15).

Los integrantes del Equipo A calcularon las probabilidades para cada opción de la siguiente manera:
Para la opción a: $P(A) =$ M6, P(B)= M8 $P(A\ o\ B) = \frac{8}{50} + \frac{6}{50} - \frac{2}{50} = \frac{12}{50}$.
Para la opción b: $P(A) =$ M7, P(B)= M14 14 $P(A\ o\ B) = \frac{7}{50} + \frac{3}{50} - \frac{3}{50} = \frac{7}{50}$.
Para la opción c: $P(A) =$ M10 P(B)= M15 $P\ (A\ o\ B) = \frac{5}{50} + \frac{3}{50} - \frac{1}{50} = \frac{7}{50}$.

En otras palabras, este equipo utiliza la regla general de la adición para calcular sus probabilidades: $\mathrm{P\ (A\ o\ B\ )} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A\ y\ B)}$.

Los estudiantes usan este concepto de probabilidad en su juego y modifican su aprendizaje para dar una aplicación práctica a los conceptos vistos en clase.

Vale mencionar que este juego es una variación de un ejercicio en libro de texto de los estudiantes y que, a su vez, fue enseñado en clase por uno de los profesores. El ejercicio consistía en responder la siguiente pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que una carta de una baraja convencional, escogida al azar, sea rey o corazón? Para ayudar a los estudiantes a responder esta pregunta, en el libro aparecía la Tabla 1, mostrada a continuación:

Tabla 1. *Explicaciones al cálculo de probabilidades de extraer cartas de una baraja (tomado de Lind, Marchal & Wathen, 2008; p. 156)*

Carta	Probabilidad	Explicación
Rey	$P(A) = 4/52$	4 reyes en una baraja de 52 cartas
Corazón	$P(B) = 13/52$	13 corazones en una baraja de 52 cartas
Rey de corazones	$P\ (A\ y\ B) = 1/52$	1 rey de corazones en una baraja de 52 cartas

De acuerdo con la fórmula $\mathrm{P\ (A\ o\ B\ )} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A\ y\ B)} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} o\ 0.3077$

El problema que se enseña a los estudiantes para que entiendan el uso de las reglas de la suma también tiene que ver con el azar. Cuando se pregunta a ellos la variación que hacen al juego, ellos explican que es más divertido y dinámico para los participantes lanzar pelotas como en un juego de feria que simplemente adivinar con cartas. Los integrantes del Equipo A explicaron el uso de reglas de probabilidad y dijeron que poner en práctica su creatividad los ayudó a entender mejor el uso de las reglas de

probabilidad y la diferencia entre los conceptos mutuamente excluyente y no mutuamente excluyente, vistos en clase.

Las figuras coloreadas del Equipo B

El equipo 2 elaboró una tabla de contingencias (ver Figura 1) para calcular las probabilidades de ganar en su juego. El juego consiste en pedirle al participante que seleccione, sin ver, una de tres figuras (un triángulo, un círculo y un cuadrado) y, posteriormente, adivine el color de esta figura (tres posibles colores había: rojo, azul o naranja). Por ejemplo, una vez que el participante extrajo un cuadrado, debe adivinar su color. El cálculo de la probabilidad de es: P (B1/A3) = $\frac{3}{9}$, P(B2/A3) = $\frac{4}{9}$ y P(B3/A3) = $\frac{2}{9}$.

Figuras/Colores	Rojo B1	Azul B2	Naranja B3	Suma
A1	2	3	1	6
A2	4	2	3	9
A3	3	4	2	9
Suma	9	9	6	24

Figura 1. Tabla de contingencias elaborada por estudiantes

Como puede observarse, la probabilidad más alta de ganar se obtiene si se escoge el color azul.

Los integrantes de este equipo hicieron una variación de un ejemplo del libro de texto, que no tiene relación con el azar, sino con el uso correcto de la tabla de contingencia. Este ejemplo es una encuesta de 150 adultos clasificados según su género y la cantidad de películas que vieron en el cine el mes pasado. Cada entrevistado se clasifica de acuerdo con dos criterios: la cantidad de películas que ha visto y el género. La tabla utilizada en el libro de texto, para este ejemplo, se muestra en la Tabla 2. Con ella, es posible calcular la probabilidad de entrevistar, por ejemplo, a un adulto mujer que haya visto una película el mes pasado.

Tabla 2. *Tabla de contingencias*
(tomado de Lind, Marchal & Wathen, 2008; p. 156)

Películas vistas/Género	Hombres	Mujeres	Total
0	20	40	60
1	40	30	70
2 o más	10	10	20
Total	70	80	150

En el ejemplo del libro se muestra la forma en que las reglas de adición y multiplicación se emplean en tablas de contingencias. Se hacen preguntas como: ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a una persona que haya visto una película?

El tema del cálculo de probabilidades con el uso de tablas de contingencia fue difícil de comprender para los integrantes del Equipo B; sin embargo, el hecho de pedirles que elaboraran un juego de azar en cuya explicación se involucrar este tema, ellos se vieron forzados a estudiarlo con mayor detalle. Una integrante del equipo dijo que cuando el profesor explicó en clase el uso de la tabla, ella no entendió su uso:

Realmente no entendía de qué estaba hablando el profesor cuando explicaba la función de una tabla de contingencias. Cuando se asignó a nuestro equipo este tema para crear un juego de azar, no se me ocurría nada; pero cuando mis compañeros de equipo y yo creamos la propuesta [...] finalmente entendí el uso de la probabilidad condicional. Si me hubieran preguntado esto en un examen habría reprobado".

Como puede inferirse de este testimonio, la creación de un juego de azar ayudó a los integrantes del Equipo B a entender las reglas de la multiplicación a los estudiantes. Poner en marcha la creatividad del estudiante y calcular probabilidades en su *propio nuevo* problema ayuda al aprendizaje de la probabilidad.

El "Melate" del Equipo C

El Equipo C propuso un juego que consistía en mostrarle al participante tres cartas. En cada carta, previamente, se había dibujado una cuadrícula cuyos en cuyos cuadrados se habían escrito números del 1 al 15 (ver Figura 2). El participante debía elegir tres números de cada carta. A continuación, uno de los integrantes del Equipo C extraía, sin ver, uno de 15 papeles numerados que habían sido colocados en una urna. El integrante repetía esta extracción tres veces. Si la terna obtenida por el integrante del equipo coincidía con una de las ternas elegidas por el participante (no importaba el orden de los números extraídos), éste ganaba un premio.

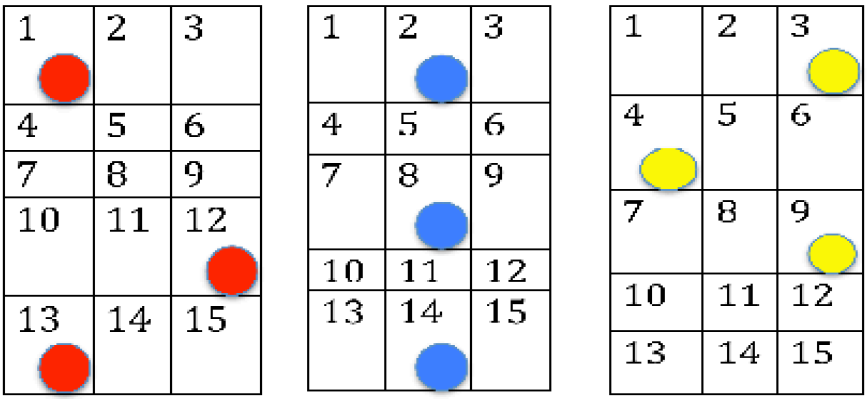


Figura 2. Ejemplo de tres combinaciones seleccionadas por un participante hipotético del juego del Equipo C

El juego elaborado por el Equipo C no fue una variación (en el sentido de Malaspia, 2013) de un ejemplo o problema visto en clase. De hecho, las bases de este juego son similares a las del conocido juego mexicano *Melate* (en el idioma inglés, este juego se conoce como *Pick 3*). Sin embargo, lo novedoso de este juego está en el hecho de que los integrantes del equipo involucraron reglas de contar para calcular la probabilidad que tenía el participante de ganar. Esto es relevante, pues los profesores de probabilidad explican la combinación solo como una regla para contar, pero no como una herramienta para calcular

probabilidades. Aun cuando en el *Melate* se utiliza la combinación para calcular probabilidades, los integrantes de este equipo comentaron que, antes del curso de probabilidad, creían que la probabilidad de cada terna era de $P(A) = \frac{1}{15}$, sin tomar en cuenta las combinaciones que disminuyen ampliamente la posibilidad de ganar. Con la creación de este juego, ahora los integrantes saben que la probabilidad de que cada terna sea la ganadora es de $P(A) = \frac{1}{455}$, y de que la probabilidad de ganar es de $P(A) = \frac{3}{455}$. En este sentido, una integrante de este equipo mencionó:

Es tentativo el juego, pero es una forma de engañar [al participante] ya que la probabilidad de ganar prácticamente es muy poca; porque como de 15 números [los participantes] escogen 3, la gente se cofunde y piensa que tiene muchas posibilidades de ganar. Y en realidad no, ya que son 455 combinaciones y, de esas 455, tienes que escoger tres, con eso prácticamente es nula la probabilidad. Se puede pensar que nuestro juego no es muy novedoso porque el Melate existe. Aquí lo importante es que aprendimos a aplicar la probabilidad en combinaciones; sabiendo nuestras posibilidades difícilmente compraremos un boleto para participar en este tipo de lotería.

Conclusiones

En este artículo se analizaron las explicaciones proporcionadas por estudiantes de universidad en el momento de presentar juegos de azar que involucraban riesgo, elaborados por ellos mismos, y después de haber recibido clases sobre el concepto de probabilidad. Como resultado principal se observa que esta estrategia de enseñanza provoca un cambio en la forma de comprender este concepto, además de ser una forma más activa de aprenderlo. Las explicaciones que de sus juegos debían proporcionar los estudiantes provocan el desarrollo de su creatividad, fortaleciendo su capacidad para resolver problemas y formular preguntas surgidas de sus nuevas propuestas. Aún más, derivado de esta propuesta didáctica, se observan algunas ventajas relacionadas con la enseñanza no solo del concepto de probabilidad, sino también de la estadística. Una de ellas, por ejemplo, es la de producir una práctica pedagógica en un contexto poco tradicional y fuera del aula de clase que motiva al estudiante a reflexionar sobre la importancia de estudiar con minuciosidad los conceptos involucrados en juegos tan conocidos como los que se organizan en casas de apuesta o en los juegos de feria organizados (tiro con dardos, por ejemplo) por gobiernos locales. Otra de las ventajas de esta estrategia es que el estudiante identifica los objetos de estudio en la práctica y, con el paso del tiempo, los sigue reconociendo. Estudiantes de cursos más avanzados recuerdan lo que hicieron en la feria de probabilidad y lo comentan con sus ex profesores. Difícilmente recuerdan lo que contestaron en un examen de estadística.

Más investigación es necesaria para indagar cómo la creación de problemas de azar puede permitir que los estudiantes se planteen nuevas preguntas. Preguntas como, por ejemplo, ¿y si mi pelota cae en un 8? ¿y si escojo el color azul? ¿o si elijo tal o cual combinación? pueden hacer que el estudiante profundice en el significado de conceptos relacionados con el de probabilidad. Al dar respuesta a sus propias propuestas, el estudiante modifica su aprendizaje y elabora nuevos problemas o realiza variaciones con la información que le proporciona el docente.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263.

Delmas, R., Garfield, J., y Ann, O. (2003). Assessing students´ conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal, 6*(2), 22-38.

Díaz, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista.* México: McGraw Hill.

Duncker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs, 58*(270), 1-113.

Friz, M., Sanhueza S., y Figueroa, E. (2011). Concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas sobre las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de la estadística. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13*(2), 113-131.

Garfield, J., y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 44-63.

Garfield, J., Hogg, B., Schau, C., y Whittinghill, D. (2000). Best practices in introductory statistics. Position paper prepared for the Undergraduate Statistics Education Initiative. First Courses in Statistical Science Working Group. Recuperado el 2 de diciembre de 2014 de http://www.amstat.org/education/pdfs/usei_1st.pdf

Jones, G. A., C. W. Langrall y E. S. Money (2007), Research in probability. Responding to classroom realities, en F. K. Lester (ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). Charlotte: Information Age Publishing.

Lind, D.; Marchall, G.; Wathen, S. (2008). *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. México: Mc Graw Hill.

Malaspina, U. (2013a). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. UNO, *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 63*, 41-49.

Malaspina, U. (2013b). Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady. UNION*, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 34*, 141-149.

Mamona-Downs, J. (1993). On anaysing problem posing. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. Ill, pp. 41-47). Tsukuba (Japan): International Group for the Psychology in Mathematics Education.

Penalva, Posadas y Roig (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática, 22* (3), 23-54.

Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En Clarkson (Ed.), *Technology in Math. Education* (pp. 518–525). Melbourne, Victoria: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Tovar, J. Castillo, H. Y Marín, M. (2007). Preconcepciones de estudiantes de la Pontificia Universidad Javeriana Cali sobre el curso de Estadística. *Pensamiento Psicológico, 3*(9), 61-78.

DESARROLLO DE PROCESOS COGNITIVOS BÁSICOS: LA FUNCIÓN POTENCIAL EN CONTEXTO

Patricia Sastre Vázquez, Alejandra Cañibano, Mónica Real, Rodolfo Eliseo D´Andrea
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Facultad de Agronomía. Campus Azul), Pontificia Universidad Católica Argentina (Facultad de Química e Ingeniería. Campus Rosario), Instituto de Educación Superior N°2. Instituto de formación técnica superior N°19. (Argentina)
pasava2001@yahoo.com.ar, mac@gmail.com, monireal@gmail.com, rodolfoedandrea@gmail.com

Resumen

Entre los objetivos en la formación de estudiantes universitarios deberían estar: incentivar la iniciativa y la búsqueda de alternativas de solución a problemas, así como la integración de conocimientos y el desarrollo del componente investigativo. Para lograr estos objetivos es necesario que los estudiantes desarrollen sus capacidades cognitivas, para lo cual el docente debe diseñar actividades especiales. La contextualización, con aplicaciones no artificiales y que despierten el interés del estudiante, ayuda a obtener estas metas. En este trabajo, con el objetivo de propiciar el desarrollo de capacidades cognitivas básicas, se propone una actividad matemática contextualizada: curva especie-área.

Palabras Clave: contextualización, función, curva especie-área, desarrollo cognitivo

Abstract

Among the objectives of university students' training, it should be: to encourage the initiative and search for different solutions to problems, as well as the integration of knowledge and the development of the research component. To achieve these objectives, it is necessary for the students to develop their cognitive abilities, for which the teacher must design special activities. Contextualization with non-artificial applications, which arouse student's interest, helps to achieve such goals. In this work, with the aim of promoting the development of basic cognitive abilities, we propose a contextualized mathematical activity: area- king curve.

Keywords: contextualizing, function, species-area curve, cognitive development

Introducción

Existe una gran proporción de estudiantes universitarios que no aprueban las asignaturas correspondientes a las ciencias básicas, en particular Matemática. Uno de los motivos de este hecho puede ser el poco interés que tienen los estudiantes por estas ramas de la ciencia, ya que no ven de manera inmediata su aplicación, ni el objeto de tener que cursarla, en carreras donde la Matemática es una herramienta, pero no un objeto en sí misma, como sucede en Ingeniería Agronómica. Utilizando aquellas situaciones que surjan de la

realidad se logrará un aprendizaje más significativo, solo así se apreciará la parte utilitaria de la Matemática, ya no como ciencia abstracta sino como ciencia aplicada a la realidad. En tal sentido, Luelmo (1997) considera que una elección adecuada de situaciones tomadas de la realidad y acondicionadas para el estudiante, constituyen una motivación, de modo entonces que los contenidos matemáticos implícitos que en estas situaciones pueden aprenderse no adquieren relevancia solo por el contenido intelectual sino también por la aplicación. Todo esto significa un desafío para el profesor, y una constante búsqueda de situaciones que generen inquietudes intelectuales y emocionales en el estudiante. En este sentido, el diseño curricular debe combinar: 1) Competencias básicas (saberes, conocimientos y habilidades que sirven de base para la adquisición de conocimientos y destrezas), 2) Competencias técnicas (específicas de una determinada actividad laboral, aquellas que especializan a los sujetos en un determinado campo profesional) y 3) Competencias transversales (saberes y habilidades que atraviesan distintas ocupaciones como trabajar en equipo, resolver problemas, gestionar recursos). La resolución de problemas es una metodología apropiada para el desarrollo de competencias laborales, ya que permite poner en contacto al sujeto con situaciones del mundo real. Esta metodología favorece la tarea en pequeños grupos ya que las situaciones presentadas admiten distintas alternativas de resolución. Con esta metodología se espera lograr que los estudiantes desempeñen un papel activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a fin de que desarrollen habilidades y capacidades cognitivas que les permitan orientarse correctamente en la literatura científico–técnica, buscando los datos necesarios de forma rápida e independiente, y aplicando los conocimientos técnicos adquiridos de manera activa y creativa. Con la actividad propuesta se pretende lograr un acercamiento entre el objeto de estudio de la Matemática y un objeto de trabajo del profesional que se pretende formar, lo que favorece el desarrollo de un proceso docente educativo en interrelación con los sistemas agropecuarios, contribuyendo a la motivación constante de los alumnos y a la formulación de problemas contextualizados por parte del docente. Para obtener resultados permanentes, durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje, es necesario relegar por un momento los contenidos de su rol central y colocar la atención en los procesos cognitivos que están involucrados en este proceso, para luego seleccionar los contenidos y estrategias adecuados para la adquisición y desarrollo de esos procesos. El desarrollo de los procesos cognitivos en estudiantes universitarios requiere elaborar instrumentos apropiados a tal fin. La contextualización, con aplicaciones no artificiales y que despierten el interés del estudiante, ayuda a obtener estas metas. En este trabajo, con el objetivo de propiciar el desarrollo de procesos cognitivos básicos, se propone una actividad matemática contextualizada que aplica la función potencial: curva especie-área.

El objetivo de este trabajo es propiciar el desarrollo de procesos cognitivos mediante una serie de actividades matemáticas contextualizadas. Se muestra aquí el trabajo realizado sobre el análisis de la curva especie-área. Queda de manifiesto que la contextualización, con aplicaciones no artificiales y que despierten el interés del estudiante, ayuda a obtener estas metas.

Marco teórico/introducción

El concepto de cognición se define como un acto o proceso de conocimiento que engloba los procesos de: atención, percepción, memoria, razonamiento, imaginación, toma de decisiones, pensamiento, lenguaje, resolución de problemas y la creatividad, a los que se les ha denominado procesos cognitivos básicos. Del conjunto los procesos señalados, se seleccionan los que se describen a continuación, siendo éstos los procesos cognitivos básicos que se desean ejercitar y desarrollar en esta propuesta de actividad para los estudiantes: 1) observación, 2) descripción y 3) determinar una relación. El primer paso de todo proceso

mental es la observación. Este procedimiento permite recoger información acerca del entorno para generar, de manera reflexiva y ordenada, nuevos conocimientos. El punto de partida de la observación es establecer qué se quiere observar, seleccionar el objeto de estudio y observarlo, es decir establecer un objetivo claro para proceder a una observación correcta del objeto de estudio. Para realizarla de forma adecuada se sugiere: 1) Determinar: a) el objeto (qué observar); b) el objetivo (para qué observar) y el método (cómo observar), 2) Usar todos los sentidos y 3) Registrar los datos. La descripción es el discurso oral o escrito mediante el cual se explica cómo es un objeto, un individuo, una relación o un lugar para ofrecer una imagen o una idea completa de ellos. La descripción exige en principio un proceso de observación. Las características deben presentarse en un orden, el cual determina la estructura de la descripción (ordenación). Este orden puede ser de muchos tipos dependiendo del orden espacial (lejano, cercano), del orden sensorial (forma, tamaño, color), del orden lógico, (general, particular), etc. La variable es una característica que representa algún aspecto del objeto observado. El proceso de relación se concreta cuando, por medio de la observación, ya se han obtenido los datos y luego de realizar comparaciones que permiten establecer nexos entre los datos. Se trata de conectar los resultados, vinculando información.

Marco teórico – Nociones básicas de Ecología. Curva especie – área

Una de las preocupaciones de los investigadores en Ecología es conocer qué atributo del objeto de estudio es necesario medir y cuáles son las relaciones principales a considerar en la situación planteada por el problema a resolver; asimismo, se desea saber cuál es el tamaño requerido por la muestra para lograr representar adecuadamente la composición de especies de una comunidad. Esta área mínima se representa en un gráfico en cuyas ordenadas se encuentra el número de especies y en las abscisas, el área muestreada. Las curvas generadas son las comúnmente llamadas curvas especies – área. Así, el área mínima está relacionada con la superficie en la cual esta curva comienza a ser horizontal. La curva especie-área es utilizada en Ecología para representar la relación que existe entre el área del hábitat, o parte de él, y el número de especies que se encuentran dentro de esa área. Esta curva es además útil para estimar el área que debería tener una reserva natural para conservar un número dado de especies, o también para predecir cuántas especies podrían perderse si se destruyese y fragmentase un hábitat natural. Las relaciones matemáticas que vinculan las especies S con el área A, suponiendo que el resto de los factores determinantes posibles, localización geográfica y la distancia a las fuentes de donde proceden los inmigrantes, puedan permanecer constantes, lo cual es difícil de demostrar, siguen siendo materia de debate. Johnson & Raven (1973); Connor & Simberloff, 1978; Gilbert (1980); McGuinness (1984) y Williamson (1988)

La función potencial tiene la forma general: $y = f(x) = ax^b$ con $a, x, b \epsilon R$ que en escala logarítmica: $\log(y) = \log(a) + b.\log(x)$, las representaciones graficas de estas funciones son rectas, cuyas pendientes son iguales al valor de b. El principal interés de las leyes potenciales radica en su invariancia de escala. La función $y = f(x) = ax^b$ siendo a, b constantes pertenecientes a los reales, resulta que satisface la relación: $f(kx) = a(kx)^b = k^b f(x) \propto f(x)$. Otras propiedades interesantes de este tipo de funciones son las siguientes: 1) Sea $x > 1$ y $a \geq b$ entonces es $x^a \geq x^b$ y 2) Si $0 < x < 1$ y $a \geq b$ entonces es: $x^a \leq x^b$. La curva especie-área es utilizada en Ecología para representar la relación que existe entre el área del hábitat, o parte de él, y el número de especies que se encuentran dentro de esa área. Esta curva es además útil para estimar el área que debería tener una reserva natural para conservar un número dado de

especies, o también para predecir cuántas especies podrían perderse si se destruyese y fragmentase un hábitat natural. La relación que ha sido más ampliamente aceptada, y con mayor respaldo científico es la que establece que el logaritmo de *S* es proporcional al logaritmo del área más una constante. En otras palabras, *S* es proporcional a la potencia de *A*. Arrhenius (1921, 1923) propone la primera fórmula matemática para representar el aumento del número de especies con el área. Esta es importante para entender la diversidad de islas, el diseño de áreas protegidas y los efectos de la fragmentación de hábitats sobre la diversidad. La formulación más común se debe a Preston (1962): $S = c \bullet A^z$, es decir, $y = f(x) = c \bullet x^z$, *y en escala logarítmica:* $\log(S) = \log(c) + z \log(A)$ donde S: número de especies; c: coordenada en el origen o intercepto; A: área, y z: pendiente. Los parámetros *c* y *z* se determinan obteniendo datos de campo los cuales permiten realizar estimaciones mediante un análisis de regresión lineal de la ecuación potencial en su expresión logarítmica. El valor de *z*, es la pendiente de la recta de regresión entre el *ln S* y el *ln A*. En general, las áreas grandes tienden a tener mayor número de especies. El número de especies en un área resulta del balance entre las tasas de inmigración y extinción de especies. Áreas relativamente pequeñas sostendrían menos especies. Según Strong, Lawton & Southwood (1984), la inmigración sería independiente del área. Connor & McCoy (1979) sostienen que el mayor número de especies en áreas más grandes sería sólo el resultado del muestreo pasivo de los insectos herbívoros y no de procesos biológicos, tales como una menor extinción de especies o especialización de hábitat, por lo que áreas de mayor tamaño tendrían mayor riqueza de insectos herbívoros simplemente por un fenómeno probabilístico.

Marco teórico – Área recomendada

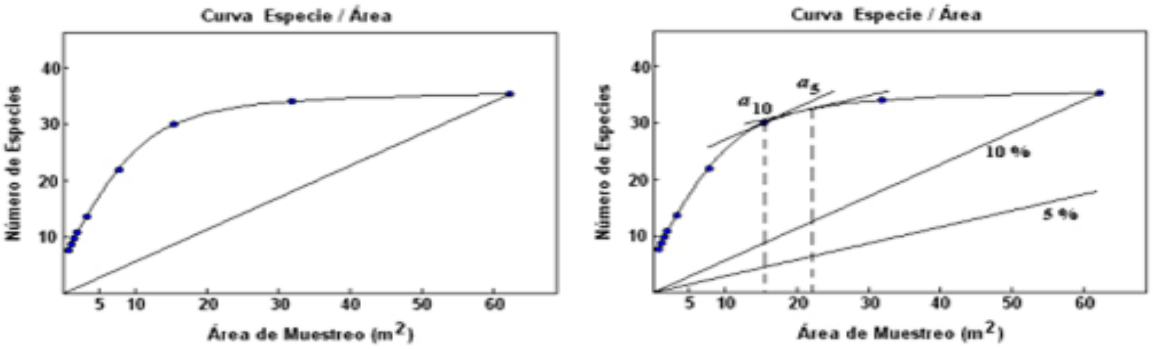
Para realizar inventarios florísticos suelen utilizarse parcelas de muestreo de área fija, circular o rectangular, dentro de las cuales se registran todos los individuos encontrados. Pero es necesario utilizar parcelas de superficie tal que aseguren la representatividad de cada unidad muestral, para lo cual se recurre al método del área mínima.

Tabla 1: *Área recomendada por formación vegetal*

Formación vegetal	Superficie (m^2)	Formación vegetal	Superficie (m^2)
Bosques		Matorral bajo	10 – 25
Estrato arbóreo	200 – 500	Pradera de gramíneas	10 – 25
Sotobosque	10 – 25	Empastadas (fertilizadas)	5 - 10
Pastizales	50 – 100	Comunidades de musgos	1 – 4
Malezas agrícolas	25 – 100	Comunidades de líquenes	0,1 - 1

Extraído de: Manual de Métodos y Criterios para la Evaluación y Monitoreo de la Flora y la Vegetación. Jaime Hernández P., María Teresa Serra y Luis Faúndez Yancas. Facultad de Ciencias Forestales, Universidad de Chile, Noviembre 2000.

Este método permite establecer la menor superficie sobre la cual la composición de especies de la comunidad queda adecuadamente representada, la que depende del tipo de comunidad a estudiar y de la variación interna que ésta tenga.



Izquierda : Curva especie/área.
Derecha. determinación del área mínima según distintos criterios de incremento del número de especies por cada 10 % de incremente en el área medida (a_{10}: 10 %, a_5: 5 %).

Extraído de: Manual de Métodos y Criterios para la Evaluación y Monitoreo de la Flora y la Vegetación. Jaime Hernández P., María Teresa Serra y Luis Faúndez Yancas. Facultad de Ciencias Forestales, Universidad de Chile, Noviembre 2000.

Figura 1: Curva especie-área y determinación del área mínima.

El área mínima puede ser determinada solo para comunidades que son relativamente homogéneas y no fragmentadas. Se establece inicialmente a través de pequeñas superficies (0,5 m x 0,5 m) y registrando todas las especies que se encuentran en ella. Luego, esta área se duplica y se registran todas las nuevas especies que aparecen en la nueva unidad considerada. El área de muestreo se va agrandando hasta que el número de especies agregadas tiende a ser pequeño. Los resultados se grafican en una curva especie/área (Figura 1), considerando el número acumulado de especies registradas, según el área de muestreo asociada. Para determinar el área mínima de muestreo para la comunidad se sugiere la utilización de un punto a lo largo de la curva en el cual un aumento de 10 % en el área total de muestreo produce sólo un aumento de un 10 % en el número de especies registradas. Este punto se determina trazando una recta pasa por el origen del gráfico hasta el 100 % de los valores de número de especies y área. Luego, se encuentra la recta que siendo paralela a ésta, es tangente a la curva especie/área. Se determina el punto de tangencia y la proyección vertical de este punto especifica el área mínima de muestreo. Un criterio más conservador se tiene al considerar un 5 % de incremento en el número de especies por cada 10 % de aumento en superficie.

La función propuesta por Arrhenius, como todas las funciones potenciales, tiene una propiedad interesante. Para cualquier par de valores de área, se puede escribir:

$$S_i = aA_i^z, S_j = aA_j^z \Leftrightarrow \frac{S_i}{S_j} = \frac{aA_i^z}{aA_j^z} = \left(\frac{A_i}{A_j}\right)^z$$

Harte, Kinzig & Green (1999) mostraron que esta forma de la expresión potencia implica autosimilaridad de los patrones de escalamiento de la riqueza de especies. Si $A_i > A_j$, entonces $S_i > S_j$ y el cociente Si / Sj se convierte en una medida de diversidad beta, ya que es el cociente entre la riqueza de especies a una escala grande entre esa riqueza a una escala más pequeña. Como demostraron Arita & Rodriguez (2002),

eso implica que: $\log(\beta) = log\left(\frac{S_i}{S_j}\right) = z.log\left(\frac{A_i}{A_j}\right) = z.log(e)$ donde e es un factor de escalamiento determinado por la diferencia de tamaño de las áreas *Ai* y *Aj* (en Harte *et al.*(1999) $e = 2$; en Arita & Rodríguez (2002) $e = 4$). Esto también implica una relación directa entre β y *z*. La implicación final es que, si la función potencial aplica, entonces la diversidad beta es autosimilar, ya que no cambia con la escala. Castelló, Corvillo & García (1987) realizaron un estudio que pone de manifiesto la relación que existe entre la superficie de diversas lagunas subtropicales del oriente boliviano y el número de especies de la ictiofauna que contienen. La zona de estudio está situada en la provincia Yacuma (departamento del Beni). La superficie media de las lagunas fue de 6.087 m^2, con un mínimo de 90 m^2 y un máximo de 22.500 m^2. Se tomaron datos sobre la superficie de cada una de las lagunas y el número de especies de peces, en cada una de ellas. Se empleó la ecuación propuesta por Arrhenius (1921): $S = c * A^Z$, donde *S*, es el número de especies, *A* la superficie de la laguna y, *c* y *z* son constantes. La determinación de la relación especies- área, proporcionó la siguiente ecuación: $S = 0{,}447\ A^{0{,}203}$. El coeficiente *c* está afectado por la densidad de los organismos, el número de especies en el taxón, el grado de aislamiento y la escala con la que se mide el área (Haas, 1975). Otros autores (Gould, 1979) asumen que *c* (como el valor de *y* cuando $x = 1$) representa el número de especies en un área de tamaño unidad. La constante *z*, usada inicialmente como un índice de aislamiento, también está influenciada por otros factores, entre ellos la heterogeneidad del medio. Kilburn (1966), interpreta *z* como una medida de la riqueza de especies en el medio, arguyendo que las especies raras aparecen en grandes áreas y que estas adiciones determinan la pendiente de la recta. En las lagunas, los peces se encuentran más aislados que muchos organismos terrestres que ocupan islas o habitats apartados. El bajo valor de *z* obtenido para el presente estudio, se podría explicar desde un punto de vista ecológico. En primer lugar, las lagunas se pueden considerar más homogéneas que los habitats terrestres aislados, de tal forma que la diversidad de habitats y recursos se incrementaría de forma más lenta a medida que aumentara la superficie. La ictiofauna de las lagunas estudiadas, a pesar de todo, representa un equilibrio entre la colonización y la extinción. Esto ocurre siempre y cuando exista una inmigración significativa y continua, de potenciales colonizadores. En el presente caso, y como consecuencia de las inundaciones que se producen anualmente y que establecen conexiones acuáticas entre las lagunas y charcos que contienen peces, los períodos de colonización están potenciados.

Metodología

La metodología utilizada es mixta ya que en la cátedra interesa que el estudiante vivencie y descubra los métodos de resolución; compare y analice las variables involucradas en cada situación. Interesa también que el estudiante comprenda las necesidades y requerimientos que hacen falta en las distintas actividades que se desarrollan. Con este fin se propone la resolución de situaciones problemáticas para que el estudiante busque soluciones a su modo recuperando y reorganizando conocimientos y utilizando distintas estrategias ya afianzadas. El debate y análisis crítico ya realizado sobre los procedimientos esgrimidos en la resolución harán luz en la búsqueda de la solución óptima.

Aplicación didáctica – conclusiones

Es un modo de trabajo de la cátedra, el facilitar al grupo de estudiantes varias situaciones problemáticas. En particular, en este artículo se hace referencia al conocimiento de la curva especie-área. Con los

diferentes grupos de estudiantes en general, se trabaja esgrimiendo estrategias y procedimientos utilizados por la cátedra y cuando se llega al debate y análisis crítico de las soluciones propuestas por el grupo de estudiantes, en este caso en particular, el grupo de docentes decide acercar los contenidos de la curva especie-área como un modelo alternativo a seguir. En general, ocurre que el grupo de estudiantes acuerda que el procedimiento resolutivo de la curva especie-área es el más sintético y directo para resolver ese tipo de problemática. Con estos datos se les presenta la siguiente actividad para ser resuelta por los estudiantes a la luz del marco teórico presentado: 1) Graficar la relación entre la superficie de diversas lagunas subtropicales del oriente boliviano y el número de especies de la ictiofauna que contienen. 2) Determinar el domino y el rango de la función especie-área.; 3) Graficar la función especie-área en escala logarítmica. 4) Determinar el área recomendada. La actividad propuesta abarca los conceptos matemáticos de variable, función, dominio, imagen, intervalos de variación, representación gráfica, considerando una situación tomada de la vida real. Para analizar un gráfico es de mucha utilidad formular las siguientes preguntas: 1) *¿qué cambia?;* 2) *¿cuánto cambia?;* 3) *¿cómo cambia?;* 4), *¿qué tan rápido cambia?;* 5) *¿cómo se comporta globalmente la gráfica*. (Dolores, 1999).

Se les entrega usualmente a los estudiantes, para el caso de la curva especie-área la copia de un trabajo de Castelló, Corvillo & García (1987) quienes realizaron un estudio sobre la relación que existe entre la superficie de diversas lagunas subtropicales del oriente boliviano y el número de especies de peces que contienen: $S = 0{,}647\ A^{0{,}203}$. Con el texto anterior, tres Guías, confeccionadas para guiar el trabajo, un resumen de los conceptos ecológicos involucrados, se les solicita a los estudiantes que respondan a las siguientes preguntas: ¿Qué es lo que cambia en la situación planteada?; ¿Cuál es el intervalo de variación en el tamaño de las lagunas?; ¿Cuál es el intervalo de variación del número de especies de peces?; ¿Cuál es el área de laguna más pequeña?; ¿Qué cantidad de especies de peces hay, aproximadamente, en una laguna de 10.000 m^2?; ¿Y en una cuya superficie supere a la anterior en de 100 m^2?; ¿Cuál es la variable independiente?; ¿Y la variable dependiente?; A medida que aumenta la superficie de la laguna, ¿Qué ocurre con el número de especies de peces?; ¿Qué tamaño tiene la laguna que alberga el mayor número de especies de peces y cuántos peces hospeda?; ¿Cuál es el tamaño de la laguna que contiene el menor número de peces y cuántos peces alberga?; ¿Qué tamaño debe tener una laguna para ser capaz de albergar 2 especies de peces?. Respondidas estas preguntas se les solicitó: graficar, analizar el grafico y elaborar un informe. La actividad propuesta tiene por objetivo brindar a los estudiantes una oportunidad para formarse en el ejercicio del desarrollo de algunos procesos cognitivos básicos. Esto les permite el desarrollo de sus capacidades para observar, describir, comparar y relacionar. Así, se favorece el desarrollo de capacidades cognitivas para la resolución de problemas específicos del rol profesional del estudiante en formación donde se pone de relieve la necesidad de la utilización de funciones matemáticas y de sus propiedades para interpretar las relaciones entre el objeto de estudio y las respuestas-soluciones a los problemas que se dan en una situación real.

Referencias bibliográficas

Arita, H. & Rodríguez, P. (2002). Geographic range, turnover rate and the scaling of species diversity. *Ecography*, *25*(5), 541-550.

Arrhenius, O. (1923). On the Relation Between Species and Area. A Reply. *Ecology*, *4*(1), 90-91.

Arrhenius, O. (1921). Species and area. *Journal of Ecology*,*9* (1), 95-99.

Castello, V., Corvillo, M., & García, J. E. (1987). Relación especies-área de una comunidad de peces neotropicales. *Miscellània Zoològica*, *11*, 243-247.

Connor, E. & McCoy, E. (1979). The statistics and biology of the species-area relationship. *The American Naturalist*, *113*(6), 791-833.

Connor, E. y Simberloff, D. (1978). Species number and compositional similarity of the Galapagos flora and avifauna. *Ecological Monographs*, *48*(2), 219-248.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Harte, J., Kinzig, A. & Green, J. (1999). Self-similarity in the distribution and abundance of species. *Science*, *284*(5412), 334-336.

Gilbert, F. (1980). The equilibrium theory of island biogeography: fact or fiction? *Journal of biogeography*, 209-235.Kilburn, P. D. (1966). Analysis of the Species- Area Relation. *Ecology*, *47*(5), 831-843.

Gould, S. (1979). An allometric interpretation of species-area curves: the meaning of the coefficient. *The American Naturalist*, *114*(3), 335-343.

Haas, P. (1975). Some comments on use of the species-area curve. *The American Naturalist*, *109*(967), 371-373.

Johnson, M. & Raven, P. (1973). Species number and endemism: The galápagos archipelago revisited. *Science*, *179*(4076), 893-895.

Luelmo, M. (1997). Un entorno para el aprendizaje de las Matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 12, 5-7.

McGuinness, K. (1984). Equations and explanations in the study of species-area curves. *Biol. Rev.,* 59, 423 – 440.

Preston, F. (1962). The canonical distribution of commonness and rarity. Ecology. 43, 185 – 215, 410 – 432.

Strong, D., Lawton, J. & Southwood, S. (1984). *Insects on plants. Community patterns and mechanisms*. United States: Blackwell Scientific Publicatons.

Williamson, M. (1988). Relationship of species number to area, distance and other variables. In *Analytical biogeography* (pp. 91-115). Springer Netherlands.

EXPERIENCIAS DE LA RELACIÓN ENTRE LAS DISCIPLINAS DE INGENIERÍA Y GESTIÓN DE SOFTWARE Y MATEMÁTICA SUPERIOR EN LA FORMACIÓN DEL INGENIERO INFORMÁTICO

Anaisa Hernández González, Esther Ansola Hazday
Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", CUJAE. (Cuba)
anaisa@ceis.cujae.edu.cu, esther@ind.cujae.edu.cu

Resumen

El trabajo muestra las experiencias de la relación de las disciplinas de Ingeniería y Gestión de Software y Matemática en la carrera de Ingeniería Informática que se estudia en la Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría" (CUJAE). Se incluyen ejemplos de cómo dentro de las clases de estas materias se utilizan ejemplos matemáticos, con el objetivo de que alcancen algunas de los conocimientos y habilidades previstos en el programa analítico de las asignaturas específicas del perfil de esta carrera. Los resultados que se presentan muestran que es posible transgredir las fronteras entre estas disciplinas, lo que ha beneficiado el aprendizaje de los estudiantes. Durante el desarrollo del trabajo se ha seguido una investigación del tipo mejora por cuanto intenta perfeccionar la relación entre disciplinas durante el proceso de formación. Como pretende cambiar el fenómeno estudiado y los investigadores están inmersos en la realidad que se está estudiando, es una investigación-acción.

Palabras clave: matemática, ingeniería informática, multidisciplinariedad

Abstract

The work shows the experiences of the relationship of the discipline of Engineering and Software Management and Mathematics in the Computer Science Engineering degree course that is studied at the Technological University of Havana "Jose Antonio Echeverria" (CUJAE). Mathematical examples are used within the lessons of the previously mentioned subjects with the aim of students to achieve some of the knowledge and skills provided in the analytical program of the specific subjects of the computer science engineering degree profession profile. The results show that it is possible to transgress the boundaries between these disciplines, and it has improved students' learning. During the development of the work an improvement-type investigation has been followed as it is intended to better develop the relationship among disciplines during the training process. As it attempts to change the phenomenon by studying it, and the researchers are immersed in the real facts being studied, it is an investigation-action study.

Key words: mathematics, computer engineering, multidisciplinarity

Introducción

Uno de los propósitos, declarados explícita o implícitamente en los planes de estudio de cualquier carrera universitaria, es que entre las disciplinas y asignaturas (materias/unidades curriculares) que la conforman

se alcancen altos niveles de interdisciplinariedad, pluridisciplinariedad y transdisciplinariedad; como práctica para el desarrollo exitoso del proceso de enseñanza aprendizaje (Carrizo, 1998).

En la enseñanza de la Ingeniería y en el quehacer profesional de los ingenieros, se evidencia su naturaleza interdisciplinaria. Ante una problemática, los especialistas de distintas disciplinas estudian paralelamente el tema y presentan informes distintos; alcanzándose una aproximación multidisciplinaria. Cuando atacan conjuntamente el problema comparan sus hipótesis de trabajo, analizan en conjunto los resultados y elaboran un informe común; llegando a la interdisciplinariedad. Como varias disciplinas estudian el fenómeno, se origina un intercambio de métodos generando algo nuevo; produciéndose entonces la transdisciplinariedad (Valencia, Muñoz, Mejías, Restrepo, Parra, & Ochoa, 2008).

En (Garcia, 2008) se plantea que en las universidades se sigue orientando el proceso hacia una visión interdisciplinaria, es decir, lo que se manifiesta en la resolución de problemas es únicamente la transferencia de métodos.

La carrera de Ingeniería Informática se estudia en la Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría" (CUJAE) desde hace 40 años. De este profesional se espera que sea capaz de la integración multidisciplinaria con especialistas de diversas ramas para concebir y desarrollar la solución informática que brinde respuesta a las necesidades del problema en cuestión, siendo capaz de asimilar los modelos correspondientes, seleccionar y utilizar el equipamiento y las técnicas y métodos más efectivos para el procesamiento de la información (CUJAE, 2017).

Entre las disciplinas básicas para la formación del ingeniero de este perfil, por supuesto está la de Matemática.

Por otra parte, desde el punto de vista de las competencias y habilidades profesionales, la disciplina de Ingeniería y Gestión de software juega un papel primordial dentro de la carrera. Tiene un sistema de evaluación que esencialmente implica por parte del estudiante el desarrollo de proyectos reales para demostrar el cumplimiento de los objetivos educativos e instructivos previstos en su diseño curricular, así como los sistemas de conocimientos y habilidades. Por tal motivo, en el aula y como parte del estudio individual, el estudiante resuelve problemas que contribuyen a estas metas.

Durante los últimos cuatro cursos las disciplinas de Matemática Superior y de Ingeniería y Gestión de Software, han realizado acciones intencionadas que las relacionan.

En el trabajo que se presenta se incluyen algunos ejemplos de cómo se han integrado estas dos disciplinas y se identifican aquellos aspectos en los que se puede continuar trabajando.

Metodología

La investigación en los sistemas de información, a saber, de (Hevner & Chatterjee, 2010), ha estado dominada por los estudios de los impactos de artefactos de tecnologías de la información en las organizaciones, equipos y personas y, por lo tanto, han adecuado los métodos científicos aplicados a las demás ciencias a las particularidades de las ciencias informáticas en sus diferentes áreas de conocimiento. De acuerdo a (Genero, Cruz-Lemus, & Piattini, 2014), se sigue una investigación del tipo mejora por

cuanto intenta mejorar algún aspecto del fenómeno estudiado, en este caso la relación entre las disciplinas de Matemática Superior (MS) e Ingeniería y Gestión de Software (IGS), durante el proceso de formación. Como pretende cambiar el fenómeno estudiando y los investigadores están inmersos en la realidad que se está estudiando, es una investigación-acción.

Bases conceptuales

Para entender un fenómeno, explicarlo y darle solución, tienen que interactuar varias disciplinas. En su interrelación se da respuesta a las interrogantes de la ciencia en la actualidad: para quién, para qué, para cuándo, para dónde y desde el punto de vista de quién.

La multidisciplinariedad, la interdisciplinariedad y la transdisciplinariedad son niveles del proceso de integración del saber. Este último es el nivel más complejo y eficiente de interacción entre diversas disciplinas (Álvarez, Martínez, & Machado, 2015).

La pluridisciplinariedad o la multidisciplinariedad no alteran los campos y objeto de estudio disciplinarios, ni el arsenal metodológico. Consiste en juntar varias disciplinas para que cada una proyecte una visión específica sobre un campo determinado.

La interdisciplinariedad implica puntos de contacto entre las disciplinas en la que cada una aporta sus problemas, conceptos y métodos de investigación (Pérez & Setién, 2008). Es decir, se produce la transferencia de métodos de una disciplina a otra (Nicolescu, 1998), pues el análisis desde distintas miradas científicas a problemas o conjuntos de problemas con una complejidad tal, posibilita ayudar a desentrañar las distintas dimensiones con el aporte de cada una de las disciplinas (Taboarda, Copertani, Ruiz, Gurevich, & Firpo, 2005).

Es una forma de organización del conocimiento donde los métodos que se usan con éxito dentro de una disciplina se transfieren a otra, introduciéndolos en ella sobre la base de una justificación, que pretende siempre una ampliación de los descubrimientos posibles o la fundamentación de estos (Nicolescu, 1998).

La transdisciplinariedad es lo que simultáneamente le es inherente a las disciplinas y donde se termina por adoptar el mismo método de investigación (Pérez & Setién, 2008). Es un proceso según el cual los límites de las disciplinas individuales se trascienden para tratar problemas desde perspectivas múltiples con vistas a generar conocimiento emergente (Nicolescu, 1998). Lo que está a la vez entre las disciplinas, a través de las diferentes disciplinas y más allá de toda disciplina.

En Sánchez (2010) se defiende que la solución no es crear equipos multidisciplinarios formados por especialistas de distintas áreas en torno a un determinado problema. Con este mecanismo solo se alcanza la acumulación de visiones desde cada una de las disciplinas presentes. La síntesis integradora no se logra a través de una acumulación de distintos cerebros. Ella debe ocurrir en cada uno de los cerebros y, para ello se precisa una formación orientada que lo haga posible. Compartimos este criterio en parte, pues los equipos multidisciplinarios son una necesidad para enfrentar los complejos problemas actuales, pero se necesita que la formación universitaria en cualquier profesión se oriente a alcanzar una visión transdisciplinaria.

La transdisciplinariedad no es una disciplina, sino un enfoque; un proceso para incrementar el conocimiento mediante la integración y transformación de perspectivas distintas. Es una forma de organización de los conocimientos que trasciende las disciplinas de una forma radical. Hace énfasis en lo que está entre las disciplinas, en lo que las atraviesa a todas y en lo que está más allá de ellas.

Sobre la base de la interdisciplinariedad, pluridisciplinariedad y transdisciplinariedad (Pérez & Setién, 2008) y (de la Herrán, 2011) se logra un intercambio de saberes en la solución a los problemas y casos de estudio que se le presentan a los estudiantes.

Disciplinas de Matemática Superior e Ingeniería y Gestión de Software

Para formar al Ingeniero Informático que responda a los problemas frecuentes de la profesión, es necesario valerse de las ciencias matemáticas, económicas y sociales, de los conocimientos en función de la defensa civil y seguridad nacional y de los especializados; que facilitan tener una visión global de la realidad basada en una educación interdisciplinaria. Las ciencias matemáticas brindan lógica y razonamiento, son el gran bastión a partir del cual el futuro ingeniero forma su pensamiento científico (Trejos, 2014).

La IGS es una de las disciplinas que cristaliza el significado de las matemáticas y que provee los elementos de juico para encontrarle aplicabilidad a partir del pensamiento algorítmico.

La disciplina de MS aporta al estudiante los conocimientos necesarios para su formación académica y las herramientas de trabajo que le permiten identificar, interpretar y analizar modelos matemáticos en procesos técnicos, económicos, productivos y científicos vinculados al ejercicio de la profesión, así como resolver los problemas que éstos conducen, haciendo uso eficiente de las técnicas modernas de cómputo e identificando rasgos cuantitativos y cualitativos de los fenómenos que estudia (CUJAE, 2017). Los objetivos generales de la disciplina, que se presentan a continuación, dejan explícita la relación inter-transdisciplinaria de esta disciplina.

- Desarrollar un pensamiento crítico y hábitos de proceder reflexivo que le permitan una constante autoevaluación, la evaluación del trabajo de otros compañeros y del grupo, e inferir conclusiones, acerca del objeto o fenómeno bajo estudio.

- Desarrollar la avidez por aprender a partir de un aprendizaje basado en la búsqueda consciente, significativa y con sentido personal de los conceptos fundamentales de la disciplina, para lo cual deben ser diseñadas actividades docentes e investigativas, que conlleven a la constante búsqueda de nuevas fuentes de información y de conocimientos.

- Caracterizar, interpretar, comunicar y aplicar los conceptos y principales resultados de la disciplina, mediante una correcta utilización del lenguaje matemático en sus formas: analítica, gráfica, numérica y verbal, centrando la atención en los modelos matemáticos, como invariante esencial del conocimiento y en los nodos de articulación con las restantes asignaturas y disciplinas.

- Analizar, modelar y resolver problemas relacionados con el modelo del profesional de la carrera y con otras disciplinas, utilizando los recursos y los métodos matemáticos estudiados, las estrategias

heurísticas y metacognitivas y los asistentes matemáticos, a partir de escoger en cada caso el método que se ajusta al problema en dependencia de los datos disponibles, de la respuesta que se desea hallar y de los medios con que se cuente para su solución.

- Desarrollar la capacidad de razonamiento y de las formas del pensamiento lógico mediante la asimilación de elementos de la lógica matemática, la comprensión de la demostración de propiedades y teoremas, el trabajo con los conceptos matemáticos, la identificación e interpretación de los mismos, la argumentación lógica de propiedades de los objetos matemáticos y la demostración de resultados teóricos sencillos, mediante el empleo de los métodos analíticos, gráficos y/o numéricos.

La Disciplina de IGS brinda a los profesionales de esta área las herramientas que le permite la concepción, modelación, diseño, desarrollo, implantación, integración, mantenimiento y prueba de sistemas informáticos, explotando las infraestructuras de almacenamiento, procesamiento e intercambio de información disponibles, cumpliendo los estándares de calidad establecidos, haciendo prevalecer criterios que sustentan los intereses del país en la producción y los servicios.

En tres cuerpos de conocimientos se agrupan las asignaturas que se indican entre paréntesis: la Programación (Introducción a la programación, Diseño y programación orientada a objetos, Estructura de datos 1, Estructura de datos 2, Base de datos, Base de datos avanzada y Programación web), la Ingeniería de software (Fundamentos de la Informática, Ingeniería de Software 1 e Ingeniería de Software 2) y la Gestión del software (Introducción a la Gestión del Software e Ingeniería de Software 3). Como resultado se pretende entregar un profesional que sea capaz de desempeñar, como parte de un equipo multidisciplinario, los roles de Ingeniero de requisitos, Analista de datos, Programador, Gestor de proyectos, Gestor de configuración, Diseñador de software, Diseñador de base de datos, Diseñador de interfaz hombre-máquina, Especialista de seguridad, Escritor-expositor de trabajos científicos y Arquitecto (CUJAE, 2017).

Relaciones inter-transdisciplinarias

En las indicaciones metodológicas de la Disciplina de MS, se indica que las estrategias de aprendizaje harán un trabajo explícito con los mediadores, es decir, los signos, el lenguaje, los mapas conceptuales, los resúmenes, los diagramas en bloques y los algoritmos de trabajo. Aunque no siempre se puede utilizar la misma notación que se usa en la disciplina de IGS para modelar en el proceso de desarrollo del software, el hecho de crear el hábito en los estudiantes de que el uso de los mediadores garantiza que exista un lenguaje común que facilita la modelación y la comunicación entre los involucrados en la solución de un problema. Esta es una habilidad que impacta en el rol de Escritor-Expositor, que es base en la formación del resto de los roles de este profesional.

Otra de las metas de la disciplina de MS, es enseñar a pensar y, para ello, se concibe una ejercitación que adiestre a los estudiantes en (CUJAE, 2017): la modelación, solución e interpretación del problema que se presenta, la identificación del significado de la información que le dan, que les piden y la relación entre lo que le dan y lo que le piden, el reconocimiento de las posibles vías para llegar al resultado y la identificación de las más eficientes, el seguimiento de los pasos que se llevan a cabo para obtener el

resultado y la evaluación del camino seguido y los resultados alcanzados, con el objetivo de identificar buenas prácticas y extraer lecciones.

En el caso de Fundamentos de la informática, el segundo tema refuerza el segundo aspecto de la lista anterior pues se propone como uno
de sus objetivos el de identificar los datos primarios, los derivados y el procesamiento requerido para dar solución a un problema utilizando software de uso como las hojas de cálculo.

En la figura 1 se representan las disciplinas de la carrera de acuerdo al grado de disciplinariedad que se va alcanzando. Cualquiera de las múltiples relaciones verticales posibles entre los niveles, definen una acción transdisciplinaria. La disciplina de MS está en la base ya que nos ayuda a entender lo que existe y a sentar los cimientos para la formación de las habilidades de los roles.

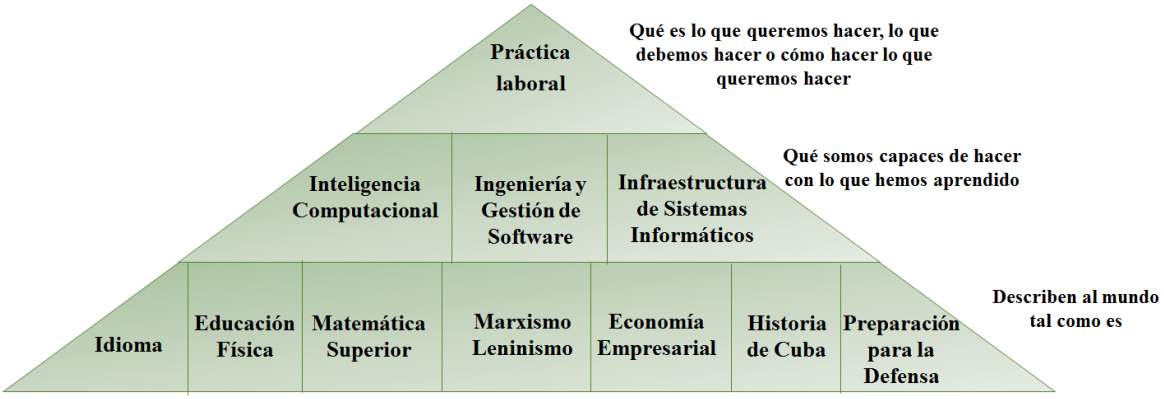


Figura 2 Pirámide de las relaciones entre disciplinas

En la Tabla 5 se muestran las habilidades asociadas a los roles que las asignaturas de la disciplina de MS contribuyen a formar.

Tabla 5 *Roles que se potencia en la Disciplina de Ingeniería y Gestión de Software con las habilidades asociadas.*

Roles	***Habilidades***
Ingeniero de requisitos	• Identificar términos y relaciones que están presentes en un problema. • Identificar y describir reglas de negocio. • Modelar los procesos de negocio.
Analista de datos	• Identificar términos y relaciones que están presentes en un problema. • Procesar datos con software de propósito general.
Programador	• Implementar y poner a punto aplicaciones, siguiendo un estándar de codificación. • Implementar algoritmos para manipular bases de datos, mediante un lenguaje de gestión de bases de datos.

Roles	*Habilidades*
	• Comprobar el funcionamiento de algoritmos con diferentes datos de prueba de forma manual y de forma automática, empleando las opciones de los entornos de desarrollo utilizados.
Gestor de proyectos	• Identificar tareas y estimar los recursos necesarios para planificar el proyecto de desarrollo de software. • Emplear herramienta de gestión de proyecto para apoyar la planificación. • Evaluar la factibilidad del proyecto.
Diseñador de software	• Diseñar el algoritmo de solución de un problema.
Diseñador de base de datos	• Diseñar el modelo conceptual, lógico y físico de datos para representar un problema dado. • Diseñar algoritmos para manipular bases de datos. • Diseñar consultas utilizando un lenguaje.
Escritor-Expositor de trabajos técnicos	• Identificar e interpretar bibliografía actualizada, pertinente y en idioma inglés para desarrollar un trabajo a partir de diferentes fuentes. • Resumir y redactar un documento de forma clara, concreta, correcta, estructurada, lógica, con un lenguaje técnico, cumpliendo las reglas ortográficas y el formato establecido; a partir del estudio de fuentes bibliográficas, utilizando software de propósito general. • Fundamentar las decisiones con criterios técnicos. • Documentar la solución propuesta utilizando los artefactos de la especialidad. • Comunicar los resultados alcanzados, haciendo un uso adecuado de los medios técnicos disponibles. • Emplear herramientas CASE para auxiliarse en todas las etapas de trabajo del desarrollo de sistemas informáticos. • Interpretar y elaborar artefactos de la especialidad.

Para ejemplificar cómo se ve en las clases las relaciones inter-transdisciplinarias, se utilizará el ejemplo de la sucesión de Fibonacci observado desde diferentes ópticas para estas dos disciplinas. La sucesión de Fibonacci consiste en una serie infinita que se compone de números enteros y que está constituida sobre la siguiente premisa: se inicia con los números 0 y 1, sucesivamente se van sumando los dos últimos números para generar el siguiente (Mora).

- *Lenguaje natural:* cada término es la suma de sus dos términos que le preceden, excepto los dos términos que son o y 1.
- *Lenguaje matemático:* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, donde: F_n es el término en posición n, F_{n-1} es el término anterior (posición n-1) y F_{n-2} es el término anterior a la posición n-1 (posición n-2).
- *Seudocódigo usando recursividad:*
- Función Fibonacci (n)

```
    Si n<2 entonces
        Retornar n
    Sino
        Retornar (Fibonacci(n-1)+Fibonacci(n-2))
    Fin si
Fin función
```

- *Seudocódigo usando programación iterativa:*

```
Función Fibonacci (n)
    Si n=0 Retornar 0
    Si n=1 Retornar 1
    Hacer i=2
    Hacer a=0
    Hacer b=1
    Hacer c=0
    Mientras i<=n
        Hacer i=i+1
        Hacer c=a+b
        Hacer a=b
        Hacer b=c
    Fin mientras
Retornar c
```

- *Representación gráfica:* UML (Unified Modeling Language) es la notación estándar que se utiliza en la modelación de sistemas informáticos (OMG, 2015). El diagrama de actividades es uno de los artefactos que proporciona y se utiliza para representar un flujo de trabajo. En la
- Figura 3 se muestra el algoritmo para calcular el Fibonacci de un número siguiendo la programación iterativa.

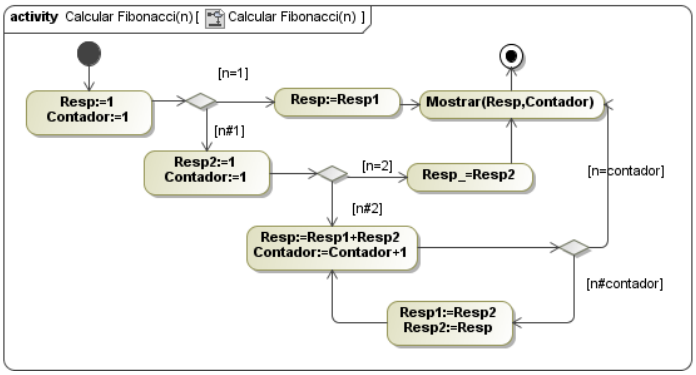


Figura 3 Diagrama de actividades de la sucesión de Fibonacci

En las clases y tareas extraclases de la asignatura de Introducción a la Programación (IP), que se recibe en 1er año, se usan ejercicios que utilizan conocimientos matemáticos que deben poseer los estudiantes

cuando comienzan la carrera pues las asignaturas de la disciplina de MS lo asumen como conocido. Un ejemplo de estos problemas es el siguiente:

Desarrolle un programa en C/C++ que calcule el seno de un ángulo agudo α perteneciente a un triángulo rectángulo, conocidas la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa. Si el ángulo mide menos de 30 grados se debe emitir un mensaje indicativo. El programa debe permitir que se introduzcan los datos de varios triángulos y se almacene el valor de seno de cada triangulo introducido en un arreglo. Como un requisito se desea mostrar el seno de los ángulos cuyo seno este por debajo de un valor dado.

En esta misma asignatura se pueden implementar y algoritmizar métodos que posteriormente se estudiarán en la Matemática numérica, tal como se recomienda en (Ansola, Carlos, & Carrasco, 2016). Para ello, se pueden formular enunciados como el siguiente, que vinculan los contenidos de esta matemática con la Matemática I (Cálculo diferencial e integral de una variable), que se imparte en el mismo semestre en IP.:

El método de los trapecios para hallar aproximadamente una integral definida de una función, consiste en dividir el intervalo de integración en n subintervalos iguales y calcular en cada uno de ellos el área del trapecio entre los puntos del subintervalo. La suma de estas áreas será aproximadamente igual al valor de la integral. Elabore un algoritmo en seudocódigo que permita calcular aproximadamente la integral $\int_1^2 x^2 dx$ *con 16 subintervalos.*

Conclusiones

Los resultados que se presentan muestran que es posible transgredir las fronteras entre estas disciplinas, lo que ha beneficiado el aprendizaje de los estudiantes.

En el ejercicio de la profesión, un Ingeniero Informático puede desempeñar diferentes roles. La carrera durante el desarrollo del proceso docente educativo realiza las acciones intencionadas que contribuyen a su formación. En el caso de la Disciplina de Matemática Superior, las habilidades que se potencian están asociadas a los roles de Ingeniero de requisitos, Analista de datos, Programador, Gestor de proyectos, Diseñador de software, Diseñador de base de datos y Escritor-Expositor de trabajos técnicos.

En la carrera se le concede importancia a las matemáticas a partir de las asignaturas de las disciplinas de IGS porque aplica una nueva forma de resolver un problema matemático desde su cuerpo de conocimiento (Programación, Ingeniería de Software y Gestión de Software).

Referencias bibliográficas

Álvarez, M., Martínez, F. y Machado, E. (2015). Presupuestos transdisciplinarios para desarrollar la competencia comunicativa oral en idioma inglés en los profesionales de la cultura física. *Revista Cubana de Educación Superior, Sept-Dic*(3), 62-75.

Ansola, E., Carlos, E. y Carrasco, T. (2016). Transformaciones en la enseñanza de la Matemática Numérica en la carrera de Ingeniería Informática. En E. Mariscal, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29.* (págs. 1334-1342). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME, A.C.

Carrizo, L. (1998). Pensamiento complejo y transdisciplinariedad. *Nodo Rivera de Pensamiento Complejo, Casa de la Universidad, Rivera, Uruguay*.

CUJAE. (2017). *Plan de Estudio E. Carrera de Ingeniería Informática.* Facultad de Ingeniería Informática. Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría".

de la Herrán, A. (2011). Complejidad y Transdisciplinariedad. *Revista Educação Skepsis, 2*(1), 294-320.

Garcia, M. (2008). *Una aproximación interpretativa_visionaria de las universidades en el marco de la transdisciplinariedad*. Recuperado el 29 de junio de 2017, de www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r-1/nv-772/a-10406/10406.pdf

Genero, M., Cruz-Lemus, J. y Piattini, M. G. (2014). *Métodos de investigación en Ingeniería de Software.* Ra-Ma.

Hevner, A. y Chatterjee, S. (2010). Design research in information systems: Theory and Practices. En R. Sharda, & S. Vo B (Edits.), *Integrated series in informations systems* (Vol. 22). Springer.

Mora, M. (s.f.). *Introducción a la teoría de números.* Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Nicolescu, B. (1998). *La transdisciplinariedad, una nueva visión del mundo. Manifiesto.* Paris: Ediciones Du Rocher.

OMG. (2015). *OMG Unified Modeling Language. Version 2.5.* Obtenido de http://www.omg.org/spec/UML/2.5/PDF

Pérez, N. y Setién, E. (2008). La interdisciplinariedad y la transdisciplinariedad en las ciencias: una mirada a la teoría bibliológico-informativa. *Acimed, 18*(4).

Sánchez, E. (2010). Multidisciplinariedad, interdisciplinariedad, transdisciplinariedad. *Archivos de bronconeumología, 46*(supl 1), 50-52.

Taboarda, M., Copertani, S., Ruiz, E., Gurevich, E. y Firpo, V. (2005). *Ciencias sociales e interdisciplinariedad: relación entre teoría y práctica.* Recuperado el 3 de febrero de 2017, de http://www.puentes.gov.ar/educar/servlet/dpwnloads/s-colecciones.fin/aun0402.pdf

Trejos, O. (2014). Algoritmo recursivo diferente para hallar los elementos de la serie de Fibnacci usando la Programación funcional. *AVANCES, 11*(2), 19-28.

Valencia, A., Muñoz, L., Mejías, L., Restrepo, G., Parra, C. y Ochoa, J. (2008). *La interdisciplariedad en Ingeniería*. Recuperado el 24 de junio de 2017, de ingenieria.udea.edu.co/producciones/ingenieria_sociedad/interdisciplinariedad_ingenieria.pdf

ACTIVIDADES AUTOEVALUATIVAS EN LINEA PARA FAVORECER LA COMPRENSION DE CONTENIDO MATEMATICO EN LA MODALIDAD SEMIPRESENCIAL

Ana María Olachea, Fernando Javier Caniffi, Adriana Mónica Peccia
Universidad Nacional de Luján. (Argentina)
anamaolachea@gmail.com, fcaniffi@yahoo.com.ar, adriana.peccia@tecnoforum.com.ar

Resumen

La presente comunicación relata la experiencia inicial en la realización de Actividades Autoevaluativas en Línea (AAL) incluidas en la evaluación continua de la modalidad semipresencial de un curso de Matemática II de la Universidad Nacional de Luján (UNLu) en el año 2016. La actividad propuesta pretende favorecer la comprensión del conocimiento conceptual para que los estudiantes adquieran solidez argumental al explicar y relacionar conceptos, como así también en su uso para plantear y resolver problemas. La metodología es de carácter exploratorio y se observa una mejora en el rendimiento general de los estudiantes y en la calidad de sus argumentaciones.

Palabras clave: evaluación continua, autoevaluaciones, comprensión, conceptos.

Abstract

This work reports the initial experience in the fulfillment of Online Self-Assessment Activities (AAL) included in the continuous assessment of the blended mode of a Mathematics II course at the National University of Luján (UNLu) in the year 2016. The proposed activity aims to favor the understanding of conceptual knowledge so that the students acquire sound argument for explaining and relating concepts, as well as for its use to pose and solve problems. The methodology is exploratory-type, and there is an improvement in the students' overall performance and quality of their line of argument, as well.

Key words: continuous evaluation, self-evaluation, comprehension, concepts.

Introducción

La experiencia que se reporta se encuadra en la línea de la evaluación continua para un curso de modalidad semipresencial y la comprensión de contenido matemático. Surge de observar, que los estudiantes carecen de solidez argumental para comprender conceptos y relacionarlos. Por ejemplo, los estudiantes derivan, hallan la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, encuentran funciones marginales, y sin embargo, no pueden explicar el concepto de derivada en un punto. Así pues, los estudiantes mecanizan técnicas para calcular límites, derivar o integrar, y automatizan la resolución de problemas, sin poder

expresar con sus propias palabras que es lo que están haciendo y porqué. En resumen, no explican lo que no comprenden.

Es muy común que los estudiantes echen las culpas de sus dificultades a la matemática propiamente dicha, como así también, que los docentes subestimen la enseñanza de conceptos en sus clases. La cuestión es que la conceptualización es esencial para el desarrollo cognitivo, el problema es la falta de comprensión conceptual y esta debe resolverse dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje.

La estrategia es promover el aprendizaje de conceptos. El aprendizaje conceptual consiste en la comprensión de nuevos conceptos a partir de la comprensión de los conceptos relevantes ya adquiridos. La pregunta que orienta el trabajo es: ¿Qué actividad puede el estudiante desarrollar en el curso semipresencial que le permita reforzar la comprensión de los conocimientos conceptuales adquiridos?

En la búsqueda del instrumento para llevar adelante esta estrategia, se repara en que el sistema de evaluación continua y las posibilidades que otorga el aula virtual del curso habilitan confeccionar Actividades Autoevaluativas en Línea (AAL). Estas actividades, de carácter formativas, hacen a la comprensión del conocimiento conceptual y sus futuras relaciones y aplicaciones. Su realización reflejaría mejoras en el rendimiento académico de los estudiantes en otras actividades integradoras del curso.

El objetivo de este trabajo es optimizar el proceso de la asimilación y recuperación del conocimiento conceptual de los estudiantes, y así aumentar su conciencia sobre las operaciones y decisiones mentales a efectuar cuando aprende un nuevo contenido, argumenta alguna cuestión o plantea y resuelve problemas.

Referentes teóricos

La importancia de la evaluación continua

Los estudiantes tradicionalmente conciben la evaluación más para aprobar que para aprender, y por ende enfocan su aprendizaje en función del tipo de evaluación. La estrategia formulada en este trabajo entiende la evaluación como un elemento inherente al proceso de enseñanza – aprendizaje y como un instrumento al servicio de dicho proceso.

La modalidad semipresencial junto a la incorporación de las Tics genera nuevos sistemas de evaluación configurados no solo para evaluar y calificar el final de un curso, sino que para proponer una serie de actividades, de carácter evaluables, que faciliten la asimilación conceptual y el desarrollo progresivo de las competencias. Así es como la evaluación se convierte en continua o progresiva. La idea central de la evaluación continua convenida en este contexto se entiende como *"*un instrumento fundamental para regular la intervención docente a lo largo del proceso, y al mismo tiempo un elemento útil para que el estudiante pueda autorregular su propio proceso de aprendizaje*"* (Coll, Rochera Villach, Mayordomo Saiz, Naranjo Llanos, 2008, p. 16). La evaluación continua apuesta por el aprendizaje significativo:

> Aquellos estudiantes que participan de la evaluación continua tienen mayores garantías de superar la asignatura que el resto, porque han asimilado en forma gradual los contenidos más importantes de la materia y porque han desarrollado también de manera progresiva las competencias. (Delgado García y Oliver, 2006, p.3)

Por lo que se refiere a la forma de evaluar en esta experiencia, la evaluación formativa, trata de proporcionar información con el fin de tomar decisiones de cara a la orientación de los estudiantes conforme éstos van siendo evaluados. Así pues, esta evaluación procesual "pretende que el estudiante corrija defectos y confusiones, supere dificultades y adquiera competencias que se han detectado ausentes en la prueba o trabajo de evaluación propuesto*"* (García Aretio, 1994, p. 425). El mismo autor asevera que la "evaluación formativa es punto de partida para la asimilación de nuevos aprendizajes o para la rectificación de los mal adquiridos*"*.

En la evaluación de contenido conceptual no se pretende que el estudiante reproduzca literalmente una definición, ni que memorice una propiedad y su demostración. Se apela a "evaluar la adquisición significativa del conocimiento declarativo de las estrategias de aprendizaje, en relación al establecimiento de relaciones significativas*"* (Monereo, Castelló, Clariana, Palma, Pérez Cabani, 2009, p.103). En este sentido, recomiendan reconocimiento de la definición, que suele llevarse a la práctica mediante los conocidos test de elección múltiple

Las Actividades Autoevaluativas en Línea (AAL) son Pruebas Objetivas con respuesta de selección múltiple de doble y triple alternativa. Entre las ventajas reveladas por García Aretio (1994) se cuenta con la comprobación de la comprensión de principios, generalizaciones y grado de creencias en conceptos erróneos muy extendidos, poder englobar una muestra amplia de contenidos, etc.

La importancia de los conceptos

Para referenciar nuestra línea de acción dentro de la matemática educativa, sostenemos que la comprensión de contenido matemático depende del eficaz desarrollo y empleo de los conceptos y se fundamenta bajo la respuesta a la pregunta ¿por qué conceptos?: "porque sin conceptos no hay comprensión, no hay desarrollo cognitivo" (Moreira, 2010, p.9)

Para la Teoría del aprendizaje significativo pensada por Ausubel (1976) el aprendizaje significativo es aquel que se construye a partir del conocimiento previo anclado en la estructura cognitiva. Moreira (2003, p.1) señala que:

Es preciso entender que el aprendizaje es significativo cuando nuevos conocimientos (conceptos, ideas, proposiciones, modelos, fórmulas) pasan a significar algo para el aprendiz, cuando él o ella es capaz de explicar situaciones con sus propias palabras, cuando es capaz de resolver problemas nuevos, en fin, cuando comprende.

Por otro lado, Vergnaud (2006) formula la Teoría de los campos conceptuales, la presenta como una teoría psicológica del concepto entendida como la conceptualización de lo real. Gerard Vergnaud entiende que los conceptos se construyen con solidaridad de otros conceptos, que un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. Como discípulo de Jean Piaget asume que "el conocimiento es adaptación; y añade asimilación y acomodación: asimilación del conocimiento nuevo al antiguo y acomodación a lo que no ha sido previsto, a la contingencia" (Vergnaud, 2007, p. 285), y presenta su teoría basada en la conceptualización contenida en los esquemas. Sostiene que tanto Ausubel como Piaget se interesan en mirar cómo y en qué condiciones el estudiante intenta comprender conocimientos nuevos, pero no señalan la articulación esquema-situación como piedra angular del conocimiento.

El concepto de situación es sustancial. Sureda Figueroa y Otero (2010) hacen notar que los procesos cognitivos y las respuestas del estudiante, son en función de las situaciones a las cuales son confrontados. De esta manera, existe una relación dialéctica entre los conceptos y situaciones: "cuántas más situaciones domina el aprendiz, más conceptualiza, pero conceptualizando, él se va haciendo capaz de dominar situaciones cada vez más complejas" (Moreira, 2010, p.10).

La teoría de Vergnaud (2006, p. 285) afirma que "un estudiante expresa sus conocimientos por su manera de actuar en situación (forma operativa) y por enunciados y situaciones que es capaz de explicar (forma predicativa). Se hace hincapié en que el conocimiento es tanto saber hacer como saber expresarlo.

La Teoría de los campos conceptuales aporta un nuevo abordaje del aprendizaje significativo, sobre todo en lo que se refiere a los conceptos.

Contexto de la experiencia y diseño de la modalidad semipresencial

Matemática II es una asignatura que forma parte de las matemáticas básicas para las carreras de Licenciatura en Administración y de Contador Público en la Universidad Nacional de Luján. La misma, en carácter de contracursada, se dicta en el primer cuatrimestre bajo la modalidad semipresencial. Los contenidos de la asignatura tratan sobre el cálculo diferencial e integral para funciones de una variable.

Los elementos claves de la modalidad semipresencial son: el material didáctico, la tutoría, las vías de comunicación y el sistema de evaluación. La asignatura dispone de un campus virtual para el dictado del curso.

Con respecto al sistema de evaluación se distinguen las evaluaciones presenciales de características similares al sistema presencial (dos parciales, una recuperatoria en caso de corresponder y una final), y evaluaciones domiciliarias conformadas por Actividades Prácticas Integradoras (API) y Actividades Autoevaluativas en Línea (AAL). Ambas de carácter formativas.

Las API son actividades escritas integradoras de varios bloques temáticos que incluyen ejercicios y problemas de aplicación teórico-prácticos. Las AAL se instrumentan como pruebas objetivas de respuesta de doble y triple alternativas publicadas en el aula virtual, concernientes al contenido conceptual y se realizan al finalizar cada bloque temático. Se caracterizan por una corrección inmediata, confiable y objetiva. Para los estudiantes resultan voluntarias e individuales.

Metodología

La experiencia se efectúo sobre un grupo de 76 estudiantes de un curso de Matemática II semipresencial de la UNLu., la misma se realizó bajo carácter exploratorio y se reportó bajo corte cualitativo y cuantitativo.

Los estudiantes asistieron a una tutoría presencial semanal (instancia obligatoria), en la cual recibieron la orientación para desarrollar los contenidos del curso que se presentan desplegados en bloques temáticos

(BT). Los contenidos fueron tratados en forma total en el texto base obligatorio y complementados con la ayuda de una guía didáctica para cada bloque temático, lecturas obligatorias y ampliatorias, material adicional (mapas conceptuales, material dinámico en GeoGebra, etc.).

En el transcurso de la semana, accedieron al aula virtual a efectuar distintas actividades, entre ellas, las AAL al finalizar cada bloque.

Para esta experiencia se expusieron las AAL siguientes: AAL BT 0: Funciones elementales básicas, AAL BT 1: Aplicación económica de la función lineal y AAL BT 2: Límite y Continuidad de funciones de una variable.

Cada AAL constó de 30 proposiciones, a las cuales los estudiantes, tras una breve elaboración de la respuesta, identificaron la correcta entre dos o tres alternativas. Al finalizar, en forma instantánea, conocieron el porcentaje de aprobación y el registro de sus respuestas correctas e incorrectas con las pertinentes aclaraciones. A partir de entonces, el estudiante mediante la revisión del material de estudio o la consulta tutorial (presencial o virtual) evacuaron todas sus dudas a fin de corregir los errores cometidos. Se consideraron aprobadas cuando el estudiante respondió más del 52% en forma correcta. A modo de ejemplo, se exhiben unas de las proposiciones en las que los estudiantes debieron indicar su valor de verdad:

- *La función* $f(x) = \log(2x)$ *presenta un punto de infinito* en $x_0 = 0$.
- *La función* $g(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ *es continua en el intervalo* $[0,3]$.

Luego del desarrollo de los tres bloques temáticos, los estudiantes efectuaron una Actividad Práctica Integradora de los mismos. La misma fue evaluada indicando el nivel de satisfacción alcanzado hasta ese momento: Muy Satisfactorio (MS), Satisfactorio (S), Parcialmente Satisfactorio (S), Poco Satisfactorio (PS) y Nada Satisfactorio (NS).

Asimismo, la API N° 1 entre sus ítems contó con una actividad referida al Teorema de la existencia de ceros, a saber: "*Item 3: Argumentar por qué puede afirmarse que la función* $h(x) = \cos x + x\sin x - x^2$ *se anula en un punto interior del intervalo* $[0, \pi]$".

Resultados y algunas consideraciones

Para recabar información se tuvo en cuenta los registros de las AAL, el rendimiento alcanzado en la API N° 1, la argumentación del ítem 6 de la misma API y el tramo referido a las AAL en una encuesta final del curso.

Los estudiantes efectuaron las AAL con regularidad y de sus registros surge que un 57,90 % realizó las tres AAL, seguido un 32,90 % para los que efectuaron dos de las AAL propuestas, un 5,30% solo una, y 3,90% ninguna.

Los resultados de la experiencia muestran una mejora en el rendimiento general, y esto se evidencia en la actividad integradora de los tres bloques temáticos. A continuación, se exhibe la Tabla 1 comparando el rendimiento del año 2015, en el cual no se realizaron AAL, y el año 2016.

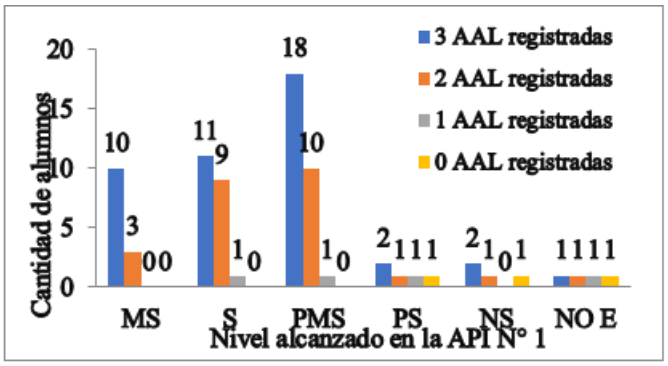
Tabla 1: *Comparación rendimiento API N° 1 – años 2015-2016.*

	Nivel alcanzado en API N° 1						
Año	MS	S	PMS	PS	NS	NO E	Total
2015	5	12	26	12	9	17	80
2016	13	21	29	5	4	4	76

Los estudiantes alcanzaron un nivel de satisfacción mayor en la API N° 1 del año 2016: Un 82,8 % logró un nivel entre Parcialmente satisfactorio y Muy satisfactorio, contra un 53 % del año 2015.

Con respecto al grupo de estudiantes que obtuvieron alto nivel de satisfacción (MS-S-PMS) en la API N° 1 (Gráfica 1) se advierte que varía la cantidad de AAL realizadas por los estudiantes. Vale indicar que los estudiantes que alcanzaron el máximo nivel de satisfacción (MS) efectuaron las tres o dos de las tres AAL.

En otro extremo, se observa estudiantes que no realizaron ninguna de las AAL y solo han obtenido niveles Poco y Nada satisfactorio.



Gráfica 1: Rendimiento en la API N° 1 acorde la cantidad de AAL realizadas por los estudiantes.

Uno de los aspectos claves que evidencia la comprensión de los conceptos, sus propiedades y aplicaciones es cuando el estudiante puede explicar lo que hace.
Para la corrección del ítem 3 se tuvo en cuenta los siguientes criterios:

Tabla 2: *Criterios de corrección del ítem 3*

Correcta	Enuncia y verifica el cumplimiento de las dos premisas del Teorema de la existencia de ceros.
Parcialmente correcta	Enuncia las dos premisas, pero no justifica una de ellas. Enuncia las dos premisas, pero no verifica una correctamente.
No correcta	Enuncia y verifica solo una de las premisas. No enuncia las premisas debidamente.

En la argumentación del Item 3 de la API Nº1, se registró un 39 % con justificación correcta. A continuación se exponen dos casos donde las argumentaciones dadas por estudiantes resultan adecuadas.

Primer caso: Estudiante A.
Registro AAL: Aprobadas las tres AAL.
Argumentación Item 3 del API N° 1:

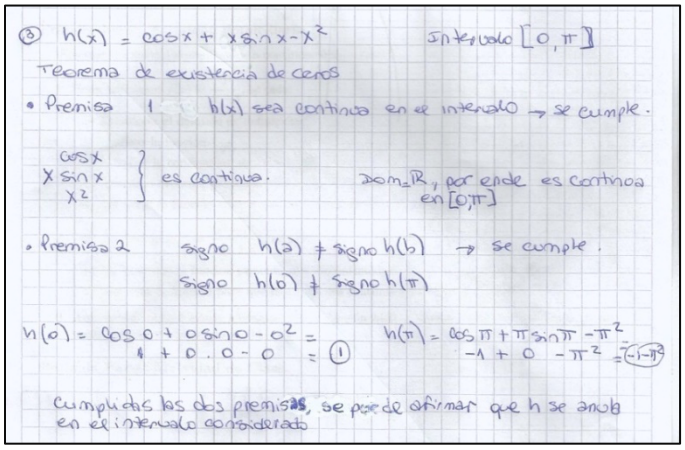


Figura 1: Argumentación Estudiante A

Observación: El caso muestra indicio de la relación entre la realización de las autoevaluaciones en forma satisfactoria y el grado de comprensión a partir de la argumentación dada.

Segundo caso: Estudiante B.
Registro AAL: BT O: Aprobada – BT 1: No realizada – BT 2: No aprobada.
Argumentación Item 3 del API N° 1:

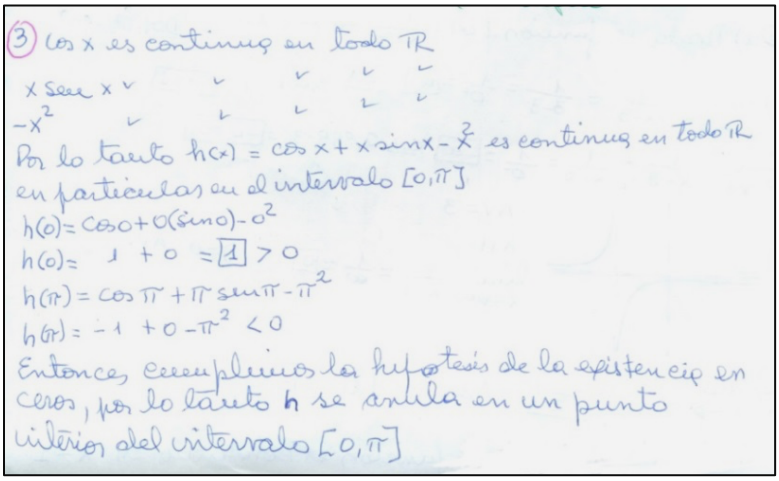


***Figura 2*:** Argumentación Estudiante B.

Observación: En este caso se señala que la estudiante no aprobó AAL relacionada con el ítem considerado, lo cual, muestra un indicio de efecto correctivo en referencia a los propósitos de la evaluación formativa.

En ambos casos se advierte un orden lógico en la argumentación: primero se justifica la continuidad de la función en el intervalo considerado, luego se verifica los signos de los valores de la función en los extremos, y seguidamente se infiere que se cumplen las dos premisas de la hipótesis del Teorema de existencia de ceros. La redacción tanto coloquial como simbólica es precisa y clara, principalmente en el segundo caso.

Con respecto a las argumentaciones realizadas y corregidas como Parcialmente correctas (un 35%) se percibió que, por ejemplo, indicaban que la función era continua en el intervalo pero no aclaraban porqué. En tanto, en aquellas argumentaciones no correctas (un 17%) se advirtió que los estudiantes solo planteaban el cumplimiento de una de las premisas de la hipótesis, la mayor parte de ellos verificaron la premisa referida a los signos opuestos de la función en los extremos. Por último, el 9% de los estudiantes no respondió.

Con el objetivo de que los estudiantes valoren la experiencia se incluyó en la encuesta de final de curso la siguiente pregunta: ¿*Qué grado de utilidad le otorga a la realización de las AAL para reforzar la comprensión de los contenidos desarrollados durante el curso*?

Completada la encuesta por 44 estudiantes, las respuestas fueron: Útil (66%), Parcialmente útil (25%), No útil (7%) y no respondió (2%). Luego, se les ofreció un espacio para expresar un comentario sobre los beneficios que otorga este tipo de actividad autoevaluativa, y al respecto, expresaron que pudieron mantener el ritmo de estudio, mejorar su rendimiento en el avance de las actividades, pudieron reforzar la comprensión de muchos conceptos y se sintieron motivados.

Consideración Final

De la experiencia surge que la estrategia pensada para optimizar el aprendizaje conceptual resulta adecuada y conveniente, y por otro lado, que la evaluación continua favorece la incorporación gradual de los contenidos y competencias a desarrollar en un curso dando lugar a la mejora del rendimiento.

Como consideración final se expresa que las Actividades Autoevaluativas en Línea en el marco de la evaluación continua de la modalidad semipresencial pueden ser instrumentos útiles para obtener evidencia del aprendizaje comprensivo de los estudiantes.
Por último, se espera que este trabajo sea un punto de partida para profundizar o generar futuras investigaciones.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D.P., (1976). *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Coll, S., Rochera Villach, M.J., Mayordomo Saiz, R.M. y Naranjo Llanos, M., (2008). *La evaluación continuada como instrumento de ajuste de la ayuda pedagógica y la enseñanza de competencias de autorregulación*. Cuadernos de docencia universitaria. Barcelona: Ediciones Octaedro.

Delgado, A. y Oliver, R. (2006). La evaluación continua en un nuevo escenario docente. *Revista de Universidad y Sociedad del conocimiento*, *3*(1), 1-13.

García, J. (1994). *Educación a distancia, hoy*. Madrid: UNED.

Monereo, C (Coord.), Castelló, M., Clariana, M. Palma, M. y Pérez Cabani, M.L.(2009). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje.* España: Publidisa.

Moreira, M.A. (2010). ¿Por qué conceptos? ¿Por qué aprendizaje significativo? ¿Por qué actividades colaborativas? ¿Por qué mapas conceptuales? *Revista Qurriculum, 23*, 9-23. Disponible en: http://revistaq.webs.ull.es/ANTERIORES/numero23/moreira.pdf

Moreira, M.A. (2003). *Lenguaje y Aprendizaje significativo*. Recuperado el 12 de diciembre de 2016 de https://www.if.ufrgs.br/~moreira/lenguaje.pdf.

Vergnaud, G. (2007). ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?. *Revista Investigações em Ensino de Ciências, 12*(2), 285-302. Disponible en: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID172/v12_n2_a2007.pdf.

Sureda, P. y Otero, M. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los campos conceptuales. *Revista Electrónica de Investigación en educación de las ciencias, 6*(2), 124-138.

APROXIMACIÓN Y MODELADO CON B-SPLINES USANDO EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Juan Rafael Garibay Bermúdez
Universidad Nacional autónoma de México. (México)
egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx, egor1131@unam.mx

Resumen

El método del elemento finito ha llegado a ser aceptado ampliamente como una técnica de propósito general en el modelado numérico y en matemáticas aplicadas. Las principales aplicaciones se presentan en la mecánica del medio continuo, flujo de fluidos, y teoría de campos. En dichas áreas los métodos computacionales son esenciales y se benefician de manera importante, debido a los grandes avances de la tecnología computacional. Los conceptos matemáticos fundamentales han sido introducidos hace mucho tiempo antes de que se reconociera su práctica potencial. Ahora, varios aspectos de las técnicas del elemento finito continúan siendo el área central de la investigación, ingeniería y desarrollo. Los splines juegan un papel importante en aproximación y modelado geométrico. Son usados en ajuste de datos, diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en inglés), manufactura automatizada (CAM, por sus siglas en inglés) y graficas por computadora. (Höllig, 2002)

Palabras clave: B-spline, étmodo del elemento finito

Abstract

The finite element method has become the most widely accepted general purpose technique for numerical modeling in engineering and applied mathematics. Principal applications arise in continuum mechanics, fluid flow, thermodynamics, and field theory. In these areas computational methods are essential and benefit strongly from the major advances in computer technology. The fundamental mathematical concepts had been introduced long before their practical potential was recognized. Now, various aspects of finite element techniques remain a central area of engineering research and development. Splines play an important role in approximation and geometric modeling. They are used in data fitting, computer-aided design (CAD), computer-aided manufacturing (CAM), and computer-aided graphics (Höllig, 2002).

Key words: B-spline, finite element method

Introducción

En este reporte de investigación se aborda el tema de la aproximación y el modelado con B-splines, usando el método del elemento finto; la conjunción entre los dos objetos matemáticos citados es uno de los métodos de reciente aplicación; sin embargo, el desarrollo de los objetos mencionados tiene una larga historia (figura 1). Por primera vez se usó el término "método del elemento finito" por Clough (R. Clough,

1996), las ideas claves datan de mucho antes; como se muestra en la figura 1. Ritz resolvió problemas variacionales con aproximaciones de dimensión finita; un acercamiento ya empleado por Rayleigh. Siguiendo las observaciones hechas por Bubnow, Galerkin realizó soluciones aproximadas de problemas con valores en la frontera directamente, sin recurrir a la formulación variacional. Ahora, después de más de30 años varios aspectos del método del elemento finito conservan la idea central tanto en investigación, como en desarrollo e ingeniería.

Los splines juegan un rol importante en aproximación y modelado geométrico. Son usados en ajuste de datos, diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en ingles Computer-Aided Design), manufactura automatizada (CAM, por sus siglas en ingles Computer-Aided Manufacature), y graficas por computadora. Un amplio repertorio de software está disponible y sus algoritmos son muy eficientes expresados como polinomios. El primer trabajo de Schoenberg revelo que los splines poseen poderosas propiedades de aproximación. Subsecuentemente, muchos esquemas de aproximación han sido propuestos; en particular después de los resultados de, de Boor, acerca de los B-splines, estos llegaron a ser populares para un amplio rango de aplicaciones; sus algoritmos son actualmente los bloques básicos en la construcción de la mayoría del software sobre splines. Otra importante contribución se debe a Bezier quien introdujo los polinomios segmentarios para el modelado CAD/CAM.

La indagatoria está sustentada en la metodología de la transposición didáctica y se propone poner en práctica con estudiantes de algunas carreras de ingeniería; es decir la investigación está en proceso. Así mismo, la indagatoria se fundamenta con los elementos que debe de contener toda investigación con carácter científico tal como lo propone la corriente de estudiosos de la matemática educativa en México y el mundo. Por tanto este documento consistirá de las secciones que se refieren a la descripción de los aspectos matemáticos considerados en el modelado y la aproximación numérica, al planteamiento del problema de investigación acompañado de la hipótesis correspondiente, otra sección es la que se refiere al marco teórico de los objetos matemáticos. Se describe brevemente la metodología utilizada y se describen los resultados esperados.

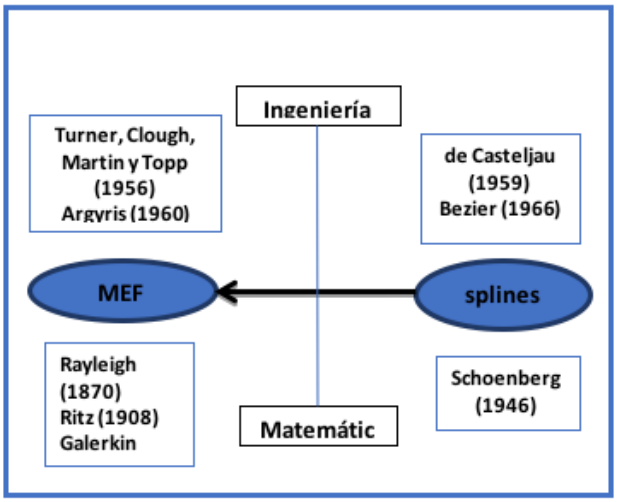


Figura 1. Desarrollo histórico del Elemento Finito y de los Splines
(MEF, significa Método del Elemento Finito, por sus siglas en español)

Justificación

Uno de los elementos fundamentales del andamiaje es el planteamiento de un problema en el contexto de la ingeniería, el cual consiste en un caso propio para los estudiantes de las carreras de ingeniería y Tecnología; por ejemplo, se podría citar el fenómeno de convección y difusión del calor en un material cualquiera (metal, plásticos, etc.) y su representación mediante un mapa bidimensional o tridimensional obtenido mediante el B-spline a través del elemento finito.

Algunos otros casos en el ámbito o contexto de los estudiantes de la carrera Licenciado en Tecnología, podrían consistir en determinar los modelos matemáticos obtenidos mediante el método B-spline en elemento finito, correspondientes a fenómenos tales como el comportamiento de campos gravitacionales o magnéticos, fenómenos asociados al comportamiento de los materiales sujetos a altas o bajas temperaturas, o al comportamiento de materiales diseñados con propósitos biofísicos o bien modelos representativos de fenómenos sociales y financieros, entre otros fenómenos.

El planteamiento de los casos mencionados tiene como propósito mostrar la utilidad práctica del objeto de estudio en cuestión; así como, el de producir en el estudiante el motivo y significado del aprendizaje del objeto matemático planteado.

La experimentación se ha diseñado para estudiantes de las carreras de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Ingeniería Química y Licenciatura en Tecnología (Ramos, 2012). Consiste en mostrar todas aquellas herramientas matemáticas que intervienen en el modelado aquí tratado; es decir, se le indicará al estudiante cuales son los antecedentes matemáticos requeridos, para que se asegure de que los pueda conocer y dominar; lo cual le permitirá el acceso al proceso de aprendizaje.

Planteamiento del problema

Se requiere del diseño de un modelo o andamiaje didáctico con fundamento en los conceptos propios de la teoría socio epistemológica, para proveer al estudiante el medio adecuado para la apropiación del conocimiento del objeto matemático B-spline en elemento finito.
Hipótesis

Al mostrar y poner al alcance de los estudiantes las antecedentes cognitivos requeridos en el proceso que define al objeto matemático en estudio, se podría conseguir la trasposición didáctica por el estudiante.

Metodología

Para el propósito de la apropiación del conocimiento del objeto matemático tratado, se considera en esta indagatoria, los fundamentos de la teoría de la transposición didáctica, la cual ha sido desarrollada por algunos estudiosos de la matemática educativa. Los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, etc.), que son procesos específicamente humanos, y son los que permiten apropiarse del conocimiento de un objeto de estudio, tienen su origen en la vida social, es decir, se

constituyen a partir de la mediación y de la internalización, de prácticas sociales y de instrumentos creados culturalmente, como es el caso de la transposición didáctica. Por lo tanto la apropiación del conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura; es decir, se adquieren primero en un contexto social y luego se internalizan. Se resaltan los aportes a la transposición didáctica de Chevallard, quien afirma que esta metodología se entiende como un proceso mediante el que se modifica un contenido del saber matemático para implementarlo para su enseñanza, lo cual conduce a la transformación del saber sabio al saber enseñado y así ponerlo al alcance del estudiante (Chevallard, 1991). Tall y Farfan reportan en sus indagatorias que se ha encontrado con que los estudiantes tienen ciertas dificultades para adentrarse en el análisis conceptual básico, de acuerdo con las investigaciones didácticas que se han realizado en este campo durante las últimas décadas, que así lo demuestran claramente (Tall, 1991. Farfán, 1993). Lo cual además permite identificar los obstáculos; así como, la naturaleza de las dificultades de los estudiantes y las fallas de las estrategias de enseñanza comúnmente utilizadas, como son las que se fundamentan en un proceso algorítmico; y aquellas fundamentadas en los desarrollos de los conceptos o formulaciones matemáticas teóricas. Así pues, nos proponemos establecer mediante la conceptualización teórica de la transposición didáctica los objetivos estratégicos específicos:

a). Promover, la actividad del estudiante para realizar tareas de investigación. Los medios de operar para conseguir este objetivo serán:

i) Diseñar y aplicar el entramado pedagógico que descanse más en la actividad del estudiante que en la labor informativa del maestro y que se oriente a eliminar la recepción pasiva de información, sustituyéndola por su análisis y comprensión. Dicho entramado requiere de realizar una síntesis por parte del estudiante de la definición o desarrollo del objeto matemático; para esta tarea se le proporciona al estudiante las referencias actuales y pertinentes del objeto de estudio indicando los antecedentes necesarios para su comprensión, otros elementos del entramado consisten en resolver casos de estudio y diseñar el programa por computadora para la solución del problema propuesto, así como realizar prácticas mediante uso de software interactivo; así mismo, efectuar una evaluación de las actividades del estudiante para llevar a cabo una retroalimentación, si es necesario.

ii) Conjuntar la comprensión de la teoría con su aplicación práctica. Propiciar en el estudiante la búsqueda y organización de la información. Preparar al estudiante en el uso personal de material informativo, como condición del auto-aprendizaje.

iii) Establecer sistemas de evaluación de conocimientos para considerar, junto con el aprendizaje, el logro de habilidades y hábitos positivos, que propicien una educación continua. Llevar a cabo reuniones y cursos con el personal docente para reorientar la enseñanza bajo los principios anteriores.

b). Facilitar al estudiante, la información de actualidad de la más alta calidad, con el propósito de estimular el proceso de auto desarrollo. Para la consecución de este objetivo estratégico se propone:

i). Establecer los medios que permitan el flujo, hacia la docencia, de la información sobre el desarrollo de la ciencia y la auto-evaluación y superación constante de la calidad del material informativo utilizado en la enseñanza.

ii) Implementar y aplicar la metodología para la transmisión del conocimiento de manera eficaz, que permita distribuir la información de mayor calidad al mayor número de personas en el menor tiempo posible.

Conceptualización del Método del Elemento Finito y de los Splines

Una descripción grafica de los conceptos para definir el objeto matemático se muestra en el diagrama de la figura 2.

Conceptos Básicos del Elemento Finito

Aquí se explica el esquema clásico de Ritz-Galerkin, para la ecuación de Poisson, la cual sirve como modelo típico del problema. Posteriormente se consideran ejemplos de las funciones base definidas para rejillas triangulares o cuadradas. Los elementos finitos estándar son discutidos de una manera muy breve, solamente para indicar la diferencia entre los splines con peso ponderado y los splines con elemento finito. Después de introducir brevemente los conceptos del espacio de Sobolev se formula el método del elemento finito en un resumen de configuración. En particular se define el concepto de elepticidad y se prueba el teorema de existencia de Lax-Milgram para problemas variacionales. Por último en esta sección se manejan dos estimaciones básicas de error: la desigualdad de Céa y el principio de dualidad de Aubin y Nitsche.

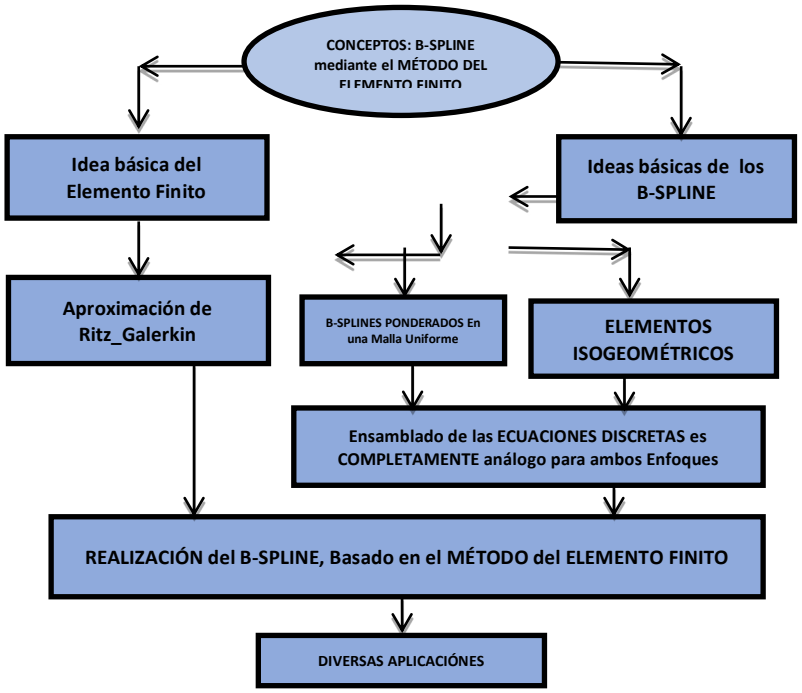


Figura 2. Diagrama que expresa la definición de los conceptos del objeto matemático tratado en la indagatoria

Conceptos Básicos de B-splines

En esta sección se definen los B-Splines y se describen las identidades y algoritmos, particularmente útiles para implementar los esquemas del elemento finito. Para un refinamiento local se tiene que usar bases jerárquicas más que las estrategias de inserción de nodos, la cual podría tener un efecto global. Entonces los B-splines uniformes son adecuados para aproximación multivariada y por supuesto mucho más simple desde un punto de vista computacional.

Funciones Básicas del Elemento Finito

En la investigación esta sección está dedicada a la construcción de las funciones básicas del elemento finito en una rejilla regular, usando B-splines. Los métodos resultantes proporcionan un enlace natural del modelado geométrico y la simulación numérica. Estos elementos comparten todas las ventajas de la aproximación estándar con elemento finito y las representaciones con B-splines. En particular, no se requiere de la generación de mallas o rejillas y es posible una muy buena exactitud en las soluciones con muy pocos parámetros relativamente. Los B-splines se expresan a partir de las bases de los splines sobre dominios limitados, como se describe en la siguiente sección de la indagatoria. Si bien es cierto que esos espacios splines tiene un orden óptimo de aproximación, ellos no establecen los requerimientos estándar del elemento finito completamente; además, las bases de los B-splines no se adaptan a las fronteras y no son uniformemente estables con respecto al ancho de la malla. Sin embargo, ambas dificultades pueden ser resueltas en una simple y elegante forma. Más adelante se muestra como incorporar fronteras homogéneas a través de funciones ponderadas y a continuación se describe un amplio procedimiento para estabilizar las bases. La combinación de ambos conceptos permite la definición de B-splines ponderados ampliados. Por último, se introducen los B-splines jerárquicos, los cuales pueden ser usados en las estrategias adaptativas de aproximación.

Aproximación con splines ponderados

Como se muestra en la definición de la aproximación de Ritz Galerkin, la convergencia del esquema del elemento finito se obtiene fácilmente de esta. La estimación fundamental corresponde a la desigualdad de Céa, la cual establece que el error en la norma de energía puede ser delimitada en términos del error de la mejor aproximación del subespacio del elemento finito. Por tanto, será suficiente analizar las propiedades de la aproximación de la función base, sin considerar específicamente los problemas de valor en la frontera discretizados. Para las bases del elemento finito introducidas en la sección anterior se obtiene el error común para un polinomio segmentario. Una estimación típica es:

$$\inf_{u_h} \|u - u_h\| \leq h^n \|u\|_{n+1}$$

Donde u_h es la aproximación ponderada de grado $\leq n$ a partir de ambos espacios; es decir, $w\mathbb{B}_h$ o $w^e\mathbb{B}_h$. Esencialmente los argumentos son análogos a la teoría estándar de los splines (Ramos, R., Aguilar, A., 2016). El desarrollo de las funciones básicas consiste en la construcción de las funciones duales. Primero se prueba que las funciones suavizadas pueden ser aproximadas por splines ponderados con orden óptimo. Luego, para obtener las formas específicas, se analiza la suavidad de los cocientes de las funciones ponderadas. Con ayuda de esos resultados se obtiene finalmente la estimación del error óptimo.

Problemas con valor en la Frontera

Aquí se discute la aproximación de un problema típico de valores en la frontera en el espacio de los splines. La ecuación diferencial que representa la solución u del problema tiene una formulación pobre tal como un problema variacional.

$$a(u,v) = \lambda(v), \qquad v \in H$$

Donde H es un espacio de Hilbert el cual incorpora las condiciones de frontera. La aproximación de Ritz-Galerkin $u_H = \sum_{i\in I} u_i B_i$ es obtenida simplemente reemplazando u por u_h y v por la función básica B_k. Aunque conceptualmente muy claro, este acercamiento cubre un amplio rango de aplicaciones. En esta sección se trata el problema no homogéneo de Poisson como un ejemplo típico de condiciones de frontera esenciales. Tales restricciones tienen que incorporarse dentro de los subespacios del elemento finito y entonces se requiere funciones ponderadas. En contraste, las condiciones de frontera naturales son satisfechas automáticamente por las soluciones de problemas variacionales y de esa manera se permite una aproximación mucho más simple. Esa situación se puede ilustrar mediante el cálculo en un problema de flujo incompresible. Luego, se combinan ambos casos y se considera una generalización de operadores diferenciales de segundo orden con coeficientes variables. Más adelante se describe el problema de una placa como un ejemplo de la ecuación de orden cuarto. Al final de la sección se dedica un apartado a la elasticidad lineal, la cual es el problema de ingeniería clásico y tal vez el más importante en el análisis del elemento finito.

Métodos Multirejillas

Para definir las bases de un B-spline uniforme, el uso de las técnicas de multirejillas se sugiere por sí mismo. Tales algoritmos proporcionan las soluciones iterativas más eficientes del sistema Ritz-Galerkin. La solución en el tiempo es proporcional al número de incógnitas, por tanto, es asintóticamente óptimo. Mientras que para las iteraciones clásicas como las sobre-relajaciones sucesivas o el promedio de la convergencia de los gradientes conjugados afectan cuando el ancho de malla llega a ser pequeño, los esquemas multi-rejilla reducen el error mediante un factor independiente de malla en cada paso. La teoría matemática correspondiente es fascinante y ha sido un área de investigaciones de mucha actividad. La teoría de multi rejillas se aplica sin mayores modificaciones a las redes splines.

Implementación

Los métodos del elemento finito con splines no requieren de la generación de mallas y por lo tanto elimina la dificultad y la etapa de consumo de tiempo de pre procesado. La construcción de funciones básicas es comparativamente rápido, en particular si las funciones ponderadas naturales están disponibles. Una vez ensambladas, el curso de la simulación del elemento finito es paralelo a las técnicas basadas en mallas. Las rejillas o mallas regulares es una ventaja definitiva en todos los estadios o etapas del cómputo. Una amplia cantidad de software para el manejo de B-splines está disponible y puede ser utilizada para el cómputo científico y para la visualización de las aproximaciones mediante el método del elemento finito.

Recomendaciones en la determinación de Resultados

La experimentación consistirá en mostrar todas aquellas herramientas matemáticas que intervienen en el modelado del B-spline, mediante el elemento finito; con objeto de que se asegure que el estudiante los conoce y que entiende su desarrollo. Cuando el estudiante manifieste dificultades en el conocimiento y dominio de los mencionados antecedentes se deberá proporcionar el apoyo necesario hasta conseguir una mejor aproximación en el dominio y aprendizaje de los antecedentes. Se espera que una vez puesto en la escena escolar universitaria la propuesta de investigación aquí considerada, se pueda observar, que mediante la metodología utilizada, el estudiante se apropie del conocimiento del objeto matemático denominado B-spline en elemento finito.

Referencias Bibliográficas

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Clough, R. (1980). The finite element method in plane stress analysis. *Computers and Structures 12(4)*, 361-370.

Höllig, K. (2002). Finite element approximation with splines. En G. Farin, J. Hoschek, and M.S. Kim (Eds.), *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. (pp. 283–308). Stuttgart: Elsevier.

Farfán, R.M. (Ed.) (1993). IV Seminario Nacional de Investigación en Didáctica del Cálculo, Monterrey, CINVESTAV-IPN, México.

Ramos, R., Aguilar A. (2016). *Interpolación, Derivación e Integración Numéricas*. México: Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Press

INFLUENCIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL ABANDONO ESTUDIANTIL EN LOS PRIMEROS AÑOS DE LAS CARRERAS DE INGENIERÍA

Teresa Carrasco Jiménez, Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez
Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", CUJAE. (Cuba)
tcarrasco@cemat.cujae.edu.cu, esther@ind.cujae.edu.cu, ecarlos@tesla.cujae.edu.cu

Resumen

Se muestran los resultados obtenidos del análisis cualitativo y cuantitativo, realizado en diferentes carreras de ingeniería de la Universidad Tecnológica de La Habana, con el objetivo de determinar la relación existente entre los factores: resultados del examen de ingreso de Matemática a la educación superior, el aprovechamiento docente en las asignaturas de Matemática I y II y Álgebra Lineal y los índices de abandono estudiantil. Se aplicaron métodos empíricos y estadísticos, sustentados en la integración de los presupuestos teóricos que brindan el enfoque histórico–cultural y las políticas y tendencias actuales con relación a la formación integral de los estudiantes.

Palabras clave: abandono estudiantil, aprovechamiento docente en matemática.

Abstract

This paper shows the results of a qualitative and quantitative analysis carried out in different engineering degree courses at the Technological University of Havana. It is aimed at determining the relationship among the following factors: the results of higher education entrance exam of Mathematics, the academic performance in the subjects Mathematics I and II and Linear Algebra and the rating of students who drop out of university. We applied empiric and statistical methods, sustained in the integration of the theoretical assumptions of the historical-cultural approach and the current policies and tendencies with respect to the students' integral education.

Key words: student dropout, teaching achievement in mathematics

Introducción

La preocupación por la deserción estudiantil en las universidades ha sido puesta de manifiesto en múltiples ocasiones, siendo objeto de análisis en el ámbito nacional e internacional. Desde el *Informe sobre la educación superior en América Latina y el Caribe 2000-2005,* ya se afirmaba que la deserción escolar o la reprobación en las universidades estaba provocando afecciones en la salud física y mental de los jóvenes, pero sobre todo un elevado costo, ya que se estimó que al año en todos los países de América Latina y el Caribe se pierden cientos de millones de dólares, producto del abandono de los estudios universitarios.

En Cuba al igual que en otros países se han realizado diferentes estudios orientados a conocer mejor las causas del abandono, las formas de combatirlo y la mejora de los índices de permanencia (Proyecto Alfa Guía, 2010). En diferentes informes de los resultados docentes finales y en encuestas aplicadas a estudiantes, se plantea como una de las causas del abandono de los estudios universitarios en los primeros años de las carreras de ingeniería, la reprobación de asignaturas de la disciplina matemática.

La enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en las Carreras de Ciencias Técnicas es de primordial importancia para la formación básica de los estudiantes, y en el contexto actual, se dirige cada vez más a que los mismos se conviertan en un sujeto mucho más activo de su aprendizaje, lo que exige la búsqueda de acciones dirigidas a fortalecer su desempeño escolar, coadyuvando a lograr estilos de aprendizaje e impulsar en la universidad modalidades innovadoras orientadas a la atención de estudiantes con insuficiencias académicas (Trejo, 2013).

El presente trabajo muestra los resultados obtenidos del análisis cualitativo y cuantitativo, realizado en una primera etapa de la investigación en diferentes carreras de ingeniería de La Universidad Tecnológica de La Habana, con el objetivo de determinar la relación existente entre los factores: resultados de los exámenes de ingreso de matemática a la educación superior, el aprovechamiento docente alcanzado en las asignaturas de Matemática I y II y Álgebra Lineal y los índices de abandono estudiantil. Para posteriormente en una segunda etapa establecer una estrategia de mentoría con el objetivo de brindar apoyo a los estudiantes que se encuentran en riesgo de rezago, deserción y/o reprobación (estudiantes mentorados), a través de asesoría académica ofrecida por estudiantes con destacado rendimiento (estudiantes mentores).

Para este estudio se aplicaron métodos empíricos y métodos de la estadística inferencial y descriptiva, sustentado todo ello en la integración de los presupuestos teóricos que brindan el enfoque histórico – cultural (Vygotsky, 1979) y las políticas y tendencias actuales con relación a la formación integral de los estudiantes (Tendencias de la educación superior en el mundo y en América Latina y el Caribe, 2008).

Antecedentes en el análisis de la deserción estudiantil en carreras de ingeniería.

La deserción estudiantil entendida como el abandono prematuro de un programa de estudios antes de alcanzar el título o grado, y considera un tiempo suficientemente largo como para descartar la posibilidad de que el estudiante se reincorpore. Ha resultado objeto de análisis por diferentes investigadores, los que afirman que la deserción en la educación superior es extremadamente compleja, ya que implica no sólo variedad en los tipos de abandono sino también los diferentes factores que influyen en este (Himmel, 2002).

En la Universidad Tecnológica de La Habana se plantea como una de las causas del abandono de los estudios universitarios en los primeros años de las carreras de ingeniería, la reprobación de asignaturas de la Disciplina Matemática, en particular en carreras como Ingeniería Mecánica. Estos resultados llevaron a que en el curso académico 2014-2015 se realizara un estudio en el primer año con el objetivo de analizar si existía relación entre los resultados docentes obtenidos en las asignaturas de la Disciplina Matemática y su relación con las notas obtenidas por los estudiantes en el examen de ingreso a la educación superior, así como el número de estudiantes que abandonaron la carrera. Los resultados obtenidos son los siguientes:

De una muestra total de 143 estudiantes que se encontraban en primer año de la carrera de Ingeniería Mecánica, el porcentaje de estudiantes que obtienen calificaciones en el examen de ingreso de Matemática entre 60 y 80 puntos es mayoritario (70,5%), lo que sugiere que la carrera es otorgada a estudiantes de bajas calificaciones en los exámenes de ingreso.

Con relación a la situación docente al finalizar el primer semestre, considerando los resultados en las asignaturas Matemática I y Álgebra Lineal, con respecto a las calificaciones obtenidas en el examen de ingreso de Matemática (EI), para este estudio las calificaciones obtenidas por los estudiantes en el examen de ingreso de Matemática se agruparon en dos intervalos:

[60, 80): Calificaciones mayores o iguales que 60 y menores que 80
[80, 100]: Calificaciones mayores o iguales que 80 y menores o iguales que 100.
Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Tabla No 1: *Relación entre las calificaciones del EI y la situación docente en asignaturas de Matemática*

Calificaciones del EI de Matemática	Situación docente			
	Proporción de estudiantes aprobados en las dos asignaturas (en %)	Proporción de estudiantes aprobados solo en Algebra Lineal (en %)	Proporción de estudiantes aprobados solo en Matemática I (en %)	Proporción de estudiantes reprobados en las dos asignaturas (en %)
[60, 80)	40,0	17,0	8,0	35,0
[80,100]	60,5	9,3	14,0	16,3
Total	46,2	14,7	9,8	29,4

En la tabla se puede apreciar que un 29,4% de los estudiantes al finalizar el primer semestre ya tenían dos asignaturas suspensas, encontrándose estos estudiantes en una situación desventajosa para enfrentar las asignaturas del segundo semestre, por otra parte 5 causaron baja y 5 solicitaron licencia para desvincularse por un período y después incorporarse.

Como se observa solo hay un 46,2% de estudiantes aprobados en las dos asignaturas analizadas. La mayor proporción de estudiantes aprobados en las 2 asignaturas (Álgebra Lineal y Matemática I) son los que tienen una calificación en el EI de Matemática en el rango de 80 a 100 puntos (60,5%).

Como parte del análisis se realizó el cálculo del coeficiente de contingencia para verificar si existía correlación entre las variables calificaciones del examen de ingreso de Matemática y la situación docente al finalizar el primer semestre, teniendo en cuenta los resultados en Álgebra Lineal y Matemática I.

Se obtuvo como resultado Coeficiente de Contingencia: C = 0,72, lo que evidencia que existe una buena correlación, entre las calificaciones del examen de ingreso de Matemática y la situación docente al finalizar el primer semestre, teniendo en cuenta los resultados en Álgebra Lineal y Matemática I.

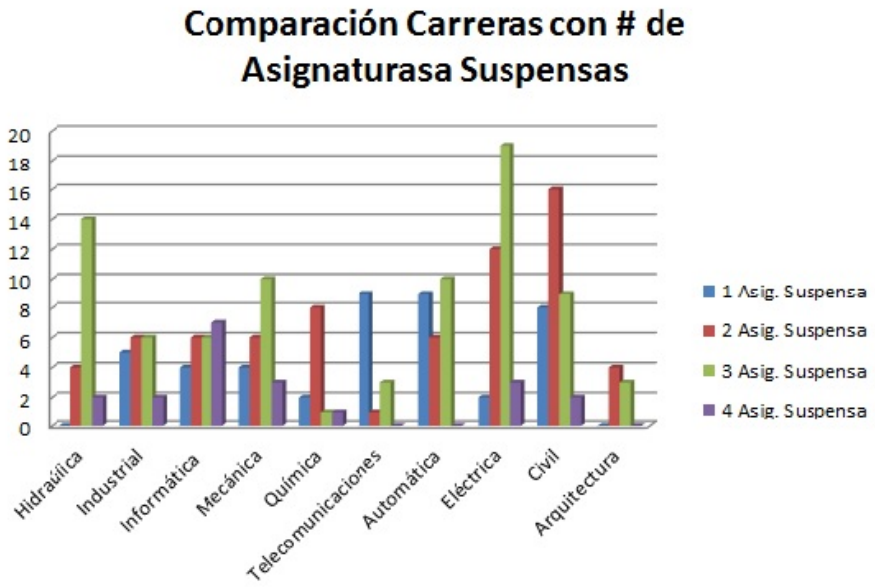
Característica del estudio realizado.

Teniendo como referente los análisis anteriores, se realizó un estudio ampliando la muestra, considerando los estudiantes que causaron baja en el curso 2015-2016 y habían reprobado algunas de las asignaturas de la Disciplina Matemática (Matemática I, II, III y Álgebra Lineal; en la que se imparten los contenidos relacionados con el cálculo diferencial e integral de funciones de una y varias variables, series, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal y geometría analítica), que se imparten en los dos primeros años de las carreras de: Hidráulica, Civil, Mecánica, Eléctrica, Industrial, Informática, Química, Telecomunicaciones, Automática y Arquitectura, en la Universidad Tecnológica de La Habana.

En la siguiente tabla se recogen los datos relacionados con las 10 carreras analizadas, el total de estudiantes que causaron baja y la cantidad de asignaturas de la Disciplina Matemática suspensa.

Tabla No 2: *Relación por carrera de estudiantes que causaron baja y cantidad de asignaturas de Matemática suspensas.*

Carreras / Número de Asignaturas Suspensas.	*1 Asignatura Suspensa*	*2 Asignaturas Suspensas*	*3 Asignaturas Suspensas*	*4 Asignaturas Suspensas*	*Total de Bajas*
Hidráulica	0	4	14	2	20
Industrial	5	6	6	2	19
Informática	4	6	6	7	23
Mecánica	4	6	10	3	23
Química	2	8	1	1	12
Telecomunicaciones	9	1	3	0	13
Automática	9	6	10	0	25
Eléctrica	2	12	19	3	36
Civil	8	16	9	2	35
Arquitectura	0	4	3	0	7
Total	43	69	81	20	213



En la tabla se observa que de un total de 10 carreras analizadas se pudo constatar que en 7 de estas carreras se evidencia que el bajo aprovechamiento docente en las asignaturas de la Disciplina Matemática resultó un importante factor que influyó en la deserción escolar de los estudiantes, al resultar alrededor del 47,5% de estos estudiantes con 3 o 4 asignaturas de Matemática reprobadas, situación que según las regulaciones vigentes (Resolución No. 210/2007) es motivo para causar baja de la educación superior.

Otro aspecto de interés en muchas investigaciones es conocer si dos variables están relacionadas y/o cuál es el grado de su asociación. En esta investigación se realizó el análisis de la relación entre la cantidad de asignaturas suspensas y los resultados de las pruebas de ingreso a la educación superior. Para ello se determinan los llamados coeficientes de correlación. El coeficiente de correlación es una expresión matemática que depende de los datos de las variables a correlacionar X e Y. (Hernández, 2006)

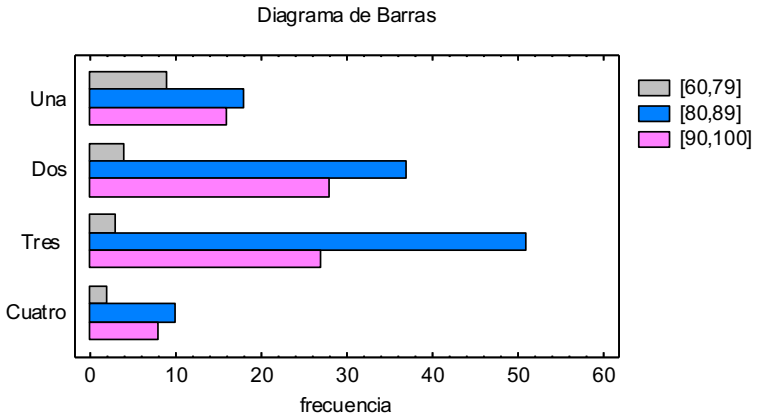
Uno de los más utilizados es el llamado Coeficiente de Contingencia, que da una medida del grado de asociación entre dos variables medidas en escala al menos nominal. Para ello se construye la llamada tabla de contingencia, que a continuación se expone.

Tabla No 3: *Tabla de contingencia para la relación entre la cantidad de asignaturas suspensas y los resultados de las pruebas de ingreso a la educación superior*

Nota en EI / Asignaturas Suspensas	[60,79]	[80,89]	[90,100]	Total por Fila
Una	9	18	16	43
	4,23%	8,45%	7,51%	20,19%
Dos	4	37	28	69
	1,88%	17,37%	13,15%	32,39%
Tres	3	51	27	81
	1,41%	23,94%	12,68%	38,03%

Cuatro	2	10	8	20
	0,94%	4,69%	3,76%	9,39%
Total por Columna	18	116	79	213
	8,45%	54,46%	37,09%	100,00%

En la tabla se muestran los valores que relacionan la cantidad de asignaturas suspensas con los resultados obtenidos en las pruebas de ingreso a la educación superior, de donde se puede observar que el mayor porcentaje en esta relación esta en los estudiantes que obtuvieron entre 80 y 89 puntos en la prueba de ingreso y los que suspenden tres asignaturas, destacándose también el elevado número de estudiantes que suspenden dos asignaturas, lo cual se puede ver en el siguiente diagrama de barras.



Se realiza una prueba de hipótesis, razón de verosimilitud, con el objetivo de determinar si se rechaza, o no, la idea de que las clasificaciones de fila y columna son independientes, de donde se obtiene que el estadístico es 12,088 con seis grados de libertad y el valor-P de 0,0600 que es mayor o igual que 0,05, por lo que no se puede rechazar la hipótesis de que filas y columnas son independientes con un nivel de confianza del 95,0%, lo que permite afirmar que, la fila observada para un caso en particular, pudiera no tener relación con su columna.

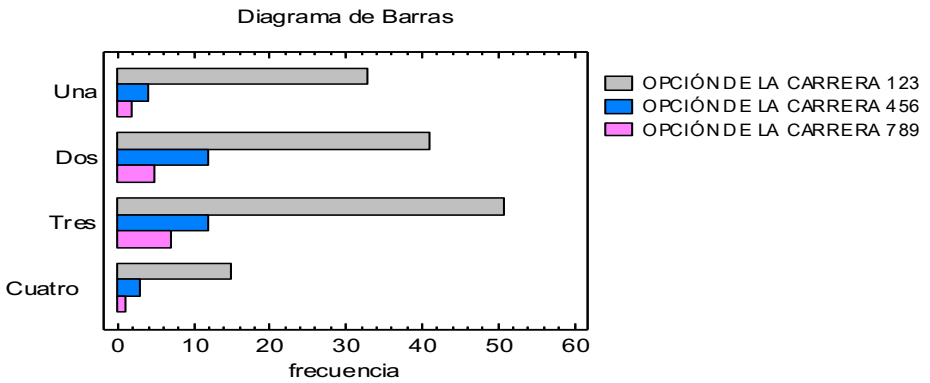
Así mismo, se presentan los estadísticos Lambda y coeficiente de contingencia que miden el grado de asociación entre filas y columnas, de donde se puede destacar que en el valor de Lambda con columnas dependientes es igual a 0.0, lo que significa que hay un 0.0% de reducción en el error cuando las filas se usan para predecir a las columnas y el valor del coeficiente de contingencia de 0.2459 muestra que es pobre el grado de asociación entre los valores de ambas variables.

También se realizó el análisis a través de una tabla de contingencia para la relación entre la cantidad de asignaturas suspensas y las opciones para el pedido de la carrera.

Tabla No 4: *Tabla de contingencia para la relación entre la cantidad de asignaturas suspensas y las opciones para el pedido de la carrera*

Asignaturas Suspensas	Opción de la carrera (123)	Opción de la carrera (456)	Opción de la carrera (789)	Total por Fila
Una	43	4	2	49
	21,94%	2,04%	1,02%	25,00%
Dos	41	12	5	58
	20,92%	6,12%	2,55%	29,59%
Tres	51	12	7	70
	26,02%	6,12%	3,57%	35,71%
Cuatro	15	3	1	19
	7,65%	1,53%	0,51%	9,69%
Total por Columna	150	31	15	196
	76,53%	15,82%	7,65%	100,00%

Similar al análisis anterior se destaca en este caso que la mayor cantidad de estudiantes con asignaturas suspensas se obtiene para aquellos que solicitaron la carrera en una de las tres primeras opciones, contraproducente con el hecho de que la cantidad de bajas fue menor en los que la pidieron en las últimas opciones, aspecto que se ve con claridad en el siguiente gráfico.



De la prueba de hipótesis de independencia realizada, se obtiene que el estadístico es 5,925 con seis grados de libertad y el valor-P de 0,4316 que es mayor o igual que 0,05, lo que indica que no se puede rechazar la hipótesis de que filas y columnas son independientes con un nivel de confianza del 95,0%, lo que corrobora lo planteado con anterioridad.

Igualmente, se observa que el valor de Lambda con columnas y filas dependientes es igual a 0,0, lo que significa que hay un 0,0% de reducción en el error cuando las filas se usan para predecir a las columnas, y viceversa, mientras que el valor del coeficiente de contingencia de 0,1652 muestra también que es pobre el grado de asociación entre los valores de ambas variables.

Conclusiones

- Un 7,8% de los estudiantes que abandonaron sus estudios universitarios en el curso 2015-2016 en la Universidad Tecnológica de La Habana, tenían reprobadas asignaturas de la Disciplina Matemática.

- No existe una relación de dependencia entre las variables cantidad de asignaturas suspensas de matemática y las notas del examen de ingreso a la Educación Superior, al igual que con la opción en que fue solicitada la carrera.

- Aunque los mayores valores de esta relación está en los estudiantes que obtuvieron entre 80 y 89 puntos en la prueba de ingreso y los que suspenden tres asignaturas, destacándose también el elevado número de estudiantes que suspenden dos asignaturas.

Recomendaciones

- Continuar investigando otros factores que puedan estar influyendo en las causas del abandono.

- Establecer estrategias de mentoría con estudiantes que desde las primeras evaluaciones parciales presentan dificultades en su aprovechamiento académico, para disminuir los índices de abandono por reprobar asignaturas de la Disciplina Matemática.

Referencias Bibliográficas

Hernández R., Fernández-Collazo C., Batista P. (2006). *Metodología de la Investigación. Análisis de datos cualitativos.* Capítulo 10 (407-498). (Cuarta edición). México: McGraw-Hill. Interamericana.

Himmel E. (2002). Modelos de Análisis de la deserción estudiantil en la Educación Superior. *Revista Calidad en la Educación*, 17.

UNESCO (2006). *Informe sobre la educación superior en américa latina y el caribe. 2000-2005. La metamorfosis de la educación superior.* Primera edición: Caracas. Instituto Internacional de la UNESCO para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC). ISBN -980-6556-19-4 Editorial Metrópolis, C.A.

Proyecto Alfa-GUIA. (2010). *Gestión Universitaria Integral del Abandono. Incrementar los índices de permanencia como medio para mejorar la eficiencia universitaria y la cohesión social.*

Tendencias de la educación superior en el mundo y en América Latina y el Caribe.*13*(2). Disponible en http://dx.doi.org/10.1590/S1414-40772008000200003

Trejo, E. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, *11* (Número especial, 2013), 397-424. ISSN: 1887-4592

Vygotsky L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psíquicos superiores*. Barcelona: Edición crítica.

VINCULACIÓN Y TRANSICIÓN ENTRE LOS NIVELES MEDIO Y SUPERIOR: UNA INVESTIGACIÓN NECESARIA

Nelly Rigaud Téllez, Ángel Homero Flores Samaniego
Universidad Nacional Autónoma de México. (México)
nerigaud@unam.mx, ahfs@unam.mx

Resumen

La transición entre niveles educativos es un proceso que implica en los estudiantes cambios en los contextos cognitivo, actitudinal y cultural. Esta transición resulta especialmente drástica entre los niveles medio superior y superior. Parte de la permanencia regular de los estudiantes en carreras universitarias tienen que ver con la forma problemática o no de esta transición. A su vez, la vinculación entre los niveles podría ser el medio para tener una transición sin problemas. Se presentarán el planteamiento y los avances de una investigación cuyo objetivo es definir la problemática en el contexto de la educación matemática de los estudiantes.

Palabras clave: vinculación, transición, pensamiento matemático, redes académicas, currículo de matemáticas.

Abstract

The transition between educational levels is a process that involves changes in students' cognitive, attitudinal and cultural contexts. This transition is especially drastic between the upper middle level and higher education. Partly, the fact that students stay on at the university or not is related to the way this problematic transition takes place. In turn, linkage between the two levels could be the means to have a transition without troubles. This paper shows the advances of a research that aims to define the difficulties of students' transition between two levels of education, in the context of mathematical instruction.

Keywords: linkage, transition, mathematical thinking, academic networks, math curriculum

Introducción

La palabra vinculación se emplea en una enorme multitud de expresiones que, generalmente se la asocia con el término de *relacionar*. Por ejemplo, en el ámbito académico, la Asociación Nacional deUniversidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES) considera a la vinculación con modalidades de educación-sociedad para la producción y la difusión del conocimiento, en torno a ofrecer soluciones particulares a diversos sectores, por ejemplo, el productivo (ANUIES, 2000). No obstante, para un profesor de carrera, el término puede ser la extensión de la docencia a la investigación, con actividades de tutorías y servicio social, y posiblemente, un especialista en educación, recordará que con la vinculación, se puede reducir la brecha existente entre los niveles medio superior y superior.

La vinculación en Instituciones de Educación Superior (IES) se manifiesta en la celebración de convenios de colaboración, aunque también se generan foros de discusión, y es frecuente, que existan espacios destinados a implementar gestiones encaminadas a cumplir tal función. La fácil aceptación de esta palabra llega a tener su costo ya que, en el ámbito de las IES, se realizan "acercamientos" con el sector productivo y con el nivel medio superior.

No obstante, en la *praxis,* parece que los esfuerzos de vinculación se realizan a partir de un desconocimiento, lo que conduce a suponer que las acciones de este tipo están basadas, sustancialmente, en la experiencia y la intuición. En particular, esta situación se manifiesta entre el nivel bachillerato y el universitario. Se realizan actividades de vinculación que difícilmente resultan en un verdadero esfuerzo coordinado e interinstitucional, indispensable para orientar la toma de decisiones a la ya reconocida y grave problemática de disminuir índices de reprobación, deserción y rezago estudiantil, en las áreas de matemáticas (Figuera y Torrado, 2012; Culpepper et al, 2010; The Research and Planning Group, 2010; Gómez-Chacón, 2009).

Más aún, la transición entre los niveles medio y superior es especialmente conflictiva debido, en parte, a que implica un cambio de escuela o de institución educativa. El desfase entre el conocimiento, las estrategias y las actitudes que muestra el estudiante de bachillerato al término del ciclo, con respecto al conocimiento que debería tener para afrontar con éxito las materias universitarias, especialmente en los primeros semestres de la carrera, puede afectar de manera negativa los índices arriba mencionados.

Uno de los supuestos de esta investigación, es que por el empleo de una estrategia de profunda especialización, que constituye la fortaleza de un enfoque monodisciplianario, limita la real conceptuación de la matemática; su rol y sus funciones, por parte de estudiantes, profesores y funcionarios. Consecuentemente, existe una correspondencia parcial que influye negativamente en la educación matemática de los estudiantes y esto, a su vez, complica la transición entre los dos niveles considerados.

El objetivo es estudiar y describir una problemática relacionada con la transición de estudiantes del bachillerato al nivel superior con respecto a su educación matemática, con el fin de detectar, definir y plantear problemas sustantivos, en una primera aproximación, relacionados con la transición del bachillerato a la licenciatura, a través del análisis de acciones de vinculación, es decir, acciones conjuntas entre las instituciones de los dos niveles.

Indagación bibliográfica

A continuación, se presenta un análisis somero de la literatura en educación matemática, con el fin de identificar perspectivas fundamentales, y aspectos que se conciben cuando se trata con la vinculación y su problemática de transición entre el bachillerato y la licenciatura (tabla 1).

En la literatura existe convergencia sobre la importancia de la vinculación, en la que los autores indican que sistemas educativos la consideran, primero, como una función sustantiva de una IES, segundo, se la percibe como axiológicamente positiva, y tercero, está definida por las circunstancias concretas de cada institución.

No obstante, con respecto a la educación matemática, parece que la actividad académica se mantiene ajena a las necesidades de uno u otro nivel educativo, esto es, a pesar de que la vinculación en educación matemática es deseable, no permea y aparenta tener una parcial correspondencia. Lo anterior se dificulta aún más, ya que los entendimientos de matemática se delimitan y circunscriben a no tener un panorama general de sus roles. En consecuencia, cada sistema, en lo que toca a vinculación con respecto a temas educativos de matemática, suele seguir acciones enfocadas a problemas específicos, factibles de resolverse en el contexto restringido de un área específica, que deriva en resultados parciales y, consecuentemente, en medidas insuficientes.

Tabla 1. *Revisión de la literatura*

Objetivo: Analizar perspectivas teóricas sobre vinculación y problemática de la transición	
AUTOR(ES)	***ASPECTOS FUNDAMENTALES***
Paredes, Iglesias y Ortiz (2015)	Percepción de docentes con respecto al bajo desempeño de álgebra: aceptación de estudiantes con deficiente preparación matemática, falta de motivación, y procesos pedagógicos.
Balderrama, Bosco (2014)	Acciones encaminadas a generar la vinculación académica entre IES con la enseñanza media. Entre las acciones destacan: talleres, asesorías, vinculación con padres de familia, extra-clases, software educativo. Se pretende reducir la brecha en temas de matemática y biología.
Cabrera (2013)	Descripción de programas institucionales-revisión bibliográfica para definir la transición. Además, se contrastan dichos factores con programas institucionales.
Figuera y Torrado (2012)	Se investiga el proceso de adaptación y las dificultades de la transición a la universidad, mediante estudios de naturaleza cualitativa.
Farías, Bencomo (2013)	Estudio para dimensionar la magnitud de la deserción estudiantil, la reflexión de factores e implicaciones que influyen en la deserción. Propuesta de dimensiones y subdimensiones para la deserción estudiantil.
Blackboard Institute (s/f*)	Factores que contribuyen a la falta del progreso estudiantil por medio de estrategias que facilitan la transición. Encuesta a 24 expertos
Porras (2011)	Deficiente preparación en conceptos de cálculo fundamental para la comprensión de otros procesos en problemas matemáticos que dificulta la adaptación en el sistema universitario.
Culpepper, et al (2010)	Relación entre cursos de educación media superior con desempeño universitario.
Ferrando (2006)	Identificación de factores que dificultan la transición entre el bachillerato y una facultad de ingeniería, entre los que destacan; maduración de estudiantes, proyecto de vida, economía, hábitos y prácticas de vida, vinculación entre sistemas.
Hill (2006)	Cursos de educación media varían "tremendamente" entre escuelas. Por ejemplo, los cursos de cálculo son exitosos para preparar a nivel universitario, y no deberían sustituirse por otros cursos de matemáticas.

Fuente: Elaboración propia
* s/f: sin fecha de publicación

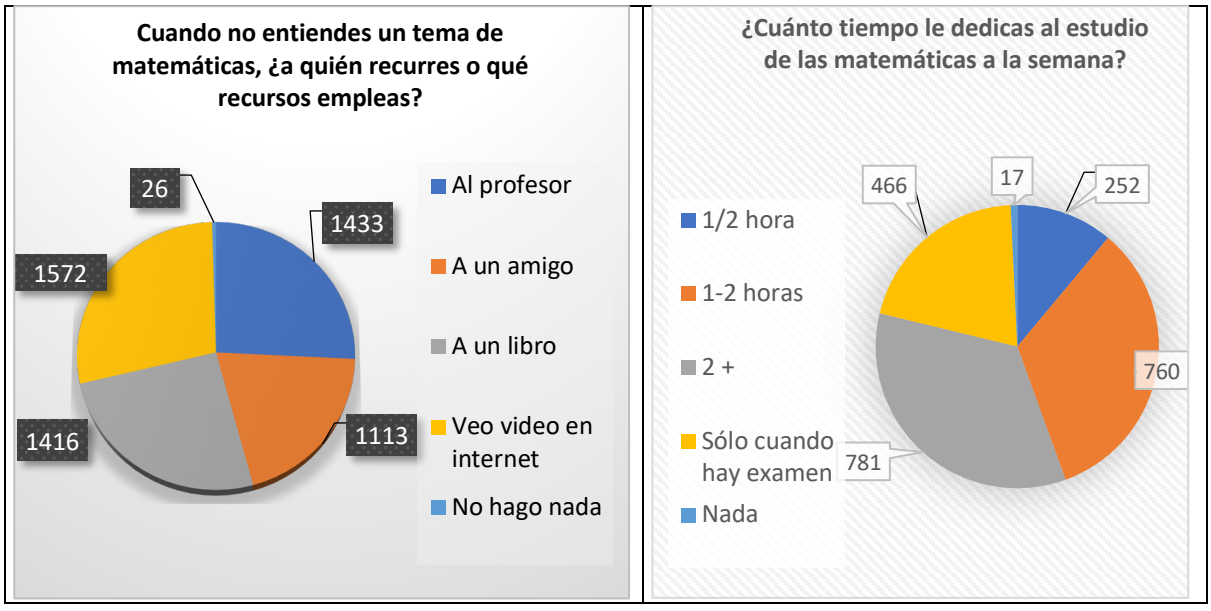
Además, en la literatura analizada, las dificultades de la vinculación entre los niveles medio superior y superior, no es un problema exclusivo de México, comportamientos similares se encuentran en muchos países de América Latina y de otras latitudes (Cabrera, 2013; Blackboard Institut Report), lo cual lleva a determinar que esta problemática es una investigación pendiente.

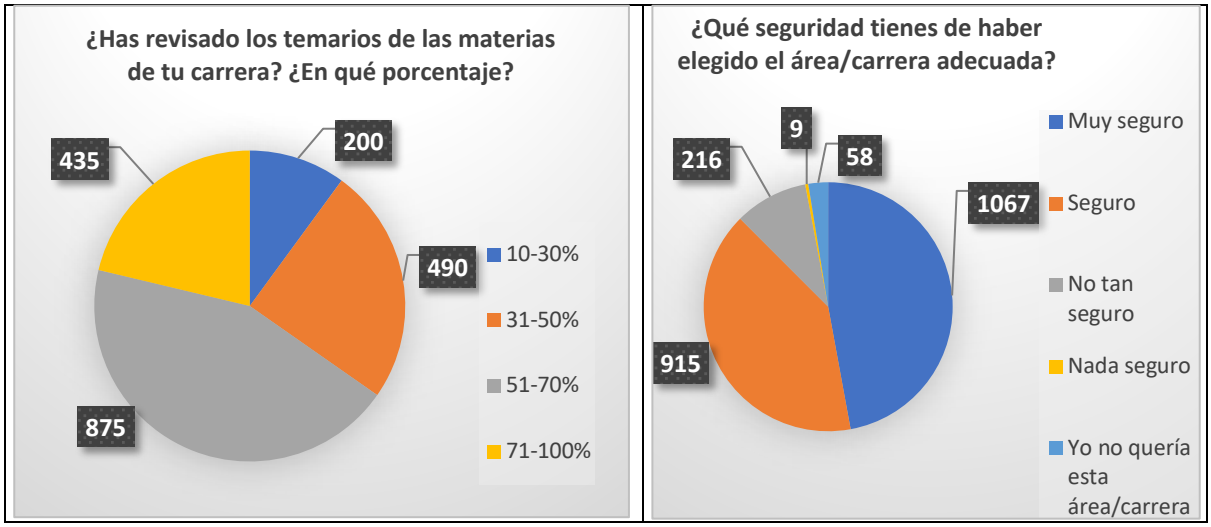
Descripción de la problemática específica de una IES

En la sección anterior, se evidencia que la función de vinculación es válida para cualquier IES, y sus problemas de implementación consisten en la planeación y en la toma de decisiones, de acuerdo a las condiciones concretas en las que se encuentra inmerso el sistema educativo. A continuación, se describen síntomas de una problemática relacionada a la vinculación y la transición, en lo concerniente a la percepción de la preparación de estudiantes y el nivel de su conocimiento matemático, como causas del proceso de adaptación y permanencia de una IES.

Durante el 2016 se realizó una encuesta a una muestra de 2276 estudiantes de recién ingreso a Facultades de Estudios Superiores (FES) en carreras relacionadas con las ciencias físico-matemáticas y las ingenierías. El levantamiento de información se realizó durante la semana de bienvenida, en agosto de ese año. Esto es, la aplicación de las encuestas se realizó previo al inicio formal de clases, por lo cual puede decirse que los estudiantes encuestados se encontraban en la transición entre el nivel de bachillerato y el universitario (Gráfico 1).

Gráfico 1. *Estadísticas descriptivas de transición entre el nivel bachillerato y el universitario*





Fuente: Rigaud et al, 2016

Los resultados que se exhiben en las gráficas muestran variaciones, debido a que los estudiantes encuestados podían elegir más de una opción en las preguntas, o no responder a alguna de ellas.

Las respuestas representan una manifestación de que la preparación de estudiantes provenientes del Bachillerato aún requiere potencializarse. Por una parte, las creencias de los alumnos muestran una sobrevaloración o subvaloración sobre su dominio matemático (Boaler, 2016).

Esta apreciación hacia la matemática, se debe posiblemente a que los alumnos, consideran que ya han aprendido lo suficiente de ellas, y tal vez no están dispuestos a cometer errores. No obstante, el mayor desarrollo matemático sucede cuando se cometen errores y se está dispuesto a trabajar en forma continua.

Esto es, sus expectativas no necesariamente serán congruentes con los futuros desafíos que se encontrarán durante sus estudios. De aquí se desprende que la vinculación no debería considerarse como un proceso aislado, sino situado en contextos y coyunturas que conllevan realizar acciones acordes con un concepto general de la misma.

Otro aspecto que se observa en las respuestas de los estudiantes, es que las TIC tienen un papel sustantivo, especialmente, al acudir a videos cuando no se comprenden conocimientos y/o procedimientos, lo que indica que la educación matemática deba plantear que sus esquemas de enseñanza requieran modificarse en formas más innovadoras.

Una estrategia relevante supone un compromiso de las FES por generar información oportuna y pertinente sobre la factibilidad de medir resultados de aprendizaje y su comparación en distintos ámbitos, como puede ser en las ciencias básicas, que incluyen el conocimiento y comprensión de principios científicos y matemáticos. Los resultados de aprendizaje de alumnos que ingresan al nivel superior, así como el desempeño durante su formación en los primeros cuatro semestres, son un reflejo de múltiples causas, como es la vinculación, que repercute, en el aprovechamiento de asignaturas subsecuentes, lo que plantea la urgente e importante necesidad de establecer estrategias pertinentes (Tabla 2).

Tabla 2. *Examen de diagnóstico al ingreso de licenciaturas del Área I. Generación 2016*

	Media del porcentaje de aciertos	Desviación estándar	Porcentaje mínimo de aciertos	Porcentaje máximo de aciertos
Matemáticas	44.85	14.99	0.00	100.00
Historia de México	50.00	20.28	0.00	100.00
Química	50.63	18.79	0.00	100.00
Biología	54.14	18.10	0.00	100.00
Historia Universal	55.86	21.30	0.00	100.00
Física	57.98	15.82	0.00	100.00
Literatura	58.71	20.01	0.00	100.00
Geografía	59.97	21.20	0.00	100.00
Global	52.49	11.61	0.00	100.00

Fuente: CODEIC, 2016, en Rigaud et al., 2016

De las estadísticas mostradas en la Tabla 1, corresponden a la aplicación de un examen de diagnóstico a la generación 2016, que representó 7,595 estudiantes de recién ingreso a una IES que se inscribieron en carreras de Área Físico Matemáticas y de las Ingenierías. Se observa, que los temas de matemáticas, como resultados de aprendizaje del bachillerato tienen la media del porcentaje más bajo de aciertos globales, en comparación con los otros temas del examen de diagnóstico.

Se puede inferir que la transición de un nivel a otro será problemática. Algunas de las causas de estas dificultades se pueden deberse a los siguiente; el desarrollo del pensamiento matemático (conocimientos fundamentales, habilidades de razonamiento lógico, manejo de lenguaje simbólico, modelación, etc.), el acceso a recursos (incluyendo el acceso a TIC y TAC), el diseño de contenidos del plan curricular y su implementación, la competencia lectora, las características de docentes y estudiantes (especialmente su formación, preparación y motivación), el soporte administrativo y logístico y entornos socioculturales, por mencionar las más relevantes.

Marco teórico

Se presentaron algunos síntomas de la problemática relacionada con la vinculación entre sistemas educativos y la transición de estudiantes de un sistema a otro. De lo anterior se observa que hay un gran número de componentes que están relacionados en forma no lineal, con relaciones dinámicas que difícilmente, podrían explicarse en términos de sus componentes constituyentes.

Por ello, se han considerado los medios cognoscitivos del Enfoque de Sistemas para identificar los problemas más apremiantes de la problemática descrita. A través del mencionado enfoque, una parte de la realidad se construye como sistema, dentro de un suprasistema, lo que permite desarrollar un proceso de estructuración funcional de las partes, y que resulta en un modelo explicativo del cual se puedan distinguir las discrepancias entre los objetivos de sistemas, como de la existencia de obstáculos para lograrlos (UNESCO, 1981; Ramo y St. Clair, 1998; Williams y van't Hof, 2014).

De inicio se plantea que este proyecto se realice en tres años, con las siguientes acciones: (a) Determinar conocimientos y actitudes que se promueven en los programas de estudio de los niveles involucrados; (b) diseñar y aplicar estrategias de enseñanza-aprendizaje; y (c) definir lineamientos y orientaciones curriculares y de formación de profesores, tanto para el bachillerato como para las carreras universitarias.

Lo anterior es básico para construir un modelo de vinculación flexible que se adapte a las particularidades de cada nodo de la red académica. Por ello, considerando las características principales del paradigma sistémico (transdisciplinario, holístico y dinámico), se plantea la constitución de una red académica conformada por docentes-investigadores de varias instituciones de educación superior y de nivel bachillerato. Cada nodo de esta red estará formado por docentes e investigadores de ambos niveles que se encargarán de instrumentar las acciones de vinculación definidas por los coordinadores de cada nodo y de establecer los fundamentos de un modelo de vinculación flexible que tome en cuenta las particularidades de cada nodo.

Los nodos de esta red estarán conformados por equipos de trabajo de entre dos y cuatro integrantes, cada uno que se abocarán al logro de los objetivos de cada etapa del proyecto. Cada nodo tendrá un responsable académico que se encargará de la coordinación las actividades del equipo y será el enlace con los demás nodos. De inicio, las entidades de la UNAM interesadas en el desarrollo del presente proyecto son las Facultades de Estudios Superiores de Aragón y Acatlán, y el Colegio de Ciencias y Humanidades.

A nivel nacional, se tiene relación con la Universidad Autónoma de Querétaro, la Universidad Veracruzana, la Universidad Pedagógica Veracruzana, el Instituto Politécnico Nacional y el Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez. Del extranjero, existe comunicación y deseos de formar una red académica con la Universidad Central de Venezuela (Facultad de Ingeniería) y la Universidad Nacional Abierta (UNA). Asimismo, se buscará la participación de colegas de Brasil (Universidad Federal de Sergipe), de Colombia (Universidad de Antioquia) y de España (Universidad de Barcelona).

Conclusiones

En la investigación se plantea que la definición del concepto de vinculación y transición entre sistemas educativos requiere de una conceptuación, basada en el paradigma sistémico. Lo anterior representa investigar más sobre la problemática descrita, por ejemplo, considerar a más bachilleratos en el país.

También, definir las bases metodológicas que orienten a la elaboración de un diagnóstico, junto al análisis exhaustivo de programas de matemática tanto de Bachillerato como de Universidad, con el fin de determinar los conocimientos, habilidades y las actitudes que se propone desarrollar en cada programa y las congruencias en la secuencia de contenidos curriculares entre los dos niveles de educación. Asimismo, plantear lineamientos y orientaciones curriculares y de formación de profesores, tanto para el Bachillerato como para las carreras universitarias. Lo anterior incluye acciones evaluación y análisis de impacto.

Referencias bibliográficas

ANUIES (2001). *Deserción, rezago y eficiencia terminal en las IES. Propuesta metodológica para su estudio*, México: Biblioteca de la Educación Superior.

Balderrama S. B. y Bosco. (2014). *Generando vinculación académica en el IPN entre el nivel medio superior y superior en unidades de aprendizaje de básicas*. Memorias del IV CLABES.

Blackboard Institute (s/f), *Closing the Gap Between Highschool and College*. Recuperado de http://www.ucdenver.edu/faculty_staff/faculty/center-for-faculty development/resources/Documents/3BbInst_Closing%20the%20Gap%20between%20High%20School%20and%20College.pdf. 6 de enero de 2018.

Boaler J. (2016). *Mathematical mindsets. Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. Sn. Francisco: Josey Bass.

Cabrera G. (2013). *Programas de apoyo a transiciones académicas del sistema escolarizado en la UNAM.* Memorias del III CLABES

Culpepper, S. A., Basile, C., Ferguson, C. A., Lanning, J. A. y Perkins, M.A. (2010). Understanding the transition between High School and College Mathematics and Science. *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations*, *12*, pp. 157–167.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática*, *21*(3), pp. 5-32

Farias, L. y Bencomo, D. (2013). *Gestión universitaria y la deserción estudiantil. Caso universidad nacional experimental de Guayana Venezuela*. Memorias del III CLABES

Ferrando G. (2006). *La transición entre la educación media superior y superior*. Memorias del XXXIII Conferencia Nacional de Ingeniería A N F E I

Figuera, P. y Torrado, M. (2012). *La adaptación y la persistencia académica en la transición en el primer año de universidad: el caso de la Universidad de Barcelona*. Trabajo presentado en el I Congreso Internacional e

Interuniversitario de Orientación Educativa y Profesional: Rol y retos de la orientación en la Universidad y en la sociedad del siglo XXI. Málaga, 18 a 20 de octubre de 2012.

Hill R. (2006). *High School to Michigan State University.* Recuperado https://www.researchgate.net/publication/237714661_On_The_Transition_in_Mathematics_from_High_School_to_Michigan_State_University. 9 de abril de 2017.

Paredes, Z., Iglesias, M. y Ortiz, J. (2015). Una aproximación a las causas de la repitencia académica en álgebra. Visión del docente. *Paradigma*, vol. XXXVI, núm. 1: 217-240.

Porras, F. (2011). *El concepto de función en la transición bachillerato universidad.* Tesis de Maestría en Educación. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Ramo, S. y St. Clair, R. M. (1998). *The Systems Approach: fresh solutions to complex problems through combining science and practical common sense.* California, USA. KNI Inc.

The Research and Planning Group (2010). *Promoting the Transition of High School Students to College: Brief.* Recuperado de http://rpgroup.org/Portals/0/Documents/Projects/Effective%20PracticesHS/High-School-Transition-Brief_0.pdf. 26 de marzo de 2017.

Rigaud-Téllez, N. et al. (2016). *El pensamiento matemático. Una oportunidad de diálogo entre el bachillerato y la licenciatura.* Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/N_RigaudTellez/publication/316168818_El_pensamiento_matematico_Una_oportunidad_de_dialogo_entre_el_bachillerato_y_la_licenciatura/links/58f4c7aaa6fdcc11e569f945/El-pensamiento-matematico-Una-oportunidad-de-dialogo-entre-el-bachillerato-y-la-licenciatura.pdf 4 de abril de 2017.

UNESCO (1981). *A Systems Approach to Teaching and Learning Procedures: a guide for educators.* Paris, Francia. The UNESCO Press.

Williams, B. y van't Hof, S. (2014). *Wicked Solutions: a systems approach to complex problems.* Recuperado de http://www.bobwilliams.co.nz/wicked.pdf. 06 de abril de 2017.

INGENIERÍA DIDÁCTICA DEL PROCESO DE PRUEBA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Nelly Rodolfo Eliseo D´Andrea
Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería. Campus Rosario. (Argentina), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Agronomía. (Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.comnerigaud@unam.mx, ahfs@unam.mx

Resumen

Una de las dificultades que encuentra el estudiante que ingresa a la Universidad, es el abordaje de la prueba matemática, proceso que conlleva implícito el conocimiento del lenguaje y la epistemología de esta ciencia. Estas dos últimas cuestiones son prácticamente desconocidas en el ciclo medio de Argentina, pues en este nivel, mayoritariamente, la matemática que se presenta, hace mostración de objetos matemáticos y sus propiedades sin demostración. El ciclo medio en Argentina se lleva a cabo entre los 13 y 18 años. El objetivo de este curso es instruir al docente de nivel medio y universitario en el conocimiento de una ingeniería didáctica que optimice el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la demostración de proposiciones matemáticas verdaderas.

Palabras clave: demostración, modelo didáctico, aprendizaje constructivo

Abstract

One of the difficulties that the student who enters University faces is the approach of the mathematical proof, which is a process that implies the knowledge of mathematical language and the epistemology of this science. The latter two matters are practically unknown in the middle education cycle (13-to 18-year-old students) of Argentina, since at this level, the mathematical doing mostly shows mathematical objects and their properties without demonstration. The objective of this course is to provide the university and middle education teacher with the knowledge of a didactic engineering that optimizes the teaching and learning process of the demonstration of true mathematical propositions.

Key words: demonstration, didactic model, constructive learning

Introducción

Cuando se le pide una demostración a un estudiante, este recurre a la verificación aunque es consciente que no es el proceso adecuado para establecerse como prueba. No obstante, lo hace, posiblemente debido al hecho que en la cotidianeidad y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba usual. Este proceso se repite ostensiblemente, y no de forma aislada. Se trata de una reacción muy general, cuando el estudiante no puede llevar a cabo una prueba o no se le ocurre como generarla. El estudiante

universitario de Ciencias Naturales e Ingeniería tiene profundas dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones matemáticas.

El objetivo de este curso fue instruir al docente universitario en el conocimiento de una ingeniería didáctica que optimice el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la demostración matemática.

Se presentó este curso a un grupo de docentes de nivel medio y superior que en su praxis demanda la necesidad y uso de la argumentación como núcleo central de los procesos de validación que los estudiantes de nivel medio y superior requieren. La cuestión se direccionó esencialmente a la presentación de una ingeniería didáctica destinada a optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración y la forma de llevar a cabo las secuencias argumentativas que se hallan implícitas en este proceso.

Marco teórico

El término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, conforme mencionó Douady (1996, p. 241)

> … el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase.

Artigue (1998) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas, distinguiéndose una dimensión epistemológica que se asocia a las características del saber enfocado a la acción. Por otro lado, debe tenerse en cuenta la dimensión cognitiva que se asocia a las características cognitivas de los estudiantes que son foco del proceso de enseñanza y finalmente una dimensión didáctica que se asocia a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza utilizado.

El estudiante universitario de Ingeniería y Ciencias Naturales, tiene dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones matemáticas, confundiendo acciones como demostrar y verificar. El estudiante procede, en general, cuando se le pide una prueba, desde el empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), considerando que la prueba consiste en la exhibición de algunos casos particulares sin un criterio formado al hacerlo. En muchos casos, cuando le es requerida una prueba que el docente ya expuso en clase, vuelven a recurrir a la verificación ignorando lo expuesto. Por otro lado, están aquellos que repiten lo que el docente realizó pero de modo mecánico, ritual y sin comprensión. Cabe preguntarse entonces: ¿Es necesario enseñar a demostrar?; ¿Con qué objetivo?; ¿Cómo es posible guiar al estudiante para que sea capaz de respetar el proceso deductivo cuando realiza la demostración de proposiciones matemáticas?; ¿Qué estrategias pueden utilizarse para que realice este proceso desde el razonamiento y no desde la memoria repetitiva?

Existen numerosos trabajos descriptivos sobre la demostración matemática y fundamentalmente están referidos a demostraciones en geometría. Se citan algunos de ellos a continuación.

Bell (1976) plantea que la demostración (formal o no) puede tener diversos objetivos en matemática:

Verificación: cuando se intenta asegurar la veracidad de una afirmación.; *Iluminación:* cuando además de asegurar su veracidad, permite entender por qué es cierta una afirmación.
Sistematización: cuando permite organizar el enunciado demostrado en un sistema de axiomas, definiciones y otros teoremas.

Bell (1976) se propuso analizar los intentos de los estudiantes por construir demostraciones o elaborar explicaciones en situaciones matemáticas elementales y comparó la forma en que difieren de los usos de la demostración que realiza un matemático profesional. A la luz de este análisis, elaboró una clasificación de los tipos de respuestas que un estudiante puede arrojar, a través de una categorización que distingue entre: empíricas y deductivas. La primera se caracteriza por el uso de ejemplos como factor esencial para la certeza mientras que la segunda se caracteriza por la utilización de la deducción como elemento conector con las conclusiones.

Harel & Sowder (1998) basados en estudios realizados por otros investigadores definen los denominados esquemas de demostración (proof scheme) y realizan una clasificación de dichos esquemas definiendo previamente dos conceptos vitales imprescindibles para comprender los esquemas citados. Indagar (ascertaining) es el proceso que un estudiante utiliza para suprimir sus dubitaciones acerca de la verdad de una observación. Persuadir (persuading) es el proceso que un estudiante utiliza para suprimir las dubitaciones de otros sobre la verdad de una observación. El esquema de demostración del estudiante es lo que constituye las acciones: indagar y persuadir para este.

Por otro lado, Leron (1983) y Solow (1992) proponen estrategias para llevar a cabo el proceso demostrativo, como se describe brevemente a continuación.

Leron (1983) propone un método denominado "estructural", inspirado por las ideas informáticas que surgieron en los ochenta y repercutieron indiscutiblemente para posteriores avances. La idea básica que subyace es presentar las demostraciones en clase en diferentes niveles de gradualidad, procediendo desde las ideas elementales de la prueba hacia la conclusión, de manera escalonada y fragmentada. La ventaja principal de presentar así una demostración es que permite una comunicación más fluida generando en el estudiante un aprendizaje significativo. A diferencia de la prueba tradicional que se desarrolla desde la hipótesis a la tesis, la prueba estructural se desarrolla como un 'diagrama de flujo', focalizando determinadas partes de la prueba, con el objetivo de facilitar la comprensión de estas y generar la comprensión global de la prueba completa.

Solow (1992) sostiene que si se tiene que realizar una demostración del tipo: si A entonces B, se dice que se usa un *método progresivo*, tomando A como cierto llegamos a B, y que se usa uno *regresivo* cuando se busca un método para demostrar que B es verdadero, partiendo del supuesto de que B es verdadero. Ambos métodos se relacionan entre sí cuando se trabaja con B de tal forma que se llega a A y luego se toma A y se llega a B, obteniéndose así el método conocido como regresivo-progresivo. El proceso regresivo se inicia preguntando: ¿Cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera? El proceso de

demostración se comienza regresivamente, planteando lo que Solow denomina: "pregunta de abstracción" que consiste siempre en un planteo de la forma: "¿Cómo o Cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?". La pregunta debe ser formulada de un modo abstracto y sin hacer referencia alguna al problema concreto que generó. La respuesta a la pregunta de abstracción es un proceso de dos fases. Primero hay que dar una respuesta abstracta, para después aplicar esta respuesta a la situación específica. La forma en que sea formulada esta pregunta juega un papel decisivo. Por ejemplo, si tiene que probarse que el cuadrado de todo número entero par es par, la pregunta de abstracción sería para el planteo de esta prueba: ¿Cómo puedo demostrar que un número al cuadrado es par? Se puede responder esta pregunta en términos no tan abstractos, diciendo que esto puede ocurrir cuando se puede expresar al número como el producto de 2 por otro entero.

Presentación de la ingeniería didáctica

El lenguaje matemático tiene tres facetas claramente definidas: coloquial, que se expresa a través del lenguaje natural del individuo; visual, que se expresa a través de la visualización conceptual, que puede ser desde un simple diagrama a mano alzada a la gráfica realizada por un software y finalmente el lenguaje simbólico, que es propio de la Matemática. La epistemología de la Matemática se basa en el razonamiento y la abstracción y su desarrollo en el estudiante requieren de un entrenamiento en el conocimiento y la adquisición de destrezas del Lenguaje Matemático.

Como producto de la investigación llevada a cabo por D´Andrea, Curia y Lavalle (2012) sobre el razonamiento deductivo utilizado por estudiantes de Ciencias Naturales e Ingeniería, en el proceso de validación de proposiciones matemáticas, se generó un diagnóstico que permitió la construcción de una ingeniería didáctica apropiado para incentivar el abordaje de la demostración matemática. El diagnóstico, postula lo siguiente:

> El estudiante ingresante a Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías requiere en los cursos de Matemática del currículo de la carrera elegida comprender la demostración de proposiciones y teoremas. Tiene profundas dificultades para comprenderlas, y más aún para reproducirlas, producto del retardo del desarrollo del pensamiento formal y la supresión de desarrollos teóricos en el área matemática en el ciclo medio. A esto se suma la experiencia personal de los docentes que valoran la formación recibida en la demostración de proposiciones y teoremas pero que paralelamente reniegan de aprendizajes memorísticos implícitos en estas cuestiones y como consecuencia de estas experiencias y la reticencia de los estudiantes a incorporar estos contenidos debilitan estos procesos en el aula y por ende a la Matemática, al no exponer debidamente la epistemología que le es propia. (D´Andrea et al, 2012, p.130)

Esta ingeniería se perfila a través de una serie de estrategias presentadas como una secuencia de tareas cuyo objetivo es lograr un aprendizaje comprensivo, significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico que pueda ser extrapolado a otras disciplinas. Si bien la secuencia de tareas es eminentemente conductista, su aplicación cotidiana en el desarrollo de los diferentes cursos de Matemática, puede finalmente conducir a una actitud constructivista del estudiante, ya que tal secuencia induce al fortalecimiento de una habilidad ‘dormida’ en este y es la actividad ‘demostrar’, que estimula la praxis argumentativa, que se sostiene totalmente en el razonamiento. Para el

desarrollo en clase de la actividad consistente en la demostración de una proposición, que permita una secuencia inmediata de apropiación como consecuencia de la comprensión, se sugiere seguir las siguientes etapas:

1. *Comprensión y Apropiación del Lenguaje Matemático.* Esta etapa es el prolegómeno a las siguientes y consiste en permitir al estudiante el acceso, comprensión y apropiación del Lenguaje Matemático. Para un acercamiento efectivo del estudiante a este Lenguaje, el docente deberá diseñar y seleccionar estrategias y material didáctico que apunten a un aprendizaje constructivo y comprensivo. La comprensión y apropiación del lenguaje requiere que el estudiante conozca: La utilización de conectores proposicionales: conjunción; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación; negación. Las condiciones que pueden presentarse en una implicación o condicional. Las implicaciones asociadas que se hallan implícitas en un condicional cualquiera. Las reglas fundamentales del álgebra de proposiciones: Involución; De Morgan; Negación de una implicación, entre otras. Los métodos de demostración de implicaciones.

Los contenidos citados deben ser expuestos con una profusa cantidad de ejemplos, extraídos de contenidos del ciclo medio que son revisados, usualmente, en el curso propedéutico que antecede el inicio de las Carreras de grado universitarias.

Carece de sentido el planteo de las etapas siguientes, si el estudiante no tuvo la posibilidad de acceder al Lenguaje Matemático. Esta etapa debe ser el comienzo de los cursos iniciales de Matemática de la carrera escogida por el estudiante.

2. *Presentación del teorema o proposición a demostrar:* En este punto se presenta al estudiante el teorema o proposición a demostrar, en su estructura formal.

Las tres etapas siguientes tienen órdenes indistintos y esto obedece a que el estudiante puede apropiarse de la comprensión de la proposición a demostrar desde la perspectiva de su propio lenguaje, la visualización o la simple acción de la verificación.

3. *Interpretación coloquial:* En esta etapa se propone al estudiante que intente explicar coloquialmente, lo expuesto formalmente en el ítem anterior. Con esta etapa se generaría la comprensión desde el lenguaje coloquial. Esta etapa constituye la parte crucial del proceso de aprendizaje.

4. *Verificación:* En esta etapa el estudiante es instado por el docente a verificar por sí mismo la proposición a demostrar debiendo generar mínimamente dos ejemplos. Ejemplos que no deben ser elegidos aleatoriamente, sino teniendo en cuenta que deben cumplir lo planteado por las hipótesis de la proposición.

5. *Visualización:* En esta etapa, el estudiante nuevamente es instado por el docente, pero esta vez a visualizar la proposición a demostrar. La visualización puede ser una interpretación geométrica si así correspondiera, a través de un simple esquema, dibujo, figura a mano alzada o a través del software. La proposición podría no tener una interpretación geométrica, pero un esquema visual que muestre la secuencia de lo que expresa conceptualmente, puede contribuir notablemente a su comprensión.

6. *Simbolización:* Luego de la explicación coloquial, la verificación y la visualización, entonces debe retomarse la estructura formal de la proposición a demostrar. La comprensión de la expresión simbólica

de la proposición a demostrar ya tiene otra accesibilidad para el estudiante, penetrando de esta forma en el proceso de abstracción, imprescindible para llevar a cabo la prueba formal.

7**.** *Elementos vitales de la proposición:* En esta etapa el estudiante debe identificar la hipótesis de la proposición a demostrar; las hipótesis implícitas y la tesis.

8. *Contenidos implícitos de la proposición:* En esta etapa el estudiante deberá identificar que estructuras conceptuales están implícitas en la proposición a demostrar. Esto de alguna manera está incluido en la etapa anterior en las hipótesis implícitas.

9. *Abstracción:* En esta etapa, el docente guía al estudiante en la formulación de la clásica pregunta de abstracción postulada por Solow en su método regresivo–progresivo. Esta pregunta, en la exposición de la proposición a demostrar, debe ser formulada al grupo de estudiantes con el objetivo de generar discusión y planteos personales.

10. *Guía Secuenciada de la demostración:* Si la proposición a demostrar es en extremo constructiva y compleja de modo que el estudiante no pueda abordarla por sí mismo, es recomendable la presentación secuenciada y detallada de la misma como se detalla a continuación. Si la proposición no requiere de grandes artificios para la construcción de su prueba, es importante invitar al estudiante a llevarla a cabo por sí mismo, a través de una Guía Secuenciada de instrucciones que contemplen el paso a paso de la prueba en cuestión para, propiciar la construcción de esos razonamientos de forma autónoma. Esta Guía Secuenciada permitirá observar la demostración una vez realizada desde una perspectiva global hacia perspectivas más focalizadas, posibilitando la construcción de la prueba, generando aprendizajes comprensivos y significativos y no un conocimiento inerte sin interacción. Se recomienda que, si la proposición reviste complejidad, el docente la exponga detalladamente, y al finalizarla invite al estudiante a que intente reproducirla de forma aproximada con la Guía Secuenciada antes descripta, o bien que él mismo la genere, o también, que elabore una serie de preguntas relacionadas a la argumentación que conduce a la prueba. Esta serie de preguntas también podría ser un disparador inicial para el estudiante a los efectos de la construcción del razonamiento que constituye la prueba. La idea que subyace a esta Guía, es que el planteo de las pruebas no sea una instancia formal, sino que se integre a la práctica cotidiana. Es decir, que la práctica tradicional, no esté formada por clásicos ejercicios de aplicación de las estructuras conceptuales y las proposiciones asociadas a estas o simplemente aplicación de algoritmos sino, que la teoría se articule con la práctica de forma natural.

Por razones de espacio, se consideran a continuación algunos ejemplos que corresponden a la construcción de la Guía Secuenciada que es en definitiva el núcleo central de la ingeniería didáctica propuesta y que permite al estudiante una aproximación inicial a la construcción del proceso argumentativo.

1. ¿Cómo puede probarse que el cociente entre dos números complejos, expresado en forma polar, es otro número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y su argumento es la diferencia de los argumentos de los complejos dados?

Guía Secuenciada: Considerar que el cociente entre dos números complejos z y z’ arroja un cierto resultado (darle un nombre simbólico) y despejar luego z o z’ en función de los otros dos. Expresar ambos miembros de la igualdad planteada, en forma polar y luego de tener en cuenta la propiedad del producto de números complejos en forma polar. Considerar la definición de igualdad entre números complejos,

correspondiente al formato polar. Aplicada la definición, deben despejarse los valores del módulo y el argumento del número complejo resultado del cociente al cual se le otorgó un nombre al comienzo de la prueba. Tener presente que tal definición debe considerarse particularmente para $k = 0$.

2. Si $f: [a, b] \to R$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces, cualesquiera sea $x \in (a, b)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a, b). ¿Cómo puede demostrarse que la función de la hipótesis es estrictamente creciente si la función derivada primera es positiva?

Guía Secuenciada: Considerar la función de la hipótesis, y un subintervalo de la misma, que puede llamárselo, por ejemplo: $[x, y] \subset [a, b]$. Luego, aplicar a la función f el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial en el subintervalo considerado, previa verificación del cumplimiento de las hipótesis del teorema citado. Posteriormente analizar el signo de la expresión obtenida y teniendo en cuenta la hipótesis sobre el signo de $f'(x)$ y la definición de función estrictamente creciente, se podrá arribar a la tesis.

Conclusiones

El estudiante cuando comienza a familiarizarse con la demostración, tiene dificultades para comprender la exposición del proceso deductivo y argumentativo de las proposiciones matemáticas que realiza el profesor en el aula. Sin embargo, es consciente acerca de lo requerido por este, cuando se le pide una demostración, comprendiendo que la verificación no es el proceso adecuado para establecerse como prueba, asimismo recurre a este, probablemente debido al hecho que en la cotidianeidad y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba usual y no está habituado a la abstracción que caracteriza este tipo de procesos matemáticos. Se trata de una reacción muy general, cuando el estudiante no puede llevar a cabo una prueba o no se le ocurre como generarla. En el marco teórico se citaron algunos de los muchos trabajos acerca de los modos de demostrar del estudiante, basados exclusivamente en demostraciones geométricas, ya que la visualización contribuye notablemente a la tarea de este tipo de pruebas, enfocándose el problema de la demostración sobre esta rama de la matemática. También se citaron algunos que, de modo general, pergeñaron acciones que permiten facilitar el proceso demostrativo. En congresos y en visitas a diferentes universidades, a través de la conversación con profesores y estudiantes cuando se les pregunta específicamente a los docentes acerca de su actitud con los estudiantes frente la demostración, muchos llegan a decir que es una empresa imposible, por ende, admiten que debilitan y hasta anulan el proceso deductivo en el aula.

La ingeniería didáctica presentada se propone que el estudiante genere una actitud reflexiva frente a la instancia del proceso demostrativo. La etapa correspondiente a la Guía Secuenciada, es una alternativa interesante que permite conducirlo hacia este objetivo, pero también es una 'muletilla' que con el tiempo debe ser dejada para poder permitir un desarrollo mental autónomo. Que el estudiante de Ciencias Naturales e Ingeniería realice demostraciones en los cursos de Matemática obligatorios en su currículum es muy importante ya que constituyen el 'embrión' de las reflexiones y razones que deberán hacer uso en su futuro desempeño profesional de acuerdo a la carrera de grado elegida. Pero estas demostraciones para que realmente jueguen un papel efectivo deben dejar de tener un carácter eminentemente ritual y jugar un rol central configurando un aprendizaje significativo.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. *Colombia. Una empresa docente.*

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Una empresa docente. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23 – 40.

Bravo Estévez, L. y Arrieta, J. (2003). *Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: resultados de su implementación*. VII Simposio de la Sociedad española de investigación en educación Matemática, pp.153-160.

D´Andrea, R.E.; Curia, L.; Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios*. Alemania: Editorial Académica Española.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Harel, G & Sowder, L. (1998). Students´Proof Schemes:Results from Exploratory Studies. En A.H.Schoenfeld, J.Kaput, E.Dubinsky. (Eds.) *Research in Collegiate mathematics education III* (pp.243-283) American Mathematical Society: Providence, EE.UU.

Leron, U. (1983). Structuring Mathematical Proofs Author(s). *The American Mathematical Monthly*, 90, 3. pp. 174 – 185.

Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas.* México: Limusa. Noriega Editores.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁREA EN UN CONTEXTO TOPOGRÁFICO

Diana Lucía Villamil Rincón, Eliécer Aldana Bermúdez
Universidad del Quindío (Colombia)
dlvillamil@uniquindio.edu.co, eliecerab@uniquindio.edu.co

Resumen

Esta comunicación breve se relaciona con la resolución de problemas del concepto de área como una estrategia de aprendizaje en la que el maestro diseña, lleva a cabo y evalúa las tareas que involucran la modelación de fenómenos de la realidad en la formación de estudiantes universitarios de topografía. El objetivo es articular la resolución de problemas y el objeto matemático de la investigación mediante el ciclo del análisis didáctico, para ello el maestro diseña la unidad didáctica que le permitirá organizar la instrucción matemática y utilizará la información que resulta de las tareas para la evaluación interna del aula.

Palabras clave: análisis didáctico, área, fenomenología, topografía, resolución de problemas

Abstract

This brief report deals with problem-solving of the concept of area, as a learning strategy in which the teacher designs, carries out, and evaluates the tasks that involve modeling concrete phenomena in the training of university students majoring in topography .The objective is to articulate problem- solving and the mathematical object of research through the didactic analysis cycle, and so, the teacher designs the didactic unit that will allow him to organize the mathematical instruction, and use the information that results from the tasks for the internal evaluation of the classroom.

Key words: didactic analysis, area, phenomenology, topography, problem solving

Introducción

Esta comunicación breve tiene como objetivo utilizar la resolución de problemas como estrategia en el aprendizaje del concepto de área en la formación de un topógrafo de una universidad colombiana. Es de interés formular la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo lograr la articulación entre la resolución de problemas y el aprendizaje del concepto de área desde el análisis didáctico? La propuesta surge a partir de la necesidad de dar respuesta a unas políticas de calidad universitarias y se ha planteado la problemática desde la enseñanza y desde el aprendizaje. Por un lado, en las facultades de ingeniería se continua enseñando de manera tradicional (Álvarez y Ruiz, 2010). Por otra parte, desde el aprendizaje, la actitud negativa de los estudiantes de ingeniería hacia las matemáticas (Álvarez, 2005) conlleva a ciertas carencias

formativas (Castro de Bustamante, 2007). En lo referente al objeto matemático, existen obstáculos de tipo epistemológico y didáctico sobre las relaciones entre área y perímetro en los estudiantes, inclusive los universitarios, quienes utilizan un lenguaje coloquial de bajo perfil formal (D'Amore y Fandiño, 2007).

El impacto y la importancia de la investigación se justifica con dos documentos institucionales: el Proyecto Educativo Universitario (PEU, 2106) y la Política Académico- Curricular (PAC, 2016). Por ello, se consideran aspectos relacionados con la acreditación de alta calidad, la fenomenología, la resolución de problemas y la organización de la enseñanza del objeto matemático en el contexto topográfico. En este mismo sentido, el PEU (2016) establece que se deben incluir actividades que involucren la modelación de procesos y fenómenos de la realidad, así como la resolución de problemas de la vida cotidiana en los espacios académicos que serán orientados por el profesor, quien debe tener conocimiento de la didáctica de la matemática que le ofrece una serie de alternativas para las actividades de enseñanza mediante los proceso de planificación, ejecución y evaluación, de manera que pueda dar respuesta a lo planteado por el proyecto educativo universitario.

Por todo lo anterior, según Aldana y López (2016) es importante que el profesor conozca la evolución, el desarrollo y los conocimientos previos de un objeto matemático para facilitar la planeación e implementación de estilos de aprendizaje. De estas circunstancias nace el hecho de que no es posible realizar apropiadamente el análisis didáctico de una unidad didáctica o de una hora de clase a partir de la intuición o la experiencia (Gómez, 2002).

Marco teórico

En este estudio se asume la postura teórica del análisis didáctico (Gómez, 2007) por su pertinencia para establecer la fenomenología del área de una superficie en el contexto topográfico. Para ello, se organiza la instrucción matemática mediante el diseño, la implementación y la evaluación de las tareas en el aula. Para iniciar este proceso cíclico, Gómez (2007) sugiere determinar la comprensión que los estudiantes tienen sobre las bases necesarias para poder abordar el nuevo tema, de los contenidos y de los objetivos de aprendizaje. Durante el análisis del contenido se organizan los diferentes significados del objeto matemático, mediante los tres organizadores del currículo: sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología. Luego, en el análisis cognitivo, se plantean las expectativas acerca de las actuaciones de los estudiantes al enfrentar la actividad representadas mediante los caminos de aprendizaje. Con la información que resulta del análisis de contenido y el análisis cognitivo, se diseñan las tareas en el análisis de instrucción, con el fin de generar información en el análisis de actuación acerca de la comprensión de los escolares, los contenidos y los objetivos de aprendizaje en relación con la evaluación interna del aula.

Así mismo, el análisis didáctico posibilita establecer los procedimientos del diseño metodológico en esta investigación de tipo cualitativa e interpretativa correspondiente al estudio de casos, con el fin de comprender los fenómenos educativos en un contexto topográfico un universitario. La población está representada por estudiantes del primer semestre y las fuentes de datos son la observación, entrevistas, análisis documental, estudio de documentos personales tanto de los estudiantes como del profesor, de acuerdo con la lógica del análisis de datos cualitativos.

Resultados

Como resultado final de la investigación se diseñará la unidad didáctica de acuerdo al ciclo del análisis didáctico para que sea implementada en el programa universitario. Además, la intencionalidad es que la propuesta de investigación aporte a la colectividad de la universidad colombiana en tónica con las políticas educativas de calidad que tienen como objetivo la acreditación institucional y su enfoque pedagógico Integrador- sociocognitivo- experiencial en sentido fenomenológico.

En esta etapa de la investigación se diseña, lleva a cabo y evalúa la siguiente tarea de diagnóstico, para comenzar el ciclo del análisis didáctico y así establecer el nivel de comprensión de las actuaciones de los estudiantes para iniciar el tema. La tarea "El Jardín" es una situación problema planteada en un contexto topográfico en la que su figura es una adaptación de Freudenthal (1983, p. 382).

En el primer piso de un centro comercial se quiere realizar el diseño de la figura para ubicar un jardín. Se conoce que $m(\overline{AB}) = x$, además los vértices de los cuadrados son los puntos medios de cada segmento. ¿Cuál es la razón entre el área del cuadrado ABCD y el área del cuadrado HKLM que el topógrafo de la obra necesita para localizar el jardín?

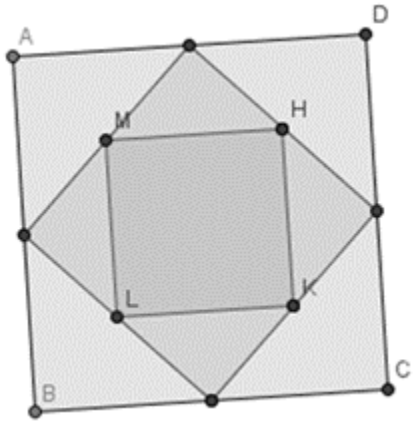


Figura 4. Tarea diagnóstica El Jardín. Adaptación de Freudenthal (1983)

Dicha tarea hace parte de la fase diagnóstica en la que se evalúa el nivel de comprensión que los estudiantes tienen sobre esos conocimientos previos necesarios para iniciar con el nuevo tema.

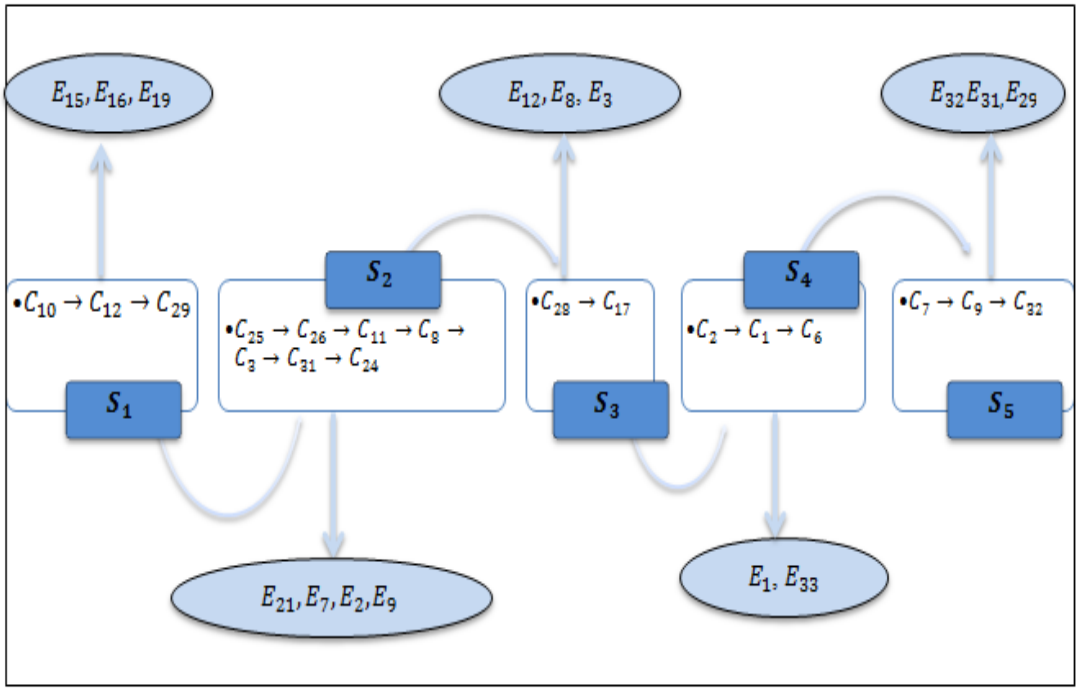


Figura 5. Camino de aprendizaje de la tarea El Jardín. Elaboración propia

Por consiguiente, la tarea contribuye al primer objetivo de aprendizaje: comparar mediante la razón el área de dos superficies que presentan ausencia de las medidas de longitud a partir de los conocimientos previos. El camino de aprendizaje propuesto en el análsis cognitivo es el siguiente:

En este camino se activan capacidades que están relacionadas con los conocimientos previos, por ejemplo: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar longitudes desconocidas (C_3), generaliza las propiedades del punto medio (C_8), calcula el área de una superficie usando la definición (C_{17}), calcula e interpreta la razón entre el área de dos superficies (C_{17}). Para agrupar las capacidades, la tarea tiene diferentes secuencias $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ de las cuales S_5 pertenece a la parte de la realimentación en la socialización.

Así también, cada una de las capacidades aporta al desarrollo de una competencia matemática específica, por ejemplo: la competencia de resolución de problemas (RP) considera que el estudiante conciba y ejecute un plan para resolver un problema del área en un contexto topográfico (C_{25}), prediga el efecto de una operación en un resultado (C_{24}) y calcule el área de una superficie usando la definición (C_{17}).

Algunos aspectos conceptuales y procedimentales involucrados en la tarea son: punto medio, teorema de Pitágoras, operaciones con expresiones algebraicas, área de un cuadrado y la razón entre el área de dos superficies. Así mismo, se identifican las dificultades y los errores que podrían cometer los estudiantes cuando resuelven el problema de la tarea.

Entre los estudiantes de topografía que participan en este estudio, a continuación se analizan las actuaciones de ET03, quien resuelve la tarea de la siguiente manera:

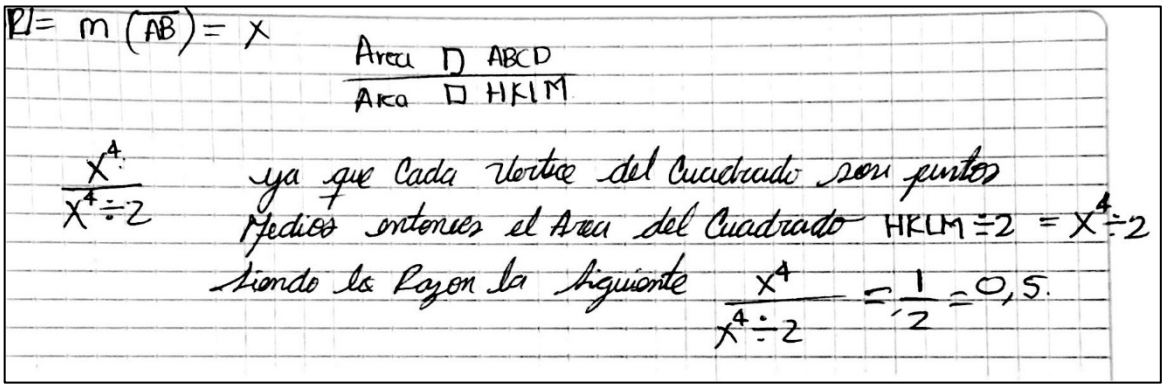


Ilustración 6. ET03, solución de la tarea "El Jardín". Fuente propia

En las actuaciones de ET03 se evidencia que tiene claro el concepto de razón, comprende lo que la tarea le pide, también moviliza diferentes sistemas de representación (verbal, simbólico, numérico) para explicar lo que hace. De sus actuaciones se concluye que presenta deficiencias en los conocimientos previos de punto medio, puesto que generaliza incorrectamente sus propiedades. Además, establece una relación de dependencia incorrecta entre el punto medio y el área, por ello divide el área de HKLM entre dos y luego lo reemplaza en la razón, obteniendo así una respuesta equivocada. El motivo por la cual representa el área simbólicamente con x^4, se justifica con la respuesta que da en la entrevista:

I: respecto a la tarea "El Jardín" ¿Cómo resolviste la tarea por primera vez?
ET03: bueno pues, desglosé el área del cuadrado como semejanza y después utilicé la razón. Dices que el cuadrado del… El cuadrado ABCD sobre el área del cuadrado HKLM. Este lo… Lo… Lo utilicé con x al cuadrado sobre x al cuadrado sobre dos. Entonces cancelé x al cuadrado sobre x al cuadrado esto me dio un medio y en total la razón pues me dio cero punto cinco.
I: ¿Por qué representas x al cuadrado con x a la cuatro?
ET03: porque en el jardín, en la pregunta asimilé como si tuviera cuatro segmentos. Entonces hice esto, ya que en la… En la pregunta decía que un lado, un segmento valía x, entonces conté el segmento en cuatro cuadrados, tiene cuatro lados y esa fue la manera como yo lo expresé y lo entendí.

El estudiante en la primera respuesta dice *"x al cuadrado"* pero escribe x^4, esto indica que desvincula el registro de representación verbal del simbólico formal (E_{17}), este error es nuevo ya que no fue previsto en el camino de aprendizaje de la tarea. Por otra parte, en la segunda respuesta dice "*tiene cuatro lados",* se pone en manifiesto que presenta obstáculos de tipo epistemológico por la concepción errónea del área y del perímetro (E_3).

Finalmente, se observa que el estudiante no logra completar al menos una de las secuencias de capacidades y ninguna capacidad en S_1 fue activada, logra activar algunas capacidades $(C_{25}, C_{26}, C_{11}, C_{17}, C_2, C_1)$ pero son superadas por el número de errores $(E_{15}, E_{16}, E_{19}, E_{21}, E_2, E_9, E_{12}, E_3)$ relacionados con: la interpretación del sistema de representación gráfico, el plan que concibe, los conocimientos previos, los cálculos del área y concepciones erradas del área.

Conclusiones

En este estudio se ha encontrado que los estudiantes universitarios, a pesar de haber aprobado la formación primaria y secundaria, aún presentan deficiencias en los conocimientos previos matemáticos que son necesarios para su proceso de formación profesional. Esta conclusión es coherente con lo que se ha encontrado en otras investigaciones mencionadas en el planteamiento del problema (Álvarez y Ruíz, 2010; Álvarez, 2005; Castro de Bustamante, 2007; D'Amore y Fandiño, 2007).

Durante la realimentación de la tarea, los estudiantes argumentan que sus dificultades y errores se debieron a que no encontraban números ni medidas en la representación gráfica del problema para resolverlo, lo que demuestra que identifican que el área es una magnitud pero no tienen en cuenta otras características geométricas del objeto matemático. Es más, en algunos casos le dieron un valor arbitrario a los lados del cuadrado sin argumentar mediante propiedades. Una vez que se implementa la etapa de realimentación, se evidencia en los resultados que los estudiantes mejoran el nivel de activación de las capacidades en la tarea diagnóstica.

Por todo lo anterior se concluye que la realimentación es una estrategia que se ha planificado y su propósito es que los estudiantes superen las dificultades y los errores que cometen cuando se enfrentan a una tarea, mejoren su desempeño frente a la solución del problema, alcancen el objetivo de aprendizaje previsto y tengan la oportunidad de reflexionar sobre sus actuaciones.

En cuanto al análisis cognitivo, se evidencia que los caminos de aprendizaje favorecen el desarrollo de las competencias matemáticas, incluida la resolución de problemas en cuanto a los procesos de comparación, clasificación, medición, asociación, relación, que vienen a ser las capacidades para determinar que hubo un desarrollo de dicha competencia.

A manera de reflexión, la formación en el campo de la investigación permite que el maestro renueve su praxis fundamentada teóricamente en el saber pedagógico, didáctico, disciplinar y científico que deben estar inmersos en el contexto en relación con la condición humana de quien aprende. Este trascender podría permitir la incorporación de la resolución de problemas como objeto de reflexión en la construcción del conocimiento de un objeto matemático.

Referencias bibliográficas

Aldana, E., y López, J. H. (2016). Matemáticas para la diversidad: Un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. *RIDI, 7*(1).

Álvarez, Y. (2005). ¡Auxilio! No puedo con la matemática. *Revista Iberoamericana de Enseñanza de la Matemática Equisangulo*, 2(1), 1-6.

Álvarez, Y., y Ruiz, M. (2010). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de ingeniería en universidades autónomas venezolanas. *Revista de Pedagogía*, 31(89), 225-249.

Castro de Bustamante, J. (2007). La investigación en educación matemática: una hipótesis de trabajo. *Educere*, 11(38), 519-531.

D'Amore, B., y Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime*, 10(1), 39-68.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer Academic Publishers.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA*, *7*(3), 251-292.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Quindío, U. d. (2016). *Política Académico-Curricular.* Armenia.

Quindío, U. d. (2016). *Proyecto Educativo Uniquindiano.* Armenia.

DIFERENTES INTERPRETACIONES DE LA IMPLICACIÓN: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Isabel García-Martínez, Marcela Parraguez
Universidad Católica del Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
igarcia@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

En esta investigación se presenta un estudio de la implicación en el nivel universitario. Tópico presente en diferentes cursos universitarios y que presenta dificultades para que los estudiantes lo comprendan, debido a sus diferentes interpretaciones. El marco teórico que sustenta esta investigación es la teoría APOE, marco de corte cognitivo que permitió explicar cómo se construyó el conocimiento matemático incluido en la implicación y en el contexto de sus diferentes interpretaciones. Con base en el análisis de actividades aplicadas a estudiantes universitarios y a textos de estudio, se diseñaron descomposiciones genéticas para algunas de las interpretaciones de la implicación.

Palabras clave: implicación, lógica, apoe

Abstract

This investigation shows a study of implication at the university level. This topic is included in different university courses and the students have difficulties to understand it, due to its different interpretations. The cognitive theoretical framework that supports this research is the "APOE" theory, which allowed explaining how mathematical knowledge included in the implication and in the context of its different interpretations was constructed. Based on the analysis of activities applied to university students and on textbooks, we designed genetic decompositions for some of the implication interpretations.

Key words: implication, logic, apos

Introducción

En este reporte se presenta un estudio de la implicación en el nivel universitario. Varios autores han reportado que los estudiantes de dicho nivel, presentan dificultades con la comprensión de dicho concepto (Alvarado y González, 2009, 2013; Durand-Guerrier, 2003; Epp, 2003; Ernest, 1984; García-Martínez y Parraguez, 2017; Reid, 1992). Si a lo anterior se le adiciona el hecho de que la implicación está presente (explícita o implícitamente) en los diversos cursos de matemática, de distintas carreras universitarias, hace que la indagación en este tópico de estudio sea muy relevante.

Pero, ¿qué es la implicación? Desde el punto de vista matemático, una implicación se define, en general, como una proposición de la forma $p \Rightarrow q$, a través de su tabla de verdad, p se denomina antecedente y q

consecuente y es falsa si y solo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Sin embargo, Quine (1950) sostiene que hay, por lo menos, cuatro interpretaciones de las sentencias condicionales (o implicaciones), que son:

- El entendimiento común.
- El conectivo proposicional.
- El condicional lógicamente válido.
- El condicional generalizado.

En el entendimiento común, en general, no se considera que el antecedente pueda ser falso; el conectivo proposicional está definido mediante las tablas de verdad; el condicional lógicamente válido está determinado por las reglas de inferencia y el condicional generalizado es la estructura que rige los teoremas y las definiciones. De acuerdo a Durand-Guerrier (2003), deben tenerse en cuenta estos cuatro tipos de sentencias condicionales para que haya un real entendimiento de la implicación.

En Matemática Educativa, no se han reportado investigaciones sobre la construcción de este concepto desde la Teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema–, referente teórico sobre el cual se basó la presente investigación.

En este escrito se presenta explícitamente la construcción mental dos de las cuatro interpretaciones de la implicación: el entendimiento común y el condicional generalizado.

Marco teórico

La teoría APOE es un marco teórico de corte cognitivo que surge a partir de la abstracción reflexiva de la teoría de Piaget. Fue creada por Ed Dubinsky (1996) y desarrollada junto a un grupo de investigadores (Arnon et al., 2014). Según esta teoría la construcción de un concepto matemático (o fragmento de él) puede interpretarse a partir de las estructuras (construcciones) mentales denominadas acción, proceso, objeto y esquema, que se ligan –en la mente de un aprendiz– a través de los mecanismos mentales (abstracciones reflexivas), para aprender dicho concepto. Algunos mecanismos mentales son: interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación. En la figura 1 se muestra la manera cómo se entrelazan las construcciones y los mecanismos mentales relacionados con un concepto matemático determinado.

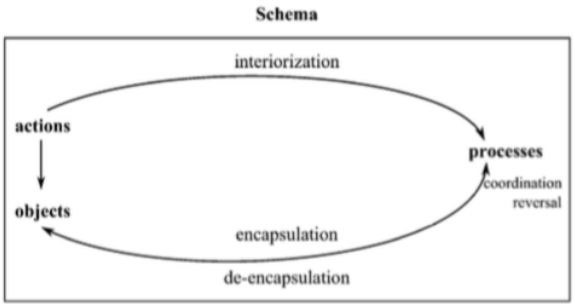


Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014, p. 10).

Diseño metodológico

La teoría APOE (Arnon et al., 2014) también proporciona un ciclo de investigación formado por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética (DG), diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de los datos. En este reporte se atiende la primera componente del ciclo –la DG–, que es un modelo cognitivo hipotético en donde se plasman las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender la implicación como entendimiento común y como condicional generalizado.

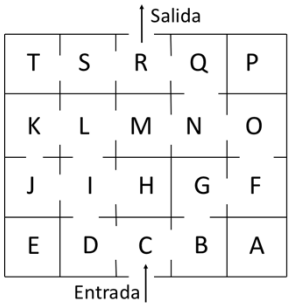
Implicación como entendimiento común

Para esta primera interpretación, se aplicó una actividad individual (números primos) a once estudiantes de segundo año de pedagogía de una universidad chilena, con la finalidad de determinar las estructuras mentales de los conceptos que subyacen en esta interpretación.
Posteriormente se les entregó una segunda actividad (laberinto) para que la realizaran de manera individual y la entregaran en la siguiente clase. Solamente cinco de los estudiantes lo hicieron, los cuales fueron etiquetados como E1, E2, E3, E4 y E5, mientras que el resto de los estudiantes fueron etiquetados como E6, E7, …, E11.

Las actividades son las siguientes:

Actividad 1 (números primos)
Determine el universo más grande dentro de los números enteros desde 1 hasta 20, para el cual la siguiente implicación es verdadera:
"si n *es un número par, entonces* $n + 1$ *es un número primo".*
a) ¿Cómo responderían los estudiantes de media?
b) ¿Cómo respondería usted?
Justifique todas sus respuestas.

Actividad 2 (laberinto) (Durand-Guerrier, 2003, p. 7)
Una persona llamada X logró pasar a través del siguiente laberinto (desde Entrada hasta Salida) sin utilizar la misma puerta (abertura) dos veces.



Se pueden formular frases pertinentes a la situación. Para algunas de estas frases, podemos determinar un valor de verdad (VERDADERO o FALSO); para otras, no tenemos suficiente información para decidir si son verdaderas o no (en ese caso, responda NO SE PUEDE DECIR).
De esta forma, analice cada una de las siguientes seis frases (justificando sus respuestas):
1- X cruzó P.
2- X cruzó N.
3- X cruzó M.
4- Si X cruzó O, entonces X cruzó F.
5- Si X cruzó K, entonces X cruzó L.
6- Si X cruzó L, entonces X cruzó K.

Implicación como condicional generalizado

Para esta interpretación, se analizaron dos textos guías de álgebra lineal, los cuales forman parte de las referencias bibliográficas sugeridas por los programas de estudio de algunas universidades sudamericanas (Grossman, 2008; Lay, 2007), adherido a la experiencia docente de las autoras, esto, con la finalidad de diseñar una DG de esta interpretación de la implicación.

Resultados

De acuerdo con la descripción metodológica planteada, el análisis de los documentos evidenció los siguientes resultados, para cada una de las interpretaciones.

Implicación como entendimiento común

De todas las evidencias recopiladas, se han elegido dos porque en ellas se muestran las respuestas que fueron más comunes entre los estudiantes y, a su vez permitieron a las investigadoras proponer elementos para el diseño de una DG.

En general, respecto de la actividad 1, seis de los once estudiantes consideran solamente el caso en el cual el *antecedente de la implicación es verdadero*. Particularmente, E9 determina los números para los cuales el consecuente es verdadero (con algunos errores), le resta 1 a cada uno de los elementos y determina

cuáles de ellos son números pares, o sea, los números para los cuales el antecedente es verdadero (figura 2).

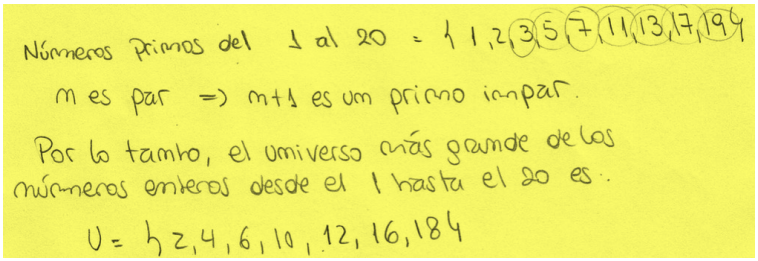


Figura 2. Respuesta de E9 a la actividad 1 *b)*.

En la respuesta a la actividad 2, E4 considera la implicación cuantificada (figura 3), evidencia que permitió incorporar otro elemento –*cuantificar la implicación*–, en el diseño de la DG.

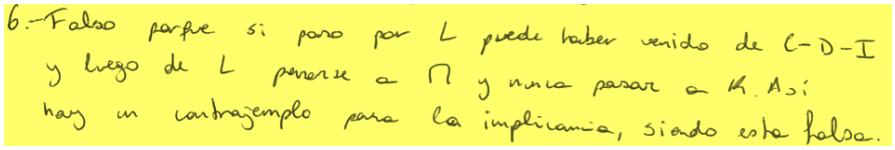


Figura 3. Respuesta de E4 al ítem 6 de la actividad 2.

Otros elementos que constituyen esta DG, fueron determinados de manera análoga: *causalidad de la implicación* y *temporalidad de la implicación* (García-Martínez y Parraguez, 2016). La figura 4 muestra el diseño de la DG para la interpretación de la implicación como entendimiento común.

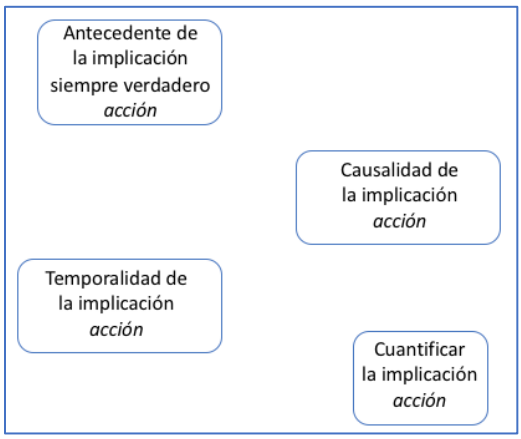


Figura 4. DG de la implicación como entendimiento común.

Es importante señalar que tres de los cinco estudiantes que realizaron las dos actividades, en la primera, consideraron que el antecedente de la implicación debe ser verdadero, sin embargo, en la segunda, donde se les dio la posibilidad "no se puede decir", responden de manera correcta.

Implicación como condicional generalizado

Al indagar definiciones y teoremas en libros de texto (Grossman, 2008; Lay, 2007), se observaron algunos elementos comunes entre ellos, que están incidiendo en la construcción de esta interpretación de la implicación.

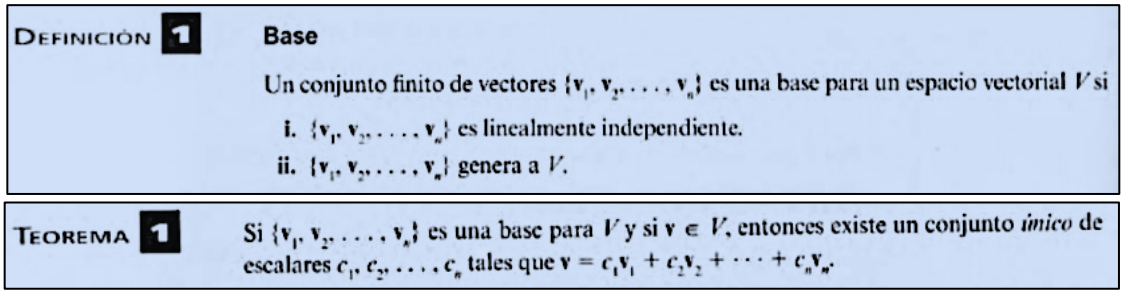


Figura 5. Una definición y un teorema del libro de Grossman (2008, p. 332 y p. 333, respectivamente).

A modo de ilustración, se muestra una definición y un teorema (figura 5) del libro de Álgebra lineal de Grossman (2008), los cuales han sido reinterpretados (figura 6) para mostrar conceptos comunes que sustentan el diseño de la DG. De donde se resaltan los conceptos de *función proposicional,* de *antecedente y consecuente y* de *implicación cuantificada* (este último no está señalado en la figura 6, ya que abarca toda la definición y todo el teorema).

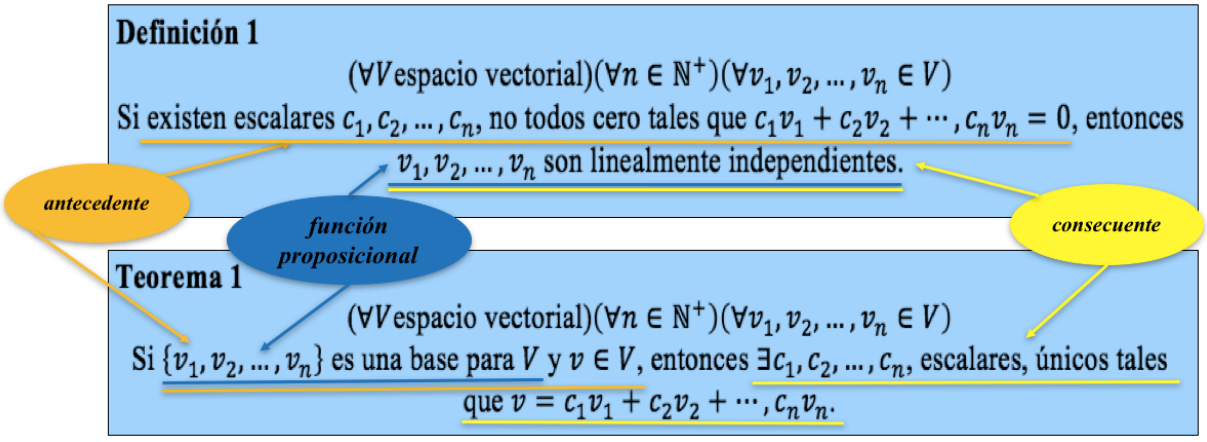


Figura 6. Reinterpretación de la definición y del teorema de la figura 5.

En la definición 1 se observan otras funciones proposicionales, por ejemplo "existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$, no todos cero tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots, c_nv_n = 0$" en donde las variables son los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ del espacio vectorial V.

A partir de estos elementos y la experiencia docente de las investigadoras, se diseñó la DG de esta interpretación de la implicación (figura 7). Consideramos que un estudiante que muestra el concepto de *función proposicional*, lo hace a través de la coordinación de *función* como proceso y de *proposición* como proceso, los cuales debe haber construido previamente.

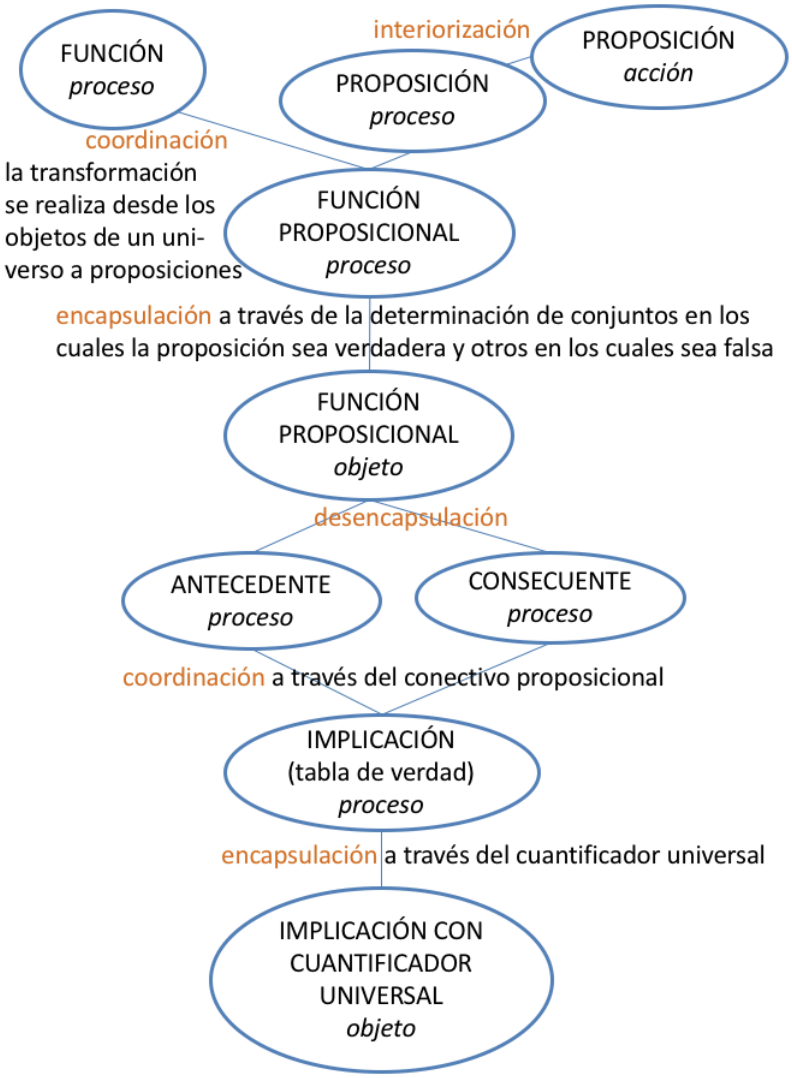


Figura 7. DG de la implicación como condicional generalizado.

Reflexión y conclusiones

La única estructura mental presente en la DG de la implicación como entendimiento común, es *acción* y no se evidencian indicios de mecanismos mentales entre los diferentes elementos de la DG. En cambio, en la DG de la implicación interpretada como condicional generalizado, las estructuras mentales que están son *acción* (proposición), *proceso* (proposición, función, función proposicional, antecedente, consecuente e implicación –dada por la tabla de verdad–) y *objeto* (función proposicional e implicación con cuantificador universal). Y los mecanismos mentales son *interiorización*, *coordinación*, *encapsulación* y *desencapsulación*.

Según Gladys Palau (2014), la lógica que trae el estudiante al comenzar un estudio más formal de la misma, es la lógica del sentido común, cuyas características funcionan como obstáculos epistemológicos para la enseñanza-aprendizaje de la lógica clásica. Esta podría ser una de las dificultades para la comprensión de "la implicación" y para relacionar estas dos DG. Al parecer, los esquemas de estas interpretaciones de la implicación no se relacionan entre sí.

En lo que sigue, la investigación pretende diseñar descomposiciones genéticas para las otras interpretaciones de la implicación, validar o refinar todas las descomposiciones genéticas diseñadas, establecer relaciones entre ellas –si existen– y determinar si es posible diseñar una única descomposición genética que incluya las cuatro interpretaciones mencionadas por Quine (1950).

Entre las conclusiones más importantes, sobresalen la necesidad de diseñar actividades para una propuesta didáctica que permita la construcción del concepto de implicación interpretado como entendimiento común y condicional generalizado, como por ejemplo, actividades que incluyan frases contingentes, ya que el desarrollo de éstas les permitirá a los aprendices alcanzar abstracciones reflexivas de encapsulación.

Agradecimientos

Las autoras agraden la buena disposición de todos los participantes en la investigación.
Una de las autoras es Beneficiaria Beca Postgrado PUCV 2017.

Referencias bibliográficas

Alvarado, A. y González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 73-84.

Alvarado, A. y González, M. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(1), 37-63.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática, 8*(3), 25-41.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in mathematics*, *53*(1), 5-34.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly 110*, 886-899.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 173-189.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2016). Estructuras mentales para un esquema de la implicación como entendimiento común. Estrella, S., Goizueta, M., Guerrero, C., Mena, A., Mena, J., Montoya, E., Morales, A., Parraguez, M., Ramos, E., Vásquez, P.y Zakaryan, D. (Eds.) (2016). XX *Actas de las JNEM,* ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior, 40,* 128–143.

Grossman, S. (2008). *Álgebra lineal* (6ta ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.

Lay, D. (2007). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson educación.

Palau, G. (2014). *Lógica formal y argumentación como disciplinas complementarias.* La Plata: Editorial De la Universidad de La Plata.

Reid, D. (1992). *Mathematical induction. An epistemological study with consequences for teaching.* (Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics). Montreal: Concordia University.

Quine, W.V.O. (1950). *Methods of Logic.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

UM OLHAR PARA ABORDAGEM DOS SIGNIFICADOS DE PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS NO BRASIL

César Diogo Bezerra da Silva, José Ivanildo Felisberto de Carvalho
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE. (Brasil)
cesar.diogo01@gmail.com; ivanfcar@hotmail.com

Resumo

O conceito de probabilidade é um conceito matemático que apresenta diversos significados. Neste estudo tratamos de compreender como o conceito de probabilidade é abordado em três coleções de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental no Brasil. Mapeamos todas as atividades de probabilidade apresentadas nas referidas coleções categorizando-as de acordo com os significados abordados. Pontuamos que, os doze livros didáticos analisados não contemplam de forma satisfatória uma abordagem dos diferentes significados probabilísticos. E ainda, tais livros, não instigam um trabalho com a probabilidade experimental preconizado pelas orientações curriculares e pela literatura atual.

Palavras chave: probabilidade, significados de probabilidade, ensino e aprendizagem de probabilidade, livros didáticos.

Abstract

The concept of probability is a mathematical concept that has several meanings. In this study we try to understand how the concept of probability is approached in three collections of didactic textbooks for the final years of Elementary School in Brazil. We map all activities of probability presented in the collections referred to, categorizing them according to the meanings discussed. We point out that the twelve textbooks analyzed do not satisfactorily provide for an approach on the different probabilistic meanings. Besides, such books do not encourage the work with the experimental probability recommended by the curriculum guidelines and the current literature.

Key words: probability, meanings of probability, teaching and learning of probability, textbooks.

Introdução

Na sociedade atual praticamente todo mundo precisa ter uma efetiva compreensão das leis da probabilidade. Em nosso cotidiano temos que ser capazes de pensar e tomar decisões baseadas em diversas situações de natureza aleatória. Logo é necessário que os estudantes sejam inseridos no estudo da probabilidade desde os primeiros anos de escolaridade.

Currículos de matemática de diversos países há muito tempo apontam a importância da abordagem sobre probabilidade na Educação Básica. Gal (2005) e Batanero (2015) têm indicado razões para o estudo da probabilidade nas escolas: sua utilidade para o cotidiano das pessoas, o seu papel instrumental em outras

disciplinas, a necessidade para a leitura e interpretação de dados estatísticos em muitas profissões e, consequentemente, o importante papel do raciocínio probabilístico na tomada de decisões.

Neste trabalho apresentamos um recorte de uma investigação em que foram analisados os significados, as propriedades e as representações de probabilidade em três coleções de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental no Brasil. O texto aqui desenvolvido foca na análise dos significados de probabilidades desenvolvidos nas referidas coleções didáticas.

Os livros didáticos se constituem em um recurso didático poderoso para a prática docente do professor de matemática. Contudo, poucas investigações sobre probabilidade em livros didáticos foram realizadas. Souza, Coutinho e Souza (2014) afirmam que de 31 pesquisas sobre ensino de probabilidade no Brasil apenas duas trazem como foco o livro didático de Matemática. Nosso trabalho levanta então a problemática de como se dá a abordagem do conceito de probabilidade em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental no Brasil aprovados pelo Programa Nacional de Livro Didático - edição 2014.

Estudos antecedentes

Para Gal (2005), um indivíduo "letrado" em probabilidade deve ser capaz de ler e interpretar informações probabilísticas em seu dia-a-dia, desenvolvendo um conjunto de habilidades básicas que o torne capaz de lidar com uma série de situações reais que envolva uma interpretação probabilística, bem como tomar boas decisões em situações de incerteza. Os livros didáticos, por sua vez, devem propiciar ao professor e aos estudantes situações que contribuam com o letramento probabilístico dos mesmos.

Santana (2011) realizou uma pesquisa sobre as concepções e conhecimentos apresentados por professores dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental concernente à probabilidade. A autora evidencia que os professores apresentaram dificuldades relacionadas à compreensão do conceito de probabilidade. Os professores exploram pouco o conceito probabilístico em sala de aula e justificam apontando a ausência de orientações dos livros didáticos.

Ortiz (2002) realizou um estudo sobre os exemplos e exercícios de probabilidade propostos em uma amostra de livros didáticos espanhóis para alunos de 14 e 15 anos. Livros publicados no período de 1975 a 1991. Os experimentos compostos, a probabilidade e as frequências relativas aparecem com maior destaque entre os conceitos mais frequentes e os exemplos analisados. Por outro lado, alguns conceitos como espaço amostral, experimento aleatório, probabilidade condicional, dependência e independência aparecerem com uma menor frequência. Apenas um texto apresenta exemplos e atividades de todos os significados de probabilidade. Ainda assim a atribuição de uma probabilidade a eventos simples e compostos limitam-se a regra de Laplace.

Outros estudos realizados apontam que os livros focam mais no aspecto do cálculo do que em interpretações de probabilidade (Azcárate e Serradó, 2006; Carranza e Kuzniak, 2009). Diaz-Levicoy e Roa (2014) analisaram três coleções didáticas do 8º ano da educação primária no Chile (estudantes de 13 a 14 anos) e encontraram uma predominância os exercícios rotineiros, de caráter puramente matemático.

Em relação ao conceito de probabilidade, o Guia de Livros Didáticos de Matemática no Brasil (Brasil, 2013) destaca que é importante saber lidar com as noções de chance e incerteza, e da contagem de conjuntos discretos para aplicar o conceito de probabilidade e resolver determinados problemas.

Marco teórico e Metodologia

A Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 2009) discorre que nos processos de ensino e aprendizagem de um conceito matemático se deve pôr em jogo todas as diversas situações que conferem significado a um determinado conceito, além das propriedades e representações que sustentam o referido conceito. Com base neste pressuposto teórico investigamos os significados, propriedades e representações de probabilidades nos livros didáticos. Neste artigo, como já mencionado, apresentamos e discutimos os resultados concernentes aos significados.

A pesquisa se deu em três coleções (12 livros) didáticas de matemática selecionadas entre as 10 coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático edição 2014. As três coleções escolhidas foram as mais adotadas pela escola da região onde a pesquisa foi desenvolvida.

Procedemos a um rastreamento de todas as atividades que envolviam o conceito de probabilidade, dentro e/ou fora dos capítulos destinados ao eixo Tratamento da Informação. Neste estudo, consideramos como atividades: os exemplos, exercícios, problemas, desafios, oficinas e projetos.

Batanero (2005) defende que a probabilidade deve ser introduzida nas salas de aula progressivamente perpassando por seus diversos significados. Utilizamos os significados da probabilidade sistematizados por esta autora nos quais tornam-se o fio condutor da nossa pesquisa. Após identificar as atividades envolvendo a probabilidade partimos para a categorização dos significados conforme as seguintes categorias:

1. Significado Intuitivo;
2. Significado Clássico (incluindo o geométrico);
3. Significado Frequentista;
4. Significado Subjetivo;
5. Significado Formal.

No percurso da análise algumas atividades não puderam ser encaixadas nas categorias anteriores, dessa forma duas categorias foram criadas para dar conta da categorização das atividades, a saber: 6. Noções Básicas de Aleatoriedade e 7. Outras Atividades. Tratamos como Noções Básicas de Aleatoriedade as atividades que envolvem as diferentes características dos eventos aleatórios, como por exemplo, a distinção entre evento certo e evento impossível. E a categoria Outras Atividades, para as atividades de probabilidade que solicitam que os alunos construam problemas envolvendo probabilidade ou pedem aplicações da probabilidade, logo não conseguiríamos, de fato, encaixá-las em uma das categorias mencionadas.

Discussão dos resultados

Mapeamos 179 atividades nos 12 livros didáticos nas quais 6,70% das atividades foram encontradas fora do eixo Tratamento da Informação (TI) e 93,30% dentro do eixo destinado aos estudos sobre estatística e probabilidade.

Os dados nos revelaram que as coleções analisadas não seguem uma tendência no que diz respeito à distribuição das atividades por volumes; por exemplo, apenas uma coleção apresenta atividades de probabilidade nos quatro volumes (6º ao 9º ano), conforme podemos verificar na tabela 1.

Tabela 1: *Distribuição das atividades por coleção e volume*

		Ano				Total
		Sexto Ano	Sétimo Ano	Oitavo Ano	Nono Ano	
Coleções	C1	0	6	3	51	60
	C2	4	28	30	28	90
	C3	0	11	18	0	29
Total		4	45	51	79	179

Fonte: os autores, 2017

Na coleção C1 percebemos uma concentração maior das atividades no livro destinado ao nono ano, enquanto na coleção C2 as atividades concentram-se entre o sétimo e nono. Acreditamos que uma maior distribuição entre os anos de ensino pode contribuir para um estudo acerca da probabilidade de maneira mais detalhada e, consequentemente, mais eficaz.

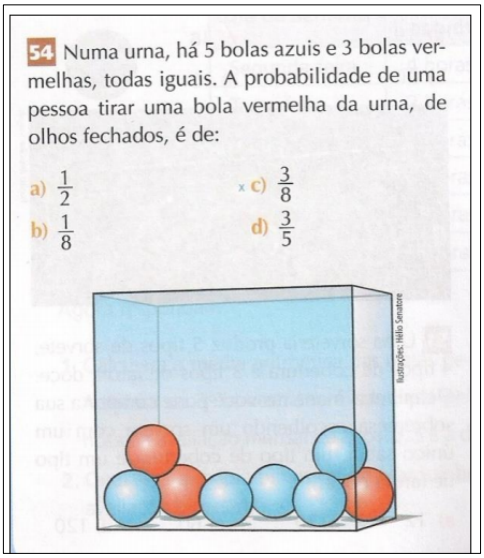
Apontamos como principais resultados que as coleções analisadas apresentam unicamente o significado clássico em 82,1% do total das 179 atividades mapeadas em detrimento ao significado frequentista que é pouco utilizado, aparecendo apenas em 11 atividades. Consideramos esta diferença um dado importante, por que este significado deveria ser mais bem enfatizado uma vez que as coleções estão destinadas à etapa de escolarização do Ensino Fundamental. Os significados intuitivo, subjetivo e formal não foram encontrados nas atividades analisadas.

Destacamos o aparecimento de 20 atividades que trabalham com as noções básicas de aleatoriedade, tais como: evento certo, evento impossível, evento mais prováveis ou menos prováveis e sem necessariamente a solicitação de quantificação de probabilidades; categorizamos tais atividades como Noções Básicas de

Aleatoriedade. Aventamos que atividades deste tipo poderiam ser vistas em maior quantidade e mais distribuídas entre os anos.

Ao confirmarmos que as atividades centramse, em sua maioria, no cálculo da probabilidade nos aproximamos dos resultados obtidos por Carranza e Kuzniak (2009) que destacam em seus estudos com livros didáticos que as atividades focam mais no cálculo da probabilidade e menos na interpretação da probabilidade.

Em nosso estudo, observamos que em cada uma das três coleções a quantidade de atividades que envolvem o significado clássico corresponde a um número muito grande. Segue um exemplo (figura 1) de uma atividade envolvendo o significado clássico no qual se utiliza a regra de Laplace para a sua resolução.


54 Numa urna, há 5 bolas azuis e 3 bolas vermelhas, todas iguais. A probabilidade de uma pessoa tirar uma bola vermelha da urna, de olhos fechados, é de:

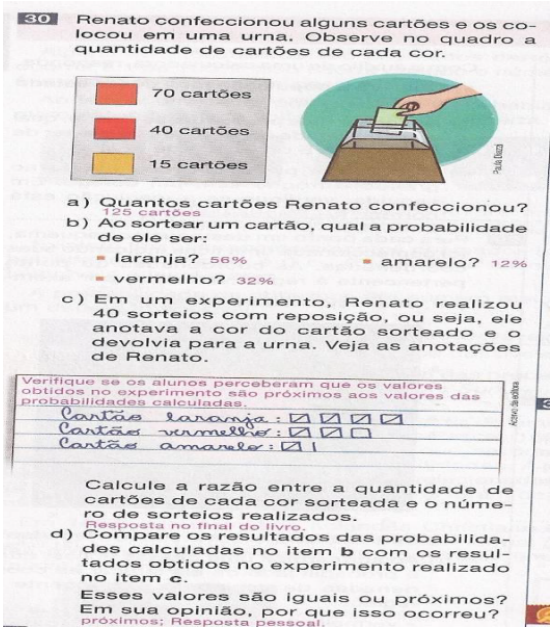
a) $\frac{1}{2}$ x c) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{3}{5}$

Ilustrações: Hélio Senatore

Figura 1: Exemplo de atividade com o significado clássico
Fonte: os autores, 2017.

Na figura 2 a seguir, apresentamos uma atividade que articula o significado clássico com a quantificação de probabilidade por meio dos resultados das frequências observadas em um experimento com sorteios de cartões.


30 Renato confeccionou alguns cartões e os colocou em uma urna. Observe no quadro a quantidade de cartões de cada cor.

70 cartões
40 cartões
15 cartões

a) Quantos cartões Renato confeccionou? 125 cartões
b) Ao sortear um cartão, qual a probabilidade de ele ser:
- laranja? 56%
- amarelo? 12%
- vermelho? 32%

c) Em um experimento, Renato realizou 40 sorteios com reposição, ou seja, ele anotava a cor do cartão sorteado e o devolvia para a urna. Veja as anotações de Renato.

Verifique se os alunos perceberam que os valores obtidos no experimento são próximos aos valores das probabilidades calculadas.

Cartão laranja:
Cartão vermelho:
Cartão amarelo:

Calcule a razão entre a quantidade de cartões de cada cor sorteada e o número de sorteios realizados.
Resposta no final do livro.

d) Compare os resultados das probabilidades calculadas no item **b** com os resultados obtidos no experimento realizado no item **c**.
Esses valores são iguais ou próximos? Em sua opinião, por que isso ocorreu?
próximos; Resposta pessoal.

Figura 2: Exemplo de atividade com os significados clássico e frequentista
Fonte: os autores, 2017

A atividade da figura 2 contempla tanto o significado clássico como o significado frequentista. Basta observarmos que o item (b) solicita ao aluno o cálculo real da probabilidade de alguns eventos e no item (c) o aluno deve utilizar a frequência de sorteios que foi dada para aproximar a probabilidade desses eventos. O item (d) solicita a comparação dos dados nos itens (b) e (c), contribuindo para o raciocínio probabilístico. Este é um bom exemplo de atividade que mobiliza dois diferentes significados.

Os dados obtidos por Azcárate e Serradó (2006) destacam que em uma parte dos livros analisados por eles as atividades envolvendo o significado clássico são encontradas em maior quantidade e em outra parte, as atividades envolvendo o significado frequentista predominam. Nossos estudos distanciam-se dos estudos desses autores, pois, somente 11 atividades que envolvem o significado frequentista foram encontradas em nossa pesquisa.

Consideramos que as atividades que envolvem o significado geométrico podem ganhar maior destaque no estudo da probabilidade e poderiam aparecer com mais frequência nos livros didáticos destinados aos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. No que se refere aos significados subjetivo e formal, Batanero (2005) pontua que a maturidade e rigor matemático necessários nesses significados inviabilizam a inserção deles nessa etapa de escolarização, sendo mais indicados ao Ensino Médio.

Considerações Finais

Em suma, as coleções analisadas não contemplam satisfatoriamente o trabalho com o conceito de probabilidade por meio dos diversos significados, e ainda, não instigam um trabalho com a probabilidade experimental preconizado pelas orientações curriculares.

Investigações como essa se tornam relevantes em relação ao ensino e aprendizagem de probabilidade, tendo em vista que proporcionam a reflexão sobre a importância de se trabalhar mobilizando os significados de probabilidades de acordo com as etapas de escolaridade. Defendemos o estudo da probabilidade a partir de diversos significados, representações e contextos. Consideramos que essa articulação pode contribuir para propiciar o letramento probabilístico dos estudantes da Educação Básica.

Referências Bibliográficas

Azcárate, P., Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.

Batanero, C. (2005). Significados de La Probabilidad en La Educación Secundária. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8 (3), 247-263.

Batanero, C. (2015). Understanding randomness: challenges for research and teaching. Plenary lecture. *Ninth European Congress of Research in Mathematics Education.* Prague.

Brasil. (2013). Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos: PNLD 2014: Matemática*. Brasília, DF: SEF/MEC.

Carranza, P., Kuzniak, A. (2009). Enfoque bayesiano "oculto" y enfoque frecuentista "ambiguo" en los manuales franceses de Première S y ES. En P. Orús, L. Zamora, & P. Gregori (Eds.), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana* (pp.447-460). Universitat Jaume I de Castellón.

Díaz-Levicoy, D., Roa, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista Chilena de Educación Científica,* 13 (1), 9-19.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 43-70. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Ortiz, J. J. (2002). *La Probabilidad en los Libros de Texto*. Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidade de Granada, Granada.

Santana, M. R. M. (2011). *O Acaso, o Provável e o Determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do Ensino Fundamental.* Dissertação de mestrado não publicada (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

Souza, F. dos S., Coutinho, C. e Souza, A. C. (2014). Educação Estatística: o professor e o livro didático. Flávias dos Santos Soares e Bruno Alves Dassie (Eds.), *Anais do VI Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. Niterói: SBEM-RJ.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino de matemática na escola elementar.* Curitiba: Editora da UFPR.

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LOS CONCEPTOS DE HOMEOMORFISMO Y DIFEOMORFISMO

Juan Martín Casillas González, Marisol Radillo Enríquez, Vladimir Efremov
Universidad de Guadalajara. (México)
martin.casillas70@gmail.com, marisol.renriquez@academicos.udg.mx, vefremov3@yandex.ru

Resumen

Los conceptos de homeomorfismo y difeomorfismo, de uso frecuente en el Cálculo y el Análisis Matemático, son importantes en el estudio de la teoría de curvas y superficies de los cursos de Geometría. Por tal motivo, hemos diseñado actividades de aprendizaje que guíen al estudiante en el análisis de las condiciones en que se presentan los homeomorfismos y difeomorfismos, a partir de una función que será sometida a diversos procesos, como cambios de variable, transformaciones de coordenadas e inclusive una proyección estereográfica. El sustento teórico-metodológico de la propuesta involucra tanto el trabajo colaborativo entre los estudiantes, como actividades de visualización.

Palabras clave: representaciones semióticas, difeomorfismo, homeomorfismo, visualización.

Abstract

The concepts of homeomorphism and diffeomorphism, regularly used in calculus and mathematical analysis, are important in the study of the theory of curves and surfaces contained in courses of geometry. Therefore, we have designed learning activities to guide the student in the analysis of the conditions in which the homeomorphism and diffeomorphism are present, starting with a function that will be submitted to various processes, such as change of variable, transformations of coordinates and including the stereographic projection. The theoretical-methodological support of the proposal involves both the collaborative work among students, and visualization activities.

Key words: semiotic representations, diffeomorphism, homeomorphism, visualization.

Introducción

En el año de 2013 en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México dio inicio el nuevo Plan de Estudios para todas las carreras de este Centro Universitario, con un enfoque curricular que involucra competencias y está centrado en el estudiante. En el caso de la Licenciatura en Matemáticas se establecieron los siguientes módulos de formación profesional:

1. Módulo de Soporte Matemático
2. Módulo de Algebra

3. Módulo de Geometría y topología
4. Módulo de Análisis Matemático
5. Módulo de Cálculo
6. Módulo de Estadística
7. Módulo de Ecuaciones Diferenciales
8. Módulo de Métodos Numéricos

El módulo de Geometría y topología consta de 4 unidades de aprendizaje o asignaturas: Introducción analítica a las geometrías I, Introducción analítica a las geometrías II, Geometría diferencial y Topología

La propuesta está diseñada para abordarse en la asignatura de Introducción analítica a las geometrías II. En el Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas, se sugiere cursar esta materia en el tercer semestre de la carrera, después de Teoría del Cálculo I e Introducción analítica a las geometrías I, y el contenido temático del curso está relacionado con la teoría de curvas planas, curvas en el espacio, y superficies. En los dos siguientes semestres se cursarán Análisis complejo y Geometría diferencial, respectivamente, en los cuales también se utilizan los conceptos de difeomorfismo y homeomorfismo.

El programa oficial de la materia, la bibliografía sugerida consta de libros para nivel avanzado o de postgrado, entre estos se encuentra el libro de Do Carmo (1976) *Differential geometry of curves and surfaces,* considerado un clásico de geometría diferencial y otros con enfoques más modernos u orientados a las aplicaciones como el libro *Differential Geometry: Manifolds*, *curves and surfaces* de Berger (2012) y el libro *Elementary Differential Geometry,* de Presley (2012)

En libros de texto de Geometría Diferencial, como el de Do Carmo (1976), se construyen definiciones geométricamente importantes a partir de las ideas fundamentales de derivadas, productos interiores, transformaciones lineales y homeomorfismos, pero justo al llegar a este tópico se aleja de las representaciones visuales (Pinsky, 2013). El libro de Berger (2012) inicia introduciendo a los lectores a las formas diferenciables y variedades (*manifolds*) para luego describir las características de curvas y superficies en términos de aplicaciones diferenciables (inmersiones). En esta obra se pueden observar representaciones gráficas de curvas que parecen más bien construidas a mano alzada a pesar de tener una edición más reciente. Por otro lado Presley (2012) aborda el concepto de homeomorfismo, en la sección de teoría de curvas, como aplicaciones $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ asumiendo que los conceptos previos ya son del dominio del estudiante, y como en el caso de los anteriores, en estos temas se carece frecuentemente de representaciones gráficas.

Por otra parte, en esta etapa de la formación profesional de los futuros matemáticos del CUCEI, la prioridad se centra en sus estrategias de resolución de problemas, la capacidad de abstracción y la formalidad del pensamiento matemático, por lo que la comprensión de conceptos abstractos, como los homeomorfismos y difeomorfismos, queda un tanto "relegada". Dada la importancia de estos conceptos a lo largo de la carrera, este trabajo pretende propiciar que los estudiantes aborden tales conceptos sin

descuidar la formalidad de la matemática. Se parte de la premisa de que la construcción de un concepto matemático se enriquece si se apoya en conceptos y objetos matemáticos previamente aprendidos, por lo que proponemos dos actividades de aprendizaje que permitan al estudiante construir los significados en cuestión, en el curso de Introducción analítica a las geometrías II. Se espera que en lo que resta de este año las actividades sean aplicadas a manera de prueba piloto, con el objetivo de mejorarlas y obtener resultados concretos en los próximos ciclos escolares.

Soporte teórico

El aprendizaje de los objetos matemáticos opera a nivel conceptual, pero la actividad del estudiante sobre dichos objetos solo es posible a través de sus representaciones semióticas (Hitt, 2003). Si se considera que la comprensión de un objeto matemático involucra el desarrollo de una variedad de representaciones, ya sea internas (mentales) o externas (semióticas), entonces la enseñanza debe propiciar el uso de diversas representaciones de un mismo objeto y las relaciones funcionales entre ellas (Font, 2007).

Cada forma de representación de un mismo objeto matemático resalta diferentes propiedades o características, por lo tanto la construcción de significados implica operar con sus diferentes representaciones semióticas. Por ejemplo, no basta con enunciar verbalmente las definiciones de homeomorfismo y/o difeomorfismo, también se requiere identificar todas las características necesarias en los procesos de transformación de funciones, lo cual se apoya en la visualización.

La Visualización matemática es considerada como un camino para la codificación y decodificación de objetos matemáticos abstractos (ideas, conceptos y métodos de las matemáticas), que presentan una gran riqueza de contenidos visuales (imágenes mentales, o a lápiz y papel o con la ayuda de tecnología), representables geométricamente en un sistema coordenado, para la solución de problemas" (López, Alanis y Pérez, 2005)

Desde esta perspectiva, el aprendizaje de matemáticas implica saber representar los conceptos matemáticos en forma simbólica, numérica, gráfica o verbal, y realizar con ellos transformaciones (en la misma forma de representación) y/o conversiones, que son transformaciones de una forma de representación a otra. Se considera que de esta manera se enriquece la construcción de significados, ya que se brinda a los estudiantes la oportunidad de analizar a fondo las características de los conceptos y las interrelaciones entre ellos.

Metodología

Los grupos de estudiantes de la Lic. En Matemáticas no más de 20 estudiantes, así que se propone formar equipos de trabajo colaborativo de binas o tercias, con el propósito generar entre ellos un debate académico para justificar o argumentar sus respuestas a las actividades de aprendizaje.

En lugar de que el maestro proporcione la definición formal de los conceptos de homeomorfismo y difeomorfismo, seguida de algunos ejemplos y ejercicios rutinarios, nosotros proponemos que los estudiantes resuelvan algunas actividades que involucran conceptos y operaciones previamente conocidos, seguidos de una serie de cuestionamientos que los lleven a describir las condiciones establecidas en dichas

definiciones. Una vez hecho esto, se formalizan las definiciones correspondientes. Las actividades están planeadas para implementarse en una sesión de 2 horas cada una, ya que se espera no solamente la interacción entre estudiantes de un mismo equipo sino también finalizar con una discusión grupal dirigida por el profesor, a manera de cierre.

La primera actividad propicia que el estudiante active sus conocimientos previos acerca de funciones biyectivas y sobreyectivas, diferenciabilidad y continuidad de funciones, transformaciones y mapeo, integral definida y coordenadas polares. Dada la función $f(x) = \sqrt{x} + 1$ y se pide a los equipos que: (a) resuelvan la integral $\int_1^4 (\sqrt{x} + 1) dx$ (en forma analítica) y que construyan la representación gráfica correspondiente (figura 1a), y (b) se propone que realice el cambio de variable $u = \sqrt{x}$, y que repitan los procedimientos anteriores (figura 1b).

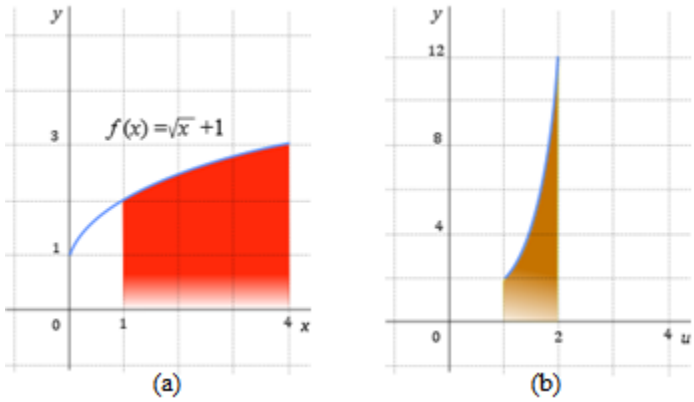


Figura 1. Sentido geométrico del cambio de variable en la función $f(x) = \sqrt{x} + 1$

Sobre esta base, cada equipo deberá analizar, discutir y argumentar cuál es el sentido geométrico del cambio de variable, es decir, cuál es el dominio de la segunda función ($u = \varphi(x) = \sqrt{x}$), cuáles serán los límites de integración pertinentes, si existe la función inversa. Otra cuestión de interés consiste en que los estudiantes argumenten si dicha transformación cumple con ciertas condiciones, por ejemplo inyectividad y sobreyectividad (figura 2).

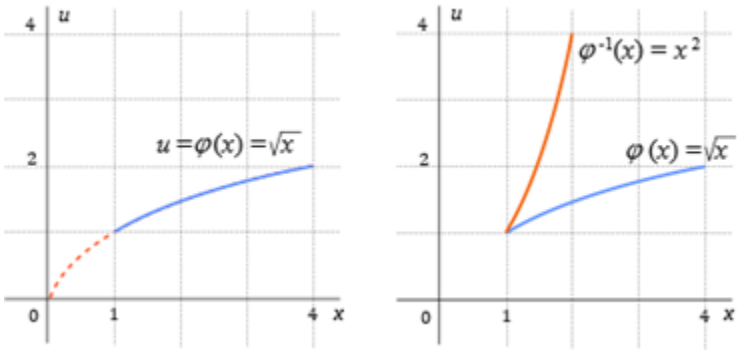


Figura 2. Algunas gráficas para el análisis de la función $u = \varphi(x) = \sqrt{x}$

Una vez que se ha discutido lo anterior, se pedirá analizar características de las transformaciones φ y φ^{-1} que contienen un grado mayor de abstracción como lo son la continuidad y diferenciabilidad. Para concluir el análisis de la aplicación $u(x) = \sqrt{x}$ definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se solicita que el estudiante verifique si es un homeomorfismo, de acuerdo a la siguiente definición:

"Si $T: X \to Y$ es continua y biyectiva, y si el mapeo inverso $T^{-1}: Y \to X$ es continuo y biyectivo, entonces, T es llamado homeomorfismo y X, Y son llamados homeomórficos" (Presley, 2012. p 68).

Los mapeos o aplicaciones pueden extenderse a otras dimensiones y no solo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Para extender el análisis de éstas aplicaciones se propone como segunda parte de esta actividad, analizar el cambio a coordenadas polares. Se pide al estudiante que describa el conjunto de puntos (x, y) que se encuentran en la región R acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ (figura 3a). En este contexto, los estudiantes deberán expresar el punto (x, y) en coordenadas polares (figura 3b), mediante la transformación $x = r\cos t\,,\ \ y = r\sin t$.

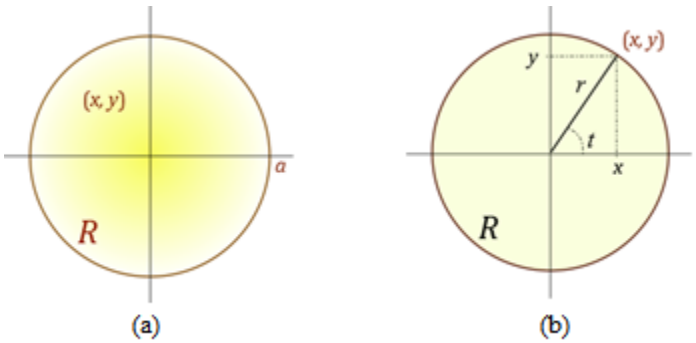


Figura 3. Transformación a coordenadas polares.

Una vez más se pide analizar características como la biyectividad, continuidad y diferenciabilidad de las relaciones $x = \varphi_1(r, t) = r\cos t\,, \qquad y = \varphi_2(r, t) = r\sin t$
Enseguida se solicita a los estudiantes que determinen las transformaciones inversas, esto es, escribir las variables r, t en términos de x, y. Nuevamente se solicita analizar la biyectividad, continuidad y diferenciabilidad de las relaciones $r = \phi_1(x, y), \qquad t = \phi_2(x, y)$ de acuerdo al dominio definido para estas variables.

Para establecer la condición de biyectividad en estas transformaciones la condición de biyectividad, se espera que el análisis de esta característica detone una discusión inicial entre los estudiantes que componen los equipos y que puede derivar en una discusión más amplia entre los estudiantes de todo el grupo. Esta aclaración no solo permite entender mejor el problema se espera que la estrategia de análisis derive e impacte cursos como Teoría del Cálculo II, Teoría Estadística y Análisis Complejo.

Se finaliza esta primera actividad pidiendo al estudiante que verifique si las transformaciones observadas son un difeomorfismo, de acuerdo a la siguiente definición: "Un mapeo suave $T: X \to Y$ que es biyectivo

y cuya inversa $T^{-1}: Y \to X$ también es suave, es llamado difeomorfismo y los conjuntos X, Y son llamados difeomórficos" (Presley, 2012, p.83).

Cabe mencionar que se entiende como mapeo suave a la función T que tiene derivadas de orden k que son continuas en su dominio.

La segunda actividad pretende que los estudiantes analicen una transformación particular de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, la denominada proyección estereográfica, la cual se retomará en cursos posteriores.

La proyección estereográfica utiliza los polos norte $P_N = (0,0,R)$ y sur $P_S = (0,0,-R)$ de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ para proyectar una recta sobre el plano horizontal (figura 4). Por ejemplo, para proyectar la esfera desde el polo norte P_N hacia el plano horizontal, a cada punto con coordenadas rectangulares (x, y, z) en la esfera se asocia un punto en el plano horizontal con coordenadas (u, v), considerando la línea recta que pasa por el polo norte P_N y por el punto $p = (x, y, z)$. El punto asociado (u, v) del plano es aquel obtenido de la intersección de la recta mencionada y el plano, como se muestra en la figura 4.

En esta actividad se determina la relación que hay entre una superficie (esfera) y un plano que se extiende por medio de un punto, llamado punto al infinito y que corresponde al polo norte en la esfera P_N, y los estudiantes deberán verificar si esta aplicación es un homeomorfismo o un difeomorfismo. Se solicita a los estudiantes que construyan estas relaciones (representación analítica) de acuerdo a la geometría que se presenta.

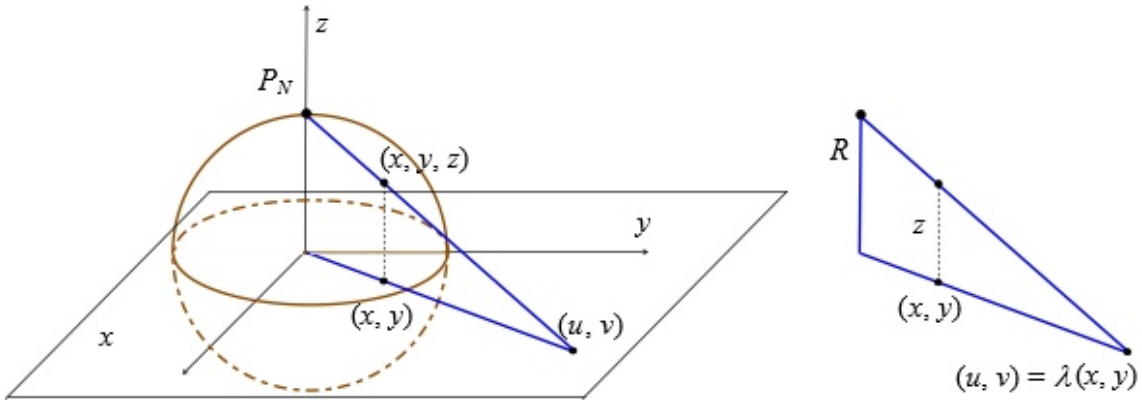


Figura 4. Proyección estereográfica (representación gráfica).

La actividad describe un conjunto de pasos que permiten al estudiante construir las relaciones $u = \varphi_1(x, y, z)$ y $v = \varphi_2(x, y, z)$ que asigna a cada punto (x, y, z) en la esfera, un punto (u, v) sobre el plano. Y las relaciones inversas $x = \phi_1(u, v)$, $y = \phi_2(u, v)$ y $z = \phi_3(u, v)$ que asignan a cada punto (u, v) en el plano, un punto(x, y, z) sobre la esfera. Con esta actividad se pretende activar conocimientos básicos previos, como lo es la congruencia de triángulos, vectores perpendiculares y paralelos, norma euclidiana, entre otros, para que los estudiantes construyan de las relaciones antes señaladas mediante el proceso de visualización.

El empleo de la computadora resulta importante para analizar el comportamiento de la proyección estereográfica, facilita a los estudiantes la manipulación de los recorridos sobre el plano cuando se traslada la recta desde alguno de los polos (figura 5).

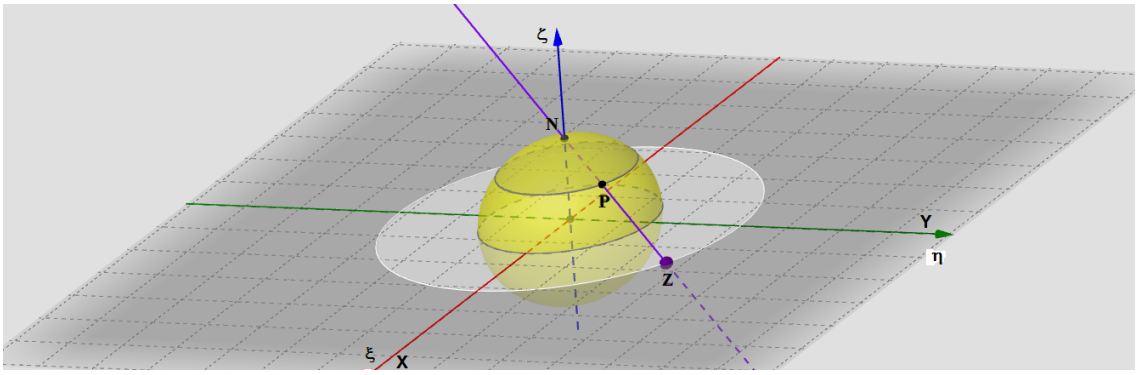


Figura 5. Proyección estereográfica con apoyo del programa computacional *GeoGebra.*

Una discusión grupal debe realizarse al terminar la actividad, así se puede analizar el impacto que tiene el uso del software y verificar si se ha logrado la construcción de los conceptos buscados.

Consideraciones finales

En nuestra experiencia docente, los estudiantes precisan de un largo tiempo para adquirir los conceptos de homeomorfismo y difeomorfismo, debido a su nivel de abstracción y complejidad. Por tal motivo, hemos identificado una "línea de tiempo" mediante la cual los profesores de Cálculo diferencial e integral, Introducción analítica a las geometrías, Geometría diferencial, Análisis real y Análisis complejo puedan resaltar las características y condiciones que implican dichos conceptos, abordadas desde cada una de estas ramas de las matemáticas y al nivel de conocimientos de sus respectivos estudiantes, sin perder la perspectiva global de la formación de los futuros matemáticos. Esta es la primera parte de un proyecto que pretende ampliar la presente propuesta para que, a largo plazo, pueda ser abordada, con las modificaciones pertinentes, en cada uno de los cursos mencionados.

En nuestra opinión, es necesario que los estudiantes construyan activamente los conceptos de difeomorfismo y homeomorfismo y por tal motivo hemos propuesto actividades de visualización tales que, para solucionarlas sea necesario activar los conocimientos previos de los estudiantes. Por otra parte, se propone el trabajo colaborativo para propiciar la interacción entre los estudiantes, lo cual es una parte importante en la construcción de los significados, así como en el desarrollo de las competencias profesionales que involucran construir argumentaciones matemáticas para interactuar con sus pares.

Referencias bibliográficas

Berger, M., Gostiaux, B. (1988). *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*. New York: Springer.

Do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto. Una mirada desde la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME 10(2),* 419-434.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos con ambiente de tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana X(2),* 213-223

López, L., Alanis, A., Pérez, O. (2005). La habilidad ubicación especial matemática, como habilidad esencial, en la visualización matemática. En J. Lezama, M. Sánchez, y J. Molina (Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 131-137. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Pinsky, N. (2013). *Mathematical Knowledge for Teaching and Visualizing Differential Geometry.* Consultado el 20 de marzo de 2017 en http://scholarship.claremont.edu/hmc_theses/49

Presley, A. (2012). *Elementary Differential Geometry*. United Kingdom: Springer

MATEMÁTICA EN LAS CIVILIZACIONES: ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA EN EL ANTIGUO EGIPTO Y BABILONIA

Fabiola Delgado Navarro, Johanna Brenes Ortega
Universidad Nacional de Costa Rica. (Costa Rica)
anadelgado15@gmail.com, Johabreneso@hotmail.com

Resumen

Este artículo trabaja la importancia hacia la historia de la matemática y los aportes actuales en el ambiente escolar de una manera creativa y diferente, para que se pueda implementar de manera innovadora al temario de estudio, dependiendo del año escolar que se utilice. Se enfocará en los aportes de las civilizaciones egipcia y babilónica a las matemáticas, particularmente abordará los sistemas numéricos y operaciones que se realizaban en las culturas egipcia y babilónica. Con el estudio de la historia en nuestras clases se espera lograr un aprendizaje significativo, despertando el interés en muchos de nuestros estudiantes.

Palabras clave: Egipto; Babilonia; sistemas de numeración, ecuaciones.

Abstract

This paper refers to the importance of the history of mathematics and its current contributions in the school environment in a creative and different way, so that it can be implemented in an innovative way to the syllabus, depending on the academic year. It focuses on the mathematics contributions of Egyptian and Babylonian civilizations, particularly, addressing numerical systems and operations in the Egyptian and Babylonian cultures. With the study mathematics history in our classes we expect to reach a significant learning, fostering most of our students' interest.

Key words: Egypt; Babylon, numbering systems, equations.

Introducción

Con el paso del tiempo, se han encontrado diversas culturas alrededor del mundo que han dejado un gran legado, una cantidad de conocimiento que hasta el día de hoy es utilizado o ha sido base para descubrir nuevas ideas. Gracias a los aportes de las civilizaciones antiguas en diversas áreas como: religiosas, científicas, culturales, arquitectónicas, históricas, etc. Y que aparte provocan que se continúen estudiando ya que aún quedan muchos misterios por resolver, dos de esas importantes culturas son la egipcia y babilónica.

Actualmente, se ha despertado el interés de desarrollar, de manera didáctica, los conocimientos matemáticos, utilizando la historia de la matemática, debido a que favorece el aprendizaje de los estudiantes y facilita la labor docente en la introducción de diversos contenidos.

Costa Rica está pasando por un proceso de implementación de un nuevo programa de estudio de matemática, donde el uso de la historia y de actividades relacionadas, facilitan el acercamiento de alumnos y docentes hacia la materia, ya que se puede llevar, relacionar y tener una comprensión más adecuada que lleva a un posible mejoramiento en el rendimiento académico, una percepción diferente y positiva. El uso de la historia de la matemática humaniza, concientiza y motiva el interés constante por parte de las autoridades encargadas de la educación costarricense por mejorar los métodos de enseñanza en el área de las matemáticas, ha favorecido el desarrollo de estrategias didácticas que buscan alcanzar el aprendizaje significativo mediante el uso de la historia de la matemática. Es así como los nuevos programas propuestos por el Ministerio de Educación Pública (2012) en Costa Rica, mencionan que el implemento de la historia de las matemáticas debe concebirse como un recurso para proporcionar oportunidades didácticas especiales, para ofrecer insumos a la lógica de la lección y para la generación de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas. (MEP, 2012, p.64).

Dado a nuestro contexto y el panorama mostrado, se postula nuestro problema de investigación: ¿Cómo poder relacionar los aportes de las civilizaciones egipcia y babilónica con los temas álgebra y aritmética de la enseñanza actual?

Marco histórico

Según Kline (1992) la civilización egipcia se desarrolló sin verse afectada por influencias extranjeras, se desconoce el origen de esta civilización, pero existe la hipótesis de que fue antes del 4000 a. C. Egipto, como decía el historiador griego Heródoto, es un regalo del Nilo. Una vez al año, el Nilo recoge las aguas del lejano sur del África Central y de Abisinia, inunda casi todo el territorio y deja fértiles depósitos de limo al retirarse. Fue una civilización fuerte, poderosa, con grandes influencias y avances en medicina, arte, arquitectura y matemática.

Los hallazgos matemáticos, a pesar de ser de gran importancia, han sido indirectos, y a pesar de la información que se ha obtenido, la reconstrucción completa de la matemática egipcia y babilónica es limitada, mucha de esta información fue descubierta en tumbas o cementerios, y existe mucho material sin publicar y otro que ha desaparecido en saqueos y diferentes situaciones.

Nuevamente, Kline (1992) menciona que el sistema de numeración egipcio es aditivo y no posicional, los egipcios utilizaban para sus cálculos el sistema decimal, tenían 7 símbolos básicos que representaban las unidades, decenas, centenas, etc. Además afirma que existe la hipótesis de que la Geometría surgió en la Civilización Egipcia, pues se efectuaban mediciones de la Tierra posterior a las inundaciones del Nilo. También menciona, que existían fórmulas para el cálculo de áreas o volúmenes, se utilizó una buena aproximación del número π, pero es poco probable que los egipcios conociesen tal número. Asimismo, Kline reporta que tenían un método para el cálculo de la superficie de un círculo, y existe una fuerte posibilidad de que en dicha cultura se conociera el principio del Teorema de Pitágoras, los egipcios y babilonios consideraban la geometría como una herramienta útil.

Los antiguos egipcios desarrollaron sus propios sistemas de escritura, que era de vital importancia, Ritter (2000) menciona las tres principales categorías de uso el sistema egipcio:

- Para títulos.
- Nombres de personas y lugares.
- Nombres de materias primas y cantidades de estás.

Sus sistemas de escritura consistían en dos tipos, uno de ellos, el más antiguo, era la escritura jeroglífica, la que por defecto se tiene en mente cuando se habla de esta cultura, la escritura jeroglífica se utilizó mucho en los monumentos y para uso en la vida diaria, el otro se utilizaba al escribir sobre papiro, era la escritura hierática que era cursiva, fue pictográfica y fue empleada hasta el final de la cultura tradicional y era la forma estándar al escribir con un pincel y tinta, además se menciona que traducir de hierática a jeroglífico era muy difícil.

Por otro lado, Ritter (2000) menciona que la escritura en Egipto y Mesopotamia no fue creada para proporcionar un registro permanente del idioma, sino para contar y dar cuenta de la producción, distribución y el consumo de productos.

Según Alcaraz (2016), unos de los textos matemáticos más importantes de esta cultura son el papiro Rhind y el papiro de Moscú, aunque en este texto no se comentará los hallazgos que contiene el segundo papiro.

Kline (1992) indica que el papiro Rhind, es el único papiro matemático que contiene suficiente información completa de los aportes de la cultura egipcia a las matemáticas y lleva el nombre del dueño que lo adquirió, contiene 85 problemas y soluciones agrupadas por tema, que tenían que ver con la producción de granos, el intercambio de pan y cerveza, entre otros, no se menciona nada de los orígenes de los métodos empleados.

Según Perero (1994), el papiro de Rhind contiene amplios problemas matemáticos que se han estudiado durante años, por ejemplo, el cálculo de un recipiente rectangular de 10 en su longitud, 10 en su anchura y 10 en su altura. ¿Cuál es entonces su capacidad en el grano? Este y otros tipos de problemas sencillos o difíciles de resolver los encontramos en este papiro que mide unos 6 metros de largo y 33 cm de ancho y es el que contiene lo más importante que se ha descubierto sobre la cultura egipcia.

Respecto a Babilonia, Zúñiga (2003) menciona que existen alrededor de 500 000 tablillas de arcilla en la cultura babilónica de ellas 500 son de interés para las matemáticas, además la mayoría de los registros son alrededor del 500 a.C.

Kline (1992) afirma que en el sistema de numeración babilónica, los símbolos principales eran del 1 al 10 y los del 1 al 59 se formaban realizando combinaciones, hasta aquí el sistema era aditivo. Después del número 60 es posicional, la base de este sistema es 60, según la historia los babilonios utilizan el sistema de base 60 por cuestiones religiosas y astronómicas; por ejemplo 6 x 60 = 360, en la actualidad se sigue utilizando el sistema sexagesimal para medir el tiempo en horas, minutos y segundos y para medir los ángulos en grados, minutos y segundos.

Metodología

Para la construcción del taller se realizó una búsqueda bibliográfica para seleccionar las actividades que ajusten a los contenidos de educación primaria o secundaria, luego de elegir las actividades mediante el apoyo de la profesora del curso de historia de las matemáticas de las Universidad Nacional de Costa Rica, se analizó con el nuevo programa de estudios de matemática y se decidió utilizar material concreto con el fin de volver más dinámico el taller.

El taller consitió en una introducción histórica de las culturas egipcia y babilónica resaltando la importancia de los papiros de Rhin y Moscú, luego la explicación y ejemplificación de manera detallada los sistemas de numeración egipcio y babilónico, se introduce el método de multiplicación de los egipcios, el cálculo de raíces cuadradas, la resolución de ecuaciones cuadráticas, la aproximación del número π, el cálculo del volumen de la piramide truncada. Cada asistente al taller eran profesores de secundaria y universidad, cada uno realizó de manera individual las actividades asignadas luego de escuchar el procedimiento necesario y recibir los materiales.

Cada participante construyó una pirámide truncada con la técnica de origami o papiroflexia, que es un arte que consiste en crear figuras mediante el doblado de papel, al deshacer el doblado quedan modelos geométricos sobre la hoja que sirve para guiar a los estudiantes, la cual puede usarse como herramienta didáctica. Se explicó el procedimiento de cálculo de raíces de los babilonios, se señaló la dificultad que este implica para los estudiantes cuando no se usa calculadora, pero buscando alternativas de aprendizaje que atraiga la atención de los alumnos, además de que representó la forma de resolver ecuaciones cuadráticas según el método de los babilonios.

Ejemplos de las actividades del taller

1. La aritmética egipcia fue esencialmente aditiva. La multiplicación también se reducía en último término a procesos aditivos, pero el cálculo era un poco más complicado.

Para calcular 14 por 16, se procedía de la siguiente forma.

1	16
2	32
4	64
8	128

Cada línea se obtiene de la anterior por duplicación, y como 2+4+8=14 y 4
2 ·16=32 , 4·16=64 y 8·16=128, sumando 32, 64 y 128 se obtiene el valor de 14 por 16 cuyo resultado es 224.

2. Para resolver ecuaciones cuadráticas $2x^2 + 7x = 15$ los babilónicos seguían los siguientes pasos:
   1) Multiplicaban el 2 por 15.
   2) Tomar el 7 y dividirlo por 2 que es igual a $\frac{7}{2}$
   3) Tomar el $\frac{7}{2}$ y multiplicarlo por el mismo, lo cual da el resultado $\frac{49}{4}$.
   4) Tomar el $\frac{49}{4}$ y sumarle 30, cuyo resultado es $\frac{169}{4}$.
   5) Encontrar un número que multiplicado por si mismo sea $\frac{169}{4}$, es decir, el número $\frac{13}{2}$.

6) Restarle a $\frac{13}{2}$ lo obtenido en el paso 2 y dividirlo entre el coeficiente 2 entonces la solución es $\frac{3}{2}$.

Resultados

Durante la realización del taller se obtuvo una asitencia de 10 personas, cada activadad duró aproximandamente 20 minutos, se dividió el taller en dos sesiones de hora y media cada sesión, cada una de las actividades llamó la atención de los participantes, aumentando la dinámica entre ellos y los talleristas.

Conclusiones

Las actividades que contiene el taller son de fácil manejo y compresión por parte de los estudiantes y promueve la investigación e interés hacia las culturas y sus aportes, no solo matemáticos, sino en otras áreas, fomenta el trabajo en equipo, es un taller que se puede impartir tanto para estudiantes como para docentes. Se pretende crear nuevos puentes de aprendizaje y enseñanza, que resalten la importancia del uso de la historia en la enseñanza de la matemática.

El conocimiento acerca de una cultura extraordinaria, los egipcios y babilonios dejaron grandes aportes en muchos contextos antes mencionados, como docentes de matemática, se debe buscar nuevas formas de como motivar a nuestros estudiantes, siendo más creativos, dinámicos en el momento de enseñar la historia de las matemáticas de algún tema específico ya que la materia ya está muy estereotipada y no es posible quedarse cruzados de brazos.

El incluir la historia como parte fundamental del desarrollo de una clase, es algo de total relevancia, se retoma toda la riqueza de sus aportes a través del paso de los años y hasta la actualidad, relacionándolo no solo con matemática sino con otras materias, se puede motivar a los estudiantes.

Mostrar como hace siglos las culturas lograron grandes cosas, sin necesidad de tanta tecnología, ya que hoy en día los alumnos creen que sin la tecnología no se vive, ni se logra nada.

De manera creativa e indagando los docentes deben hacer capacitaciones para mejorar la utilización de la historia de la matemática en las aulas, asistiendo a diferentes tipos de talleres o actividades, además al realizar con estudiantes de secundaria, permite que las clases no sean aburridas sino más entretenidas y obtener más conocimientos de las matemáticas como fueron enseñados hace siglos y reviviendo la creación de los temas.

Como investigadores se ha aumentado el conocimiento respecto al desarrollo matemático de los babilones y egipcios, generando nuevas ideas para poder llevarlas al aula y buscar ante todo el aprendizaje de los estudiantes, de formas atractivas e interesantes. Aún así, se puede investigar más sobre las historias de las matemáticas para aprender y trasmitir a los estudiantes, a los colegas y otros docentes. La cultura egipcia y babilónica contiene tantos datos y aportes a las matemáticas de mucha importancia en la actualidad y tantos secretos que algún no se han descubierto o han desaparecidos.

Referencias bibliográficas

Alcaraz, A. (2016). *Matemáticas en el Antiguo Egipto.* Recuperado el 27 de julio de 2016 de http://www.ehu.eus/aba/div/paseo-06-07.pdf

Kline, M. (1992). *El Pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días.* Madrid: Alianza.

Ministerio de Educación Pública (2012*). Programas de estudio en Matemática para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica.

Perero, M. (1994). *Historia e Historias de matemáticas*. México: Iberoamérica S, A de C.V..

Ritte, J. (2000). Egyptian Mathematics. In H. Selin (Ed.), *Mathematics across cultures: The history of non-Western mathematics* (pp. 115–136). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Selin, H. (2000). *Mathematics Across Cultures: The History of Non-Western Mathematics*, 115-136. Kluwer Academic Publishers.

Zúñiga, Á. R. (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas*. San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

TESELACIONES COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA SIMETRÍA

Lucía Solís-Castro, Socorro Daly-Soto
Universidad Nacional. (Costa Rica)
lucydango@hotmail.com, socorrodaly@gmail.com

Resumen

El presente artículo es un reporte de un taller realizado en la RELME 31. Para la contextualización del contenido del taller se inició con una breve reseña histórica de los orígenes de las teselaciones, usos, desarrollo teórico, diferencia entre teselación y tesela y su principal exponente. Posteriormente, se implementan tres actividades didácticas. La primera consta en la reproducción de una teselación en una hoja tipo cuadricula dada. Para la segunda actividad, a partir de una tesela deben encontrar un patrón para cubrir una superficie plana dada en su totalidad. Para la última actividad, con un círculo de papel y un patrón dado, crean un copo de nieve aplicando simetría.

Palabras clave: tesela, teselación, didáctica, matemática, simetría.

Abstract

This paper is a report of a workshop held at the 31st RELME. For the contextualization of the workshop content, we started with a brief historical review of the origins, uses, and theoretical development of tessellations, as well as the difference between tile and tessellation, and its main exponent. Subsequently, three didactic activities were implemented. The first one consists in the reproduction of a tessellation in a given grid sheet. For the second activity, from a tile, they must find a pattern to cover a given flat surface in its entirety. For the last activity, with a circle made of paper and a given pattern, they must create a snowflake by applying symmetry.

Key Words: tile, tessellation, didactics, math, symmetry.

Introducción

El estudio de simetrías forma parte de los currículos matemáticos de la región en diferentes niveles del sistema educativo, por lo tanto, toma relevancia la incorporación de nuevas formas de enseñanza a través de actividades educativas para dejar de lado la monotonía de las lecciones clásicas de matemática procurando mayor interés por parte de la comunidad estudiantil.

El taller es dirigido a docentes del área de matemáticas de todos los niveles de la región. El mismo, se crea con el propósito de profundizar conceptos de la teoría de simetrías saliendo de forma magistral tradicional de dar los conceptos. A través de tres actividades didácticas independientes, se busca estimular la capacidad de abstracción en los participantes del taller.

Ahora, se considera la definición de teselados de Uribe Garzón, S. M., Cárdenas Forero, Ó. L., & Becerra Martínez, J. F. (2014) son "creaciones artísticas que, repetidas sobre el plano, llenan completamente una región sin vacíos ni superpuesto" las mismas se plantean como herramientas de enseñanza.

Se parte con la pregunta de investigación ¿en qué medida se estimula la capacidad de abstracción utilizando teselaciones como estrategia didáctica para el aprendizaje de la simetría?

Marco teórico de la propuesta del taller

Para poder implementar el uso de las teselaciones en el ambito de la Matemática Educativa, es necesario tener en cuenta algunos conceptos previos, los cuáles, Escher describe y permiten entender sus técnicas, entre estas:

a) Todo aquel que desee representar una figura simétrica sobre una superficie plana, deberá tomar en consideración tres principios cristalográficos fundamentales:

- Traslación: Realiza un desplazamiento paralelo de una figura.
- Rotación: Mueve una figura en torno a un punto fijo de rotación y ángulo.
- Reflexión: Todos los puntos del plano son enviados a sus imágenes reflejadas con respecto a una recta de reflexión que actúa como espejo.

b) Empleo de las figuras como trasfondo: Los ojos están hechos para fijarse en un determinado objeto, el resto del campo visual se convierte en fondo.

c) Desarrollo de formas y contrastes

d) El número infinito: Si se quiere representar un número infinitamente grande, se debe reducir gradualmente el tamaño de las figuras y sugerir así que han alcanzado el límite del tamaño infinitamente pequeño.

e) Estampas que narran una historia: La característica principal es la transición de la superficie plana al espacio tridimensional. (Herrera et al., 2010, p.425)

Sobre el uso de las teselaciones en la enseñanza, Angel, M. P et al. (2008) mencionan:

> Las simetrías se reconocen en los mosaicos por la presencia de figuras divididas en dos mitades iguales. Así pues, siempre van a ser los elementos ópticos los que se utilicen para reconocer las isometrías y para construir sus primeras concepciones, a partir de las cuales se podrán derivar más adelante las definiciones y propiedades matemáticas. Por lo tanto, es importante hacer énfasis en esos elementos ópticos típicos de cada isometría, pues una introducción gráfica intuitiva a las isometrías podrá llevar después, con muy poco trabajo, a la idea matemática; sin embargo, la introducción de las isometrías a partir de sus definiciones matemáticas no tiene por qué llevar a la idea gráfica. (p.4)

Por lo anterior, el taller tuvo tres objetivos fundamentales: Realizar actividades que permitan profundizar en la noción intuitiva de simetría que son características de las teselas, teselaciones y teselados, reflexionar

sobre cómo esta noción compleja se puede trabajar en el aula con estudiantes de educación secundaria y mostrar cómo otros contenidos se pueden abordar a partir de las características de las teselaciones algunas nociones matemáticas como áreas, volúmenes, funciones, perímetro y operaciones con fracciones.

Metodología del taller

Se presentan tres tipos de procedimientos con objetos presentes en el entorno escolar y del hogar donde deben detectar y reproducir algún tipo de teselación. Lo anterior se hace por medio de observaciones y propuestas tipo prueba y error permitiendo conocer aspectos epistemológicos, heurísticos y cognitivos de los participantes. Cada una de las expositoras ejerceré un papel de mediador de los conocimientos y guía a los participantes a través de las distintas actividades. Al finalizar cada actividad se les pide a los participantes describir en el material proporcionado la estrategia desarrollada.

Actividades para el taller

Actividad introductoria: Para esta actividad el participante debe poseer una hoja de color, tijera y cinta (todo entregado previamente por el equipo del taller). Siguiendo las instrucciones de una de las talleristas va doblar, recortar, rotar, traladar y pegar las partes de la figura hasta crear una tesela. Posteriormente, todo los tarticipantes se trasladan hasta un espacio designado y deben, entre todos, construir un teselado en la superficie del suelo con las teselas creadas mientras las talleristas los les dan seguimiento mediante preguntas generadoras.

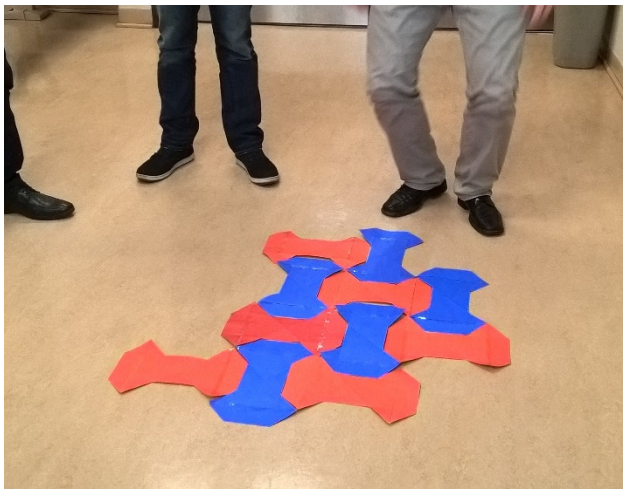


Figura 1. Teselado creado por los participantes del taller.

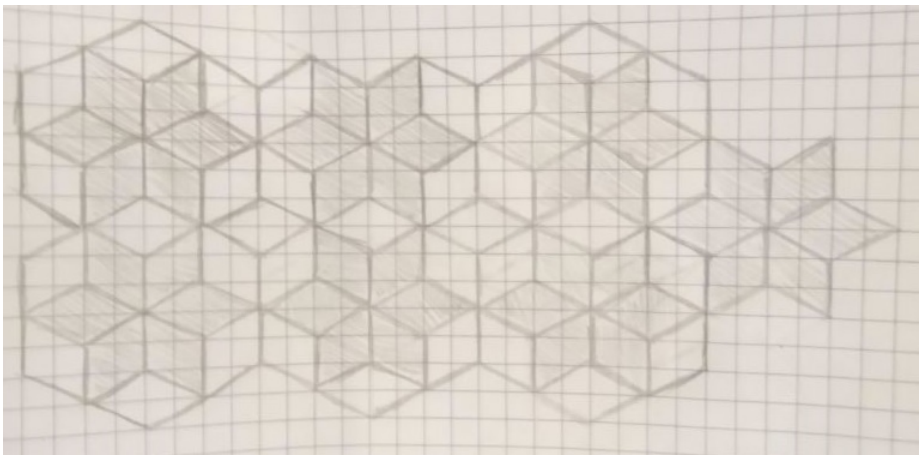


Figura 2. Patrón de teselación

Actividad de percepción: Para esta actividad el participante debe poseer una hoja de cuadricula, una imagen del teselado y un lápiz (todo entregado previamente por el equipo del taller). Debe encontrar el patrón de la teselación e intentar plasmarlo en la hoja de cuadricula. Esta actividad tuvo gran aceptación por parte de los participantes alabando principalmente el esfuerzo y la capacidad de abstracción necesaria para realizarla.

Actividad de reproducción: Para esta actividad el participante debe poseer una hoja punteada, una imagen de tesela y un lápiz (todo entregado previamente por el equipo del taller). Debe encontrar la manera de reproducir la tesela en la hoja punteada hasta completar la hoja en su totalidad. Esta actividad puso a prueba la creatividad de los participantes, ya que, encontraron maneras muy diferentes de realizar la tarea.

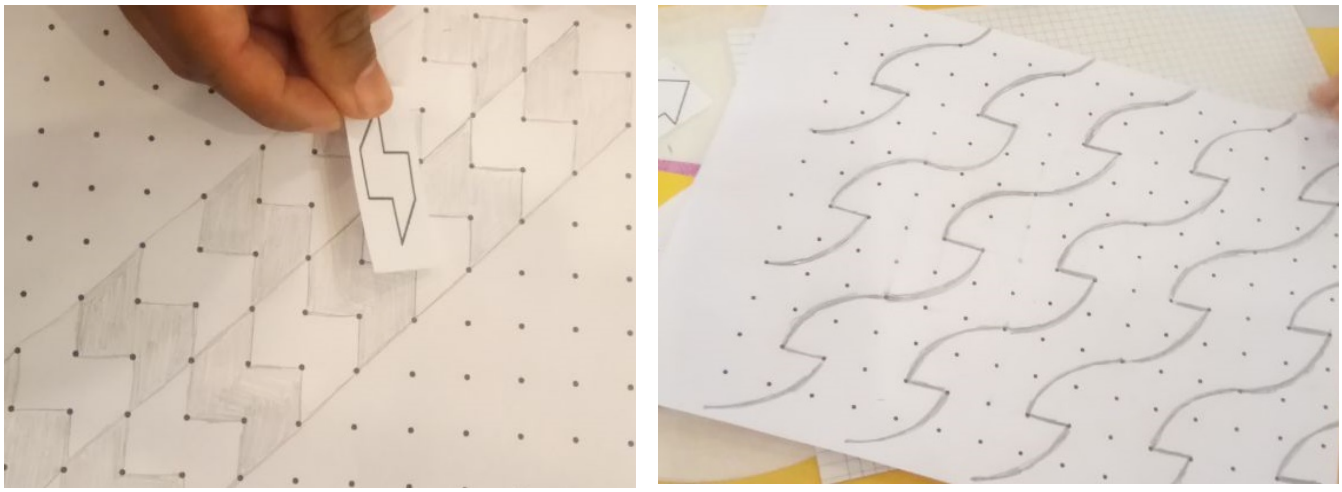


Figura 3. Teselas a reproducir

Actividad de ejecución: Por último, a cada participante se le otorga un par de círculos de café, un lápiz, una tijera y un patrón. Cada circulo de papel debe ser doblado a la mitad la cantidad de veces propuesta por la tallerista. Posteriormente, deben de reproducir el patrón dado y proceder a recortarlo. Esta actividad es la preferida de los participantes. Los ayuda a comprender con qué facilidad se puede enseñar simetrías de una manera dinámica y activa para los estudiantes.

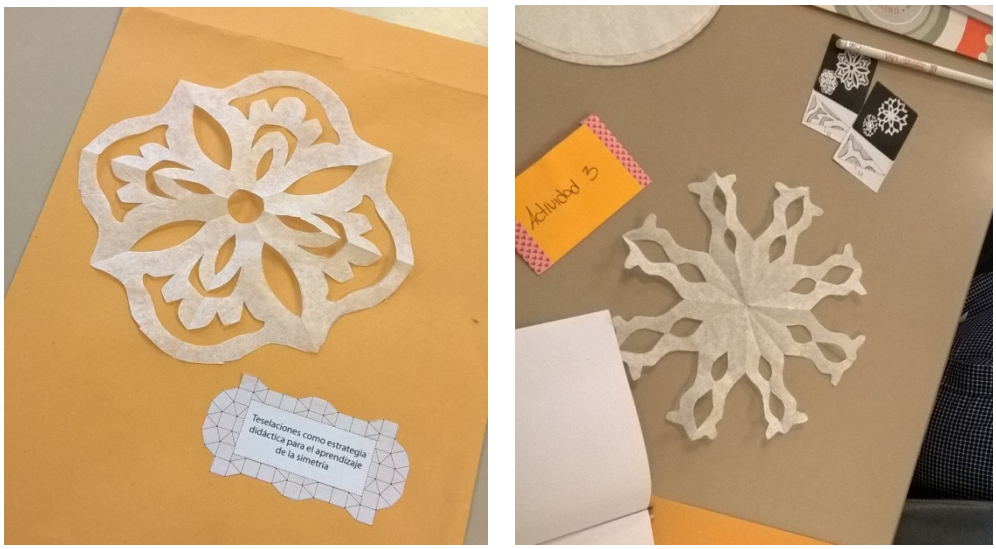


Figura 4. Patrón de teselación

Consideraciones finales

Se considera que al concluir el taller los docentes participantes cuentan con herramientas para profundizar, de manera sencilla, la noción intuitiva de simetría que son características de las teselas, teselaciones y teselados, para llevarlos al aula con estudiantes de educación secundaria. Se ha podido vivenciar que las características de las teselas permiten trabajar otras nociones matemáticas como áreas, volumes, funciones, perímetro y operaciones con fracciones.

Referencias bibliográficas

Angel, M. P., Jiménez, W., Rojas, S., Zambrano, N., & Mora, L. C. (2008). Teselados en el club de Matemáticas. En Luque, Carlos Julio (Ed.), *Memorias XVIII Encuentro de Geometria y VI encuentro de Aritmética* (pp. 15-21). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Herrera, V. C., Montes, Y. E., Cruz, A. C., & Vargas, Á. R. (2010). *Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte*.

Uribe Garzón, S. M., Cárdenas Forero, Ó. L., & Becerra Martínez, J. F. (2014). *Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños.* Educación matemática, 26(2), 135-160.

CONCEPCIONES QUE SOBRE LA PENDIENTE TIENEN ESTUDIANTES PREUNIVERSITARIOS ANTES DE SU ENSEÑANZA FORMAL

Martha Iris Rivera López, Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
caneiris 037@hotmail.com, cdolores2@gmail.com

Resumen

En este escrito se presentan los avances de una investigación cuyo objetivo es estudiar las concepciones de los estudiantes preuniversitarios acerca de la pendiente, previas a su enseñanza formal. Los datos se obtienen por medio de una entrevista basada en tareas, la cual estuvo integrada por trece tareas que involucraron concepciones de la pendiente ya detectadas por otros investigadores. Para el análisis de los datos se empleará el método de Análisis Temático. El estado actual de la investigación se encuentra en la fase dos del análisis de los datos. Se entrevistaron a 32 estudiantes preuniversitarios (15 a 16 años) que no habían recibido enseñanza formal sobre el concepto de pendiente. Las entrevistas se han transcrito, leído y releído con el objetivo de familiarizarse con los datos y el lenguaje usado por los estudiantes. Se han obtenido las codificaciones iniciales, encontrando que la pendiente para los alumnos es: la recta o diagonal, es una subida o bajada, o una inclinación.

Palabras Clave: concepciones, pendiente, razón de cambio.

Abstract

This paper shows advances of a research aimed at studying high school students' conceptions on slope, previous to its formal teaching. The data are obtained by means of a task-based interview, which includes thirteen tasks that involved slope conceptions already detected by other researchers. The thematic analysis method is being used for the analysis of data, which is in the second phase at present. Thirty-two high school students (15 to 16 years old), who had not taken formal teaching about the concept of slope, were interviewed. Interviews have been transcribed, read and re-read with the aim to become familiar with the data and language used by the students. The initial encodings have been obtained, finding that for students the slope is: the straight or diagonal line, an ascent or descent, or an inclination.

Key Words: conceptions, slope, rate of change.

Problemática y antecedentes de la Investigación

La pendiente es una particularidad de la razón de cambio (Stanton y Moore-Russo, 2012), y en México se estudia formalmente en el bachillerato (preuniversitario) en el curso de Matemáticas III (Geometría Analítica). Estos conceptos son importantes debido a su utilidad en la resolución de problemas de

variación y cambio, ligados a la vida cotidiana y, a su vez son precedentes esenciales en la construcción de la derivada (Dolores, 2013; Stanton y Moore-Russo, 2012; Teuscher y Reys, 2012).

En los programas de Matemáticas de la educación secundaria se sugiere por primera vez en la currícula escolar, la conexión de la razón de cambio con la pendiente (SEP, 2011, p.50). Sin embargo, pareciera que para los estudiantes esto no es así, pues en México como en otros países, las concepciones que tienen acerca de este concepto es limitado o más aún no los ven relacionados entre sí (Moore-Russo, Conner y Rugg, 2011; Nájera, 2015; Stump, 1999; Teuscher y Reys, 2010). Stump (2001) y Walter y Gerson (2007) atribuyen dificultades en la comprensión de este concepto matemático a la diversidad de significados que los profesores asocian a la palabra pendiente (inclinación, declive, empinada, entre otras) y a la escasa o nula conexión que hacen con la razón de cambio. Por otro lado, generalmente su enseñanza se centra en la ejercitación de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, dejando de lado su interpretación en situaciones de la vida cotidiana, lo cual orilla a su memorización por parte de los alumnos (Wagener, 2009). Además, como razón de cambio tiene poco o ningún énfasis en la interpretación de lo que significa el resultado dentro de una situación dada o sin tener en cuenta las unidades de medida (Herbert y Pierce, 2008). Esta situación implica una débil transición entre la pendiente como cálculo donde pesa más lo algorítmico a su significado como medición de la variación a través de la razón de cambio en contextos ligados a la vida cotidiana (Walter y Gerson, 2007; Planinic, Milin-Sipus, Katic, Susac y Ivanjek, 2012; Nájera, 2015; Wilhelm y Confrey, 2003).

Con el objetivo de contribuir a la mejora en comprensión de la pendiente, los investigadores se han interesado en detectar primeramente las concepciones que están en juego en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Stump (1999, 2001) detecta ocho concepciones y Moore-Russo et al. (2011) las extienden, aumentando tres más, teniendo así un total de 11 concepciones; de las cuales podemos identificar que cinco están ligadas a la variación y el cambio (razón geométrica, razón algebraica, propiedad funcional, situaciones del mundo real, indicador de comportamiento) y seis vinculadas a propiedades geométricas (propiedad física, coeficiente paramétrico, concepción trigonométrica, concepción en cálculo, determinador de propiedad y constante de linealidad). Al respecto, Stanton y Moore-Russo (2012) encuentran que los documentos oficiales de secundarias estadounidenses involucran al menos 5 de las 11 concepciones, estas son: razón geométrica, razón algebraica, indicador de comportamiento, determinador de propiedad y propiedad funcional.

Por su parte, Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin (2013) al comparar las concepciones de la pendiente que tienen los estudiantes de nivel superior con las de profesores del mismo nivel, apreciaron que la concepción como indicador de comportamiento fue sobresaliente en los estudiantes, lo contrario en los profesores. De la misma manera, en los profesores es relevante la concepción de la pendiente en la aplicación a situaciones del mundo real, no así para los estudiantes. Mientras que en los profesores de secundaria, según del estudio de Hoffman (2015), la concepción que predomina en ellos es la razón algebraica seguida de la propiedad física, y es escasa la concepción trigonométrica, en la asociada al cálculo diferencial como derivada, en la determinante de propiedad como paralela o perpendicular y como constante lineal. Con respecto al concepto imagen que tienen los profesores de la pendiente, declaran que este aparece cuando relacionan inmediatamente a una situación del mundo real, como es en rampas, escaleras, techos de casa, calles empinadas, etc.

Las investigaciones anteriores han dado cuenta de las concepciones que de pendiente tienen los estudiantes (Casey y Nagle, 2016; Stump, 2001), los profesores (Stump, 1999; Hoffman, 2015, Nagle et al., 2013) y las que están presentes en el curriculum estadounidense (Nagle y Moore-Russo, 2014; Stanton y Moore-Russo, 2012), sin embargo, hay vacíos y necesidades por satisfacer en esta línea de investigación. Por ejemplo, Stanton y Moore-Russo (2012) plantean la necesidad de investigar las concepciones iniciales de pendiente que tienen los estudiantes de este concepto. Nagle et al. (2013) plantean la búsqueda de la existencia de una relación jerárquica entre concepciones de la pendiente, o bien centrarse en el papel que juegan los profesores de secundaria en el desarrollo de las concepciones que se forman los estudiantes de este nivel. Hoffman (2015) propone un estudio referente a la comparación de las concepciones de la pendiente en los estudiantes de escuela secundaria y la de sus profesores, o una comparación de las concepciones de los profesores de secundaria con profesores de la educación media superior. Por nuestra parte hemos elegido el primero, el que se centra en la investigación de las concepciones iniciales o previas a la enseñanza formal de la pendiente.

El estudio se centra en el bachillerato ya que el estudio de concepciones sobre la pendiente en este nivel educativo es escaso en México. Asimismo la enseñanza de la pendiente o la razón de cambio es formal en este nivel, lo que lleva al estudiante a modificar o enriquecer sus concepciones. Es indiscutible que en el proceso de enseñanza y aprendizaje se tienda a provocar cambios conceptuales en los estudiantes sobre la base del conocimiento de sus ideas previas, por lo que como afirma Ausubel (1978) en el epígrafe de su obra: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente". Es decir, que para mejorar el aprendizaje es necesario conocer los conocimientos precedentes de los estudiantes, particularmente el relacionado con el conocimiento a ser enseñado, porque este tendrá una influencia decisiva en su aprendizaje. Puede convertirse en obstáculo o en punto de partida para que, en el proceso de enseñanza pueda ser trascendido para acercarlo al conocimiento aceptable. Ignorar sus conocimientos precedentes seguramente conducirá a la preservación de concepciones alternativas, preconceptos o conceptos erróneos, que de por sí son difíciles de remover o trascender incluso con la enseñanza reiterada. Por ello este trabajo de investigación se ha planteado la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué concepciones tienen los estudiantes acerca de la pendiente antes de ser enseñada formalmente en el bachillerato?

Marco conceptual

La razón de cambio y la pendiente son considerados como conceptos equivalentes en este trabajo. El primero es utilizado para modelar procesos de variación y cambio, el segundo es un concepto geométrico que describe la inclinación de las rectas o curvas. Se entrecruzan cuando esas rectas o curvas son utilizadas como representaciones gráficas de funciones que modelen situaciones variacionales. Ambos son presentados con el mismo modelo matemático, es decir un cociente de diferencias $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. A medida que el concepto de pendiente es utilizado para medir el cambio en situaciones que impliquen una razón de cambio constante o no constante, este suele denominarse razón de cambio, además de que este involucra diversos contextos como la física, la biología, la economía, cálculo, etc. Las concepciones son asumidas en el mismo sentido que Thompson (1992): "son ideas, opiniones o juicios que forman parte del pensamiento. Son una estructura mental general que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y similares (Thompson, 1992, p. 130).

Metodología

Participaron 32 estudiantes de bachillerato que aún no han cursado Matemáticas III o no han trabajado formalmente el concepto de pendiente. La recolección de datos se realizó a través de una entrevista basada en tareas que incluyó las concepciones de pendientes que ya han sido categorizadas por otros investigadores (Dolores, Alarcón & Albarrán, 2002; Moore-Russo et al., 2011; Stump, 1999, 2001). Consideramos que la entrevista basada en tareas es adecuada porque permite observar el comportamiento matemático de las ideas que usan los participantes. Además, esto nos permitirá hacer inferencias sobre el posible significado matemático que se les atribuye (Goldin, 1997). Para nuestro estudio, la entrevista basada en tareas sirve para explorar las concepciones de la pendiente que cada participante tiene o pone en práctica al resolver cada una de las tareas. La entrevista constó de 13 tareas que se dan en diferentes contextos, fue aplicada individualmente y con una duración promedio de una hora, esta fue semiestructurada, ya que se dio la libertad de agregar otras preguntas a fin de profundizar sobre su respuesta o procedimientos.

Para analizar los datos, utilizamos el análisis temático sugerido por Braun y Clarke (2012), este método permite identificar, organizar y ofrecer información sistemática sobre patrones de significado (temas) a través de un conjunto de datos. Este método se estructura en seis fases:

- *Familiarizarse con los datos*. Se transcriben y leen repetidamente las entrevistas, con el objetivo de familiarizarse con los datos y el lenguaje usado por los estudiantes.
- *Generación de códigos iniciales*. Sobre la base de la pre-lectura de las narrativas, se establecen códigos iniciales para una primera clasificación. Se buscan palabras o frases utilizadas por los estudiantes para referirse a la pendiente, sus procedimientos y justificaciones.
- *Búsqueda de temas*. Se revisan los datos codificados para identificar las áreas de similitud y superposición entre los códigos.
- *Revisar los temas*. Esta fase implica un proceso recursivo mediante el cual se revisan los temas en desarrollo en relación con los datos codificados y el conjunto completo de datos. Esta fase se centra esencialmente en el control de calidad.
- *Definir y nombrar temas*. Al definir los temas, se necesita ser capaz de expresar claramente lo que es único y específico sobre cada tema, si puede resumir la esencia de cada tema en unas pocas oraciones es una buena prueba de esto.
- *Producir el informe*. La fase final del análisis es la producción de un informe como un artículo de revista o una disertación. El propósito de su informe es proporcionar una historia convincente sobre sus datos basados en el análisis. La historia debe ser convincente y clara pero compleja e incrustada en un campo académico.

Resultados

Las entrevistas se transcribieron para su respectivo análisis, se leyeron repetidamente. Para complementar la familiarización con los datos se realizó una tabla en el programa de Microsoft Excel en la que se escribieron los argumentos y procedimientos empleados por cada estudiante en cada una de las tareas planteadas. Se resaltaron las frases más significativas o claves que refieren a la pendiente y se

denominaron como códigos iniciales, dando lugar así a la segunda fase del análisis temático. En este escrito, sólo se presentan algunos resultados de las codificaciones iniciales. Por ejemplo, la tarea 1 consistió en asociar imágenes que tuvieran relación con la pendiente, con el objetivo de conocer su idea general de pendiente, además de identificar si pesa más las situaciones escolares o las de su vida cotidiana. Se dieron cuatro imágenes: una cancha de futbol, una recta presentada en el plano cartesiano, la gráfica que representa la distancia recorrida en función del tiempo en el lanzamiento de un balón y por último un cerro. En esta tarea se identificaron quince códigos (palabras en cursivas) de los cuales fue posible agrupar en cuatro categorías tal como se muestra en la tabla 1. Algunos códigos no se presentan dado que no aparecen tan frecuentes, pero si serán considerados en el resto del análisis.

Tabla 1. *Codificaciones iniciales correspondientes a la tarea 1*

Categoría	Códigos	Ejemplo de extracto de la entrevista
Recta	Diagonal Segmento Línea recta	E17: Una pendiente es digámoslo como una *línea diagonal*. E6: Aquí vemos una recta que está inclinada y tiene un ángulo menor a 90 y la pendiente es la *recta.*
Subida o bajada	Caída o bajada Va decayendo	E5: La pendiente es algo así como *una caída*, como que va de bajada [simula con brazo una diagonal]. E17: Una pendiente es como una línea por así decirlo, es como *una caída o subida* por donde va a subir cierto objeto o va a bajar cierto objeto.
Inclinación	Tiene inclinación Forma un ángulo	E21: La montaña tiene un punto más alto y un punto bajo y tiene una *inclinación.* E8: La b también tiene una *inclinación*.
Distancia	Es una medida Es un recorrido	E15: La pendiente es *como una medida* y aquí mediría esto [señala la recta] E7: La b está midiendo una cierta *distancia* de dónde avanza el objeto.

En algunos extractos de las entrevistas aparece más de un código, de manera que se consideran de forma separada. En esta tarea, el código *recta o diagonal* es identificado en al menos 40% de los estudiantes quienes hacen explícito que la pendiente es la recta, otros estudiantes complementan con características como: está en forma de diagonal, tiene una elevación, tiene una inclinación, etc. La imagen que asocian más con relación a la pendiente es la recta en el plano cartesiano (75%) y la representación del lanzamiento de un balón (53%). Un 34% de los estudiantes asocia con la imagen del cerro y un 12% con la cancha de futbol. Cabe mencionar que entre los argumentos se destaca que la elección de la cancha de futbol se debe a que piensan en el lanzamiento de la pelota, es decir en la actividad que se realiza en ella.

En otra tarea, la dos, se pide la pendiente de una calle que tiene que recorrer un auto para llegar a una cima. La imagen empleada para representar la situación vislumbra un triángulo rectángulo con sus correspondientes medidas (Figura 1).

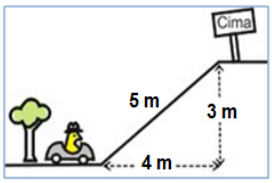


Figura 1. Imagen mostrada para la tarea 2

Para esta tarea se encontraron 14 códigos y por el momento se han agrupado en tres categorías, tal como se muestra en la tabla 2.

Categoría	Códigos	Ejemplo de extracto de la entrevista
Distancia	Distancia por recorrer Distancia mínima Medida Altura	E3: Es *la distancia* que tiene que recorrer de este punto a este punto. E8: Por como está representada es como *la mejor vía* para llegar acá arriba.
Inclinación	Inclinación Diagonal	E2: Sería *la diagonal* que son 5 metros E8: La pendiente vendría siendo esa línea, *la diagonal*.
Subida o bajada	Subida Descenso	E19: No tiene pendiente porque *no hay un descenso*. E22: Porque esa es una pendiente en sí [señala la hipotenusa], todo lo *que valla hacia arriba* y *hacia abajo* se conoce como pendiente.

Tabla 2. Codificaciones iniciales correspondientes a la tarea 2

Esta tarea se planteó con el objetivo de mirar que empleaban para calcular la pendiente y si se mantenía la idea de la pendiente como el segmento o la diagonal. Como resultado de la primera codificación a esta tarea se encontró que la idea de pendiente es asociada explícitamente con la *distancia*, ya sea distancia por recorrer o distancia mínima en al menos un 50% de los estudiantes, otros códigos asociados a esa categoría es la medida de la altura o de la distancia horizontal. Un 25% de los estudiantes esgrime explícitamente la pendiente como la recta y un 24% con la propiedad de tener una inclinación, ser una subida o una bajada. Con el objetivo de confirmar la idea de pendiente como la distancia o longitud, se planteó una tercera tarea en la que se dan tres techos con la misma pendiente pero de diversos tamaños y se preguntó sobre el techo que tuviera mayor pendiente. En esta tarea de confirmó la idea de pendiente como *longitud*

en al menos un 72% de los estudiantes, quienes justificaron su decisión atribuida al tamaño de los techos y dejando de lado la inclinación. El resto de los estudiantes decide por *la inclinación* de los techos, es decir confirman que los techos tienen la misma pendiente.

Reflexiones finales

En las principales concepciones detectadas en los estudiantes se muestra la idea de la pendiente como *la recta*, como una *distancia* y como *la inclinación*. Esta última en un sentido físico es decir, como al *desnivel de un terreno*, atribuido a ejemplos de *subidas* o *bajadas*. Cuando se les pidió a los estudiantes relacionar la pendiente con situaciones escolares o con situaciones de la vida real, notamos que la asocian con la gráfica de una recta y con escasa frecuencia con situaciones de la vida real. Sin embargo, en los argumentos de los estudiantes figura su experiencia en situaciones de su vida cotidiana, como lo es con lo *empinado o inclinado*, pero al momento de enfrentarse a las tareas que se les plantearon pesó más sus experiencias escolares. ¿A qué se debe que omitan sus concepciones asociadas a su experiencia en la vida real?, ¿De qué manera se puede introducir a la pendiente considerando las concepciones que se encuentren en estos estudiantes? En este momento no estamos en condiciones de responder a estas preguntas, sin embargo podemos notar que su enseñanza se ha centrado sólo en lo procedimental y en el contexto matemático, dejando de lado su relación con otros contextos. Esta enseñanza conlleva al estudiante a formarse la idea de que lo que aprende en sus clases de matemáticas sólo le va a servir para aprobar sus cursos de matemáticas, orillando la categorización de sus aprendizajes por asignaturas y sin relación entre sí.

Referencias Bibliográficas

Ausubel, D. (1978). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognitivo*. México: Trillas.

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *APA Handbook of research methods in psychology: Research Designs* (pp: 57-71). Washington (DC): American Psychological Association.

Casey, S., & Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 163-177.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada.* México, D. F.: Díaz de Santos.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *5*(3), 225-250.

Herbert, S., y Pierce, R. (2008). An 'Emergent Model' for Rate of Change. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(3), 231–49.

Hoffman, W. (2015). *Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews* (Doctoral dissertation) The University Of North Carolina At Charlotte.

Goldin, G. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *9*, 40–177.

Moore-Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 3–21.

Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2014). Slope across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. *Mathematics Educator*, *23*(2), 40-59.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., y Martin, K. (2013). Calculus students'and instructors'conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(6), 1491-1515.

Nájera, J. (2015). *Conexiones que establecen los estudiantes de bachillerato al resolver Problemas de razones de cambio.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A., y Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International journal of science and mathematics education*, *10*(6), 1393-1414.

SEP, (2011), *Programas de estudio 2011 guía para el maestro. Educación secundaria. Matemáticas.* México, D. F.: Secretaría Educación Pública. Consultado en: http://evaluaciondocente.sep.gob.mx/materiales/SEPPROGRAMASDEESTUDIO2011.GUIAPARAELMAESTRO.SECUNDARIA.MATEMATICAS.pdf

Stanton, M., y Moore- Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, *112*(5), 270-277.

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124–144.

Stump, S. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, *101*(2), 81-89.

Teuscher, D., y Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and Steepness: Do students understand the concepts? *Mathematics Teacher, 3*(7), 519–524

Teuscher, D., y Reys, R. (2012). Rate of Change: AP Calculus Students' Understandings and Misconceptions after Completing Different Curricular Paths. *School Science and Mathematics, 112*(6), 359–376.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Walter, J. G., y Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(2), 203-233.

Wagener, L. (2009). A Worthwhile Task to Teach Slope. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(3), 168-174.

Wilhelm, J., y Confrey, J. (2003). Projecting Rate of Change in the Context of Motion onto the Context of Money. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(6), 887-904.

LA YUPANA: UN INSTRUMENTO HISTÓRICO COMO ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS

Belén Cabrera Navarrete
Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac. (Perú)
belencabreran@gmail.com

Resumen

La investigación en el marco de su propósito ha desarrollado la competencia matemática actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad, para ello, los estudiantes de Educación Inicial Intercultural Bilingüe de la Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac desarrollaron sus capacidades matemáticas como son: matematiza, comunica y representa, elabora y usa estrategias propuestas por el MINEDU en las Rutas de Aprendizaje (herramienta metodología de guía al docente de Educación Básica Regular) a partir de la solución de problemas del contexto andino, intervinieron las cuatro operaciones básicas utilizando modelos teóricos propuestos para el uso didáctico de la Yupana, instrumento de cálculo de los bienes, deudas, población, etc, del incanato.

Palabras clave: competencias, capacidades, operaciones básicas, yupana.

Abstract

This investigation has the aim to develop the mathematical competence '*act and think mathematically in quantity situations'*; therefore, from the solution of problems of the Andean context, the students who are majoring in Initial Intercultural Bilingual Education at the National University 'Micaela Bastidas' of Apurimac developed their mathematical abilities and skills such as; do mathematics, communicate and represent, and also elaborate and use strategies proposed by the Education Ministry (MINEDU) in the Learning Guidelines (a methodological tool to guide the teacher of Regular Basic Education),where the four basic operations intervened, using theoretical models proposed for the didactic use of the Yupana; which is an instrument that was used to calculate goods, debts, population, etc. in the Inca period.

Keywords: competences, capacities, basic operations, yupana.

Introducción

La presente investigación inicia luego de una experiencia de varios semestres de enseñar la asignatura del séptimo semestre denominado: Matemática Andina a estudiantes de Educación Inicial Intercultural Bilingüe, quienes usaron el algoritmo de las cuatro operaciones básicas en forma mecánica y repetitiva,

siendo un limitante para el desarrollo y fortalecimiento de capacidades matemáticas. Se propuso una alternativa de solución en beneficio académico del estudiante para que logré crear procedimientos propios que permitan el desarrollo de sus capacidades matemáticas como son: matematiza, comunica y representa, elabora y utiliza estrategias que tiene como objetivo el desarrollo de la competencia actúa y piensa matemáticamente utilizando la Yupana. Como marco metodológico se utilizó: la Ingeniería Didáctica y como marco teórico: la teoría de las Situaciones Didácticas y la Etnomatemática. Para ello, se realizó el análisis preliminar, el análisis a priori, la experimentación y finalmente la evaluación de la investigación; la conclusión a la que llegamos es: el 90 % de los estudiantes lograron desarrollar las capacidades, respecto a la competencia propuesta.

Marco teórico

Se tomó en cuenta las referencias de los teóricos de la Etnomatemática, en ese sentido se propone el estudio de la historia y la filosofía de la ciencias relacionándose con las formas de haber acumulado conocimiento durante generaciones en ambientes naturales y culturales, distintos al ambiente donde nos desenvolvemos actualmente según D´Ambrosio, U. (2014); en el mismo camino se revalora la matemática del incanato, realizándose un estudio sobre el cálculo empleado en la contabilidad de los Quipucamayoc; quienes eran los contadores mayores (contabilizaban las deudas mayores) y los contadores menores (contabilizaban las deudas menores) según Guaman Poma, F. (1615); se hizo un estudio sobre el empleo de piedritas y granos de maíz en el suelo para calcular tributos entregados a los Caciques, Quipucamayoc y Corregidores que, registrados en los quipus, dichos tributos podían ser barras de plata, cabezas de ganado entre otros que posteriormente eran plasmados por el escribano en letras castellanas esto ocurrió hacia los años 1578, la práctica de contar con piedritas y granos de maíz y almacenar información en los quipus fue una práctica vigente en los Andes antes de la llegada de los españoles y colonizada por los mismos en favor de la recaudación de impuestos Curatola, M. y De la Puente J. (2013).

A la vez también se utiliza la teoría de las Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau, G. (1997). de modo que intervienen tres elementos fundamentales: el estudiante, el profesor y el medio didáctico (el saber matemático), el profesor propone situaciones didácticas y los estudiantes puedan vivenciar para que el conocimiento sea construido por los estudiantes y se muestre como una solución óptima; así mismo se ha trabajado con la propuesta del MINEDU (2013), documento curricular que fomenta el desarrollo de las competencias, para el estudio se enfatizó en la competencia *Actúa y Piensa matemáticamente*, en situaciones de cantidad: número, operaciones y capacidades matemáticas, como son: *matematiza* (representa símbolos matemáticos y modelos), *comunica* (el uso de símbolos especiales para realizar los cálculos), *elabora y usa estrategias* (planifica ejecutas estrategias heurísticas en los procedimientos de cálculo) y *representa*. Por otra parte se consideró los modelos de tablas de la Yupana, propuestos por sus creadores, que se muestra en Tk- Yupana (2016).

Metodología

La investigación se realizó durante el semestre 2016-II, con un total de 33 estudiantes, quienes tienen un promedio de 20 años de edad, existe la experiencia de haber realizado cálculos con las cuatro operaciones básicas en la educación primaria, pero al desarrollar ejemplos usando la Yupana presentaron dificultades.

Se considera que ellos deben desarrollar y reconocer sus competencias y capacidades por lo que se les propone rehacer sus procedimientos. Se inició el trabajo aplicando la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación con: una revisión bibliográfica de textos de matemática andina, etnomatemática, uso de la Yupana, enseñanza aprendizaje de las cuatro operaciones básicas y artículos científicos relacionados al tema. Al mismo tiempo se realizó un análisis sobre los procedimientos de cálculo de las cuatro operaciones básicas por parte de las estudiantes de EIIB a través de una prueba de diagnóstico. Se hizo una revisión bibliográfica del currículo respecto al tema de estudio; se procedió a elaborar las secuencias didácticas donde se planteó tareas para el uso manipulativo de la Yupana usando propuestas de autores como son Burn, W. Wassen, H. Pasquele, N. Radicati, C. Chirinos, A. y Ríos, R. En esta etapa, se elaboraron las diferentes tablas de la Yupana; se realizó la experimentación en base a las secuencias didácticas elaboradas a las que las estudiantes se resistieron debido a que siguieron un proceso de aprendizaje usando algoritmos empleados en el paradigma tradicional de las cuatro operaciones en la educación primaria, sin embargo se logra el propósito con el transcurso del tiempo alrededor de cuatro semanas y finalmente los estudiantes graban un video para luego autoevaluarse y redactar un informe de modo que evidencien las capacidades matemáticas visibilizadas en la presentación del video como: representaciones de los números en la Yupana con el grano de maíz, desarrollo de algoritmos o estrategias matemáticas al mover el grano de maíz de una posición a otra para obtener un resultado.

Resultados

Los estudiantes lograron identificar y desarrollar las capacidades matemáticas consignadas en el estudio al resolver problemas matemáticos de contexto relacionados al cálculo de las cuatro operaciones básicas usando los modelos de Burn, W. Wassen, H. Pasquele, N. Radicati, C. Chirinos, A. y Ríos, R. usando la Yupana, evalúan sus capacidades de matematizar (pensar matemáticamente), comunicar y representar situaciones y objetos, elaboración y uso de estrategias; se pudo evidenciar que utilizando la Yupana es posible desarrollar capacidades y competencias a diferencia del cálculo que se realiza tradicionalmente en las aulas del nivel de educación primaria y proceden a un proceso de autoevaluación del desarrollo de sus capacidades matemáticas vinculado al contexto andino.

A continuación se muestra la autoevaluación de un estudiante en cuanto a la capacidad de: *representa y comunica*.

- Ubicamos las semillas en la tabla.

- Representamos la operación matemática en la tabla de acuerdo a nuestro problema planteado con las semillas de maíz a eso se le denomina la representación con material concreto por otra parte al momento de crear nuestro problema escribimos los números de acuerdo a las operaciones matemáticas a eso se le denomina la representación simbólica.

Figura 1 Fragmento de auto-evaluación de la tabla de Yupana, propuesto por Pasquale, N.

Un estudiante que ha seguido el proceso de auto evaluación, describe las representaciones concretas y simbólicas, usa lenguaje matemático para comunicar los procedimientos que ejecuta al resolver un problema en la tabla elaborada por Pasquale, N.

Competencia: *Usa y elabora estrategias*

Aquí consigna estrategias matemáticas como son: el cálculo mental, desarrollo de operaciones, uso de algoritmos al realizar la suma, resta, multiplicación y división el reconocimiento en la tabla de las unidades, decenas y centenas; el estudiante planea los procedimientos a seguir para lograr el objetivo.

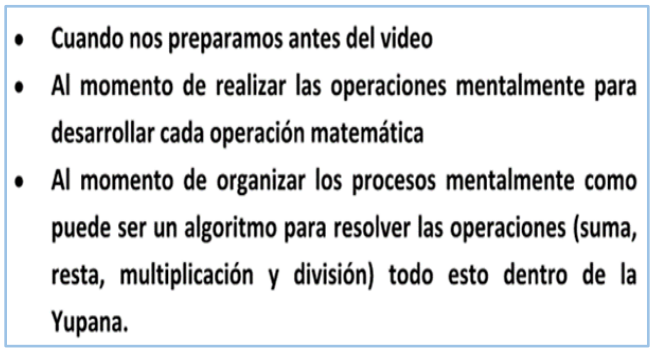

- Cuando nos preparamos antes del video
- Al momento de realizar las operaciones mentalmente para desarrollar cada operación matemática
- Al momento de organizar los procesos mentalmente como puede ser un algoritmo para resolver las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) todo esto dentro de la Yupana.

Figura 2 Fragmento de usa y elabora estrategias

El estudiante se autoevalúa en cuanto al uso y elaboración de estrategias matemáticas de modo que enfatiza en los procedimientos de cálculo mental, los algoritmos utilizados al realizar las cuatro operaciones básicas.

Con la Yupana es posible desarrollar capacidades y competencias matemáticas que se han mencionado en la investigación, a la vez se desarrollan habilidades durante el proceso del cálculo de la cuatro operaciones sin usar lápiz y papel, como son: la velocidad en el cálculo, la concentración, la memoria, la creatividad, la motora fina, la toma de decisiones, los dos hemisferios del cerebro, entre otros.

Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (Eds.). (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: una empresa docente.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Curatola, M. y De la Puente J. (2013). *Contar concertando: quipus, piedritas, y escritura en los Andes coloniales.* Lima: Pontifica Universidad Católica del Perú..

D´Ambrosio. U. (2014). Las bases conceptuales del programa de etnomatemática. *Revista Latinoamericana de etnomatematica*, *7*(2), 100-107.

Kunturweb (2016). *Tk- Yupana. un simple emulador del ábaco inca.* Recuperado el 25 de agosto del 2016 de http://kunturweb.altervista.org

MINEDU (2013). Rutas del Aprendizaje: Fascículo general de matemática. Recuperado el 26 de marzo del 2103 de http://www2.minedu.gob.pe/minedu/03-bibliografia-para-ebr/19-fasciculo-general-matematica.pdf.

EL CÁLCULO ALGEBRAICO DE FERMAT: UNA OPCIÓN DIDÁCTICA

Edinson Matheus Camacho, Gabriel Yáñez Canal
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
ed.math.ca2@gmail.com, gyanez@uis.edu.co

Resumen

En esta investigación, se identifican y utilizan las ideas de Fermat como base del diseño de un curso introductorio de cálculo, rescatando el papel de la matemática como actividad humana relacionada con la necesidad de dar solución a problemas reales. Para ello, se plantea la revisión de la matemática de Fermat concerniente al concepto de derivada, seguido de las consideraciones didácticas necesarias, apoyadas en la Educación Matemática Realista como fundamento teórico para la enseñanza.

Palabras clave: epistemología, cálculo de Fermat, propuesta didáctica.

Abstract

In this research, Fermat's ideas are used as the basis of a calculus introductory- course design where the role of mathematics is seen as a human activity related to the need to solve real-world problems. So, we state the review of Fermat's mathematics with respect to the concept of derivative, followed by the necessary didactic considerations supported by Realistic Mathematical Education as the theoretical foundation for teaching.

Key words: epistemology, Fermat calculus, didactical proposal.

Introducción

La problemática abordada en la investigación nace de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada en los estudiantes que cursan los últimos años de bachillerato, que son los futuros estudiantes universitarios de ingeniería que tienen como parte de su currículo de formación inicial la asignatura de cálculo diferencial. El problema de la enseñanza y aprendizaje de la derivada se traduce en que los estudiantes no logran los conocimientos previos que se esperan de ellos al finalizar el bachillerato, por tanto, los malos rendimientos académicos en el primer curso de cálculo en las universidades no se hacen esperar. Parte del problema es que los estudiantes no le dan significado a los procedimientos algebraicos que utilizan para dar solución a los problemas en los que se emplea la derivada, es por ello que el uso algorítmico de la derivada ha generado dificultades en su comprensión y en su cálculo (Hitt, 2009; Ubuz, 2001). Muchas veces se menciona que la no comprensión de la derivada se debe a que los estudiantes no comprenden el concepto de función, de límite y otros elementos considerados "previos" a la derivada.

En vista de lo identificado en la literatura como dificultades, nos planteamos la pregunta: ¿Cómo se resolvían los problemas que implican derivar cuando no existían esos conceptos previos? Para responder, conviene revisar los orígenes de la derivada, ya que la historia del cálculo muestra los problemas, soluciones, ideas y estrategias que usaron los matemáticos. Para el trabajo nos centramos en las ideas de Fermat, ya que Fermat es uno de los pioneros de la algebrización del cálculo, resolvió problemas sin usar límites, ni otros conceptos que se asumen necesarios para dar respuesta a los problemas.

La investigación planteada busca establecer la relación entre el aporte de Fermat al cálculo diferencial como elemento didáctico en la enseñanza y el impacto en el aprendizaje del concepto de derivada en los estudiantes. La historia matemática como recurso didáctico y las investigaciones en torno a la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes dan sustento al planteamiento del problema. En cuanto a su diseño e implementación, la investigación tendrá como propósito reconstruir las ideas relevantes de las soluciones de Fermat a los problemas de máximos y mínimos y rectas tangentes a curvas en un punto, que involucraron momentos importantes en el desarrollo del cálculo, pero en una versión apropiada para el aula, esto es, utilizando elementos modernos como ejes cartesianos, notaciones, procedimientos algebraicos e incluso, recursos computacionales.

Cabe señalar, que el presente trabajo pretende verificar lo mencionado, abordando exclusivamente el problema de la enseñanza aprendizaje de la derivada, que resume Artigue (1995) afirmando que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento. Es por lo anterior, que la propuesta relacionará las ventajas que ofrece la historia sin obviar los avances y resultados que han obtenido los investigadores en el problema.

Elementos teorico metodológicos

La investigación es de corte fenomenológico, ya que “el objetivo de una investigación fenomenológica es encontrar situaciones problemáticas a partir de las cuales se puedan generalizar enfoques específicos, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical” (Graveimejer y Terwuel, 2000, p.12).

En un estudio fenomenológico se tiene como premisa que a lo largo de la historia se han abstraído, organizado y estructurado grandes familias de fenómenos que dan lugar a los conceptos, en el caso de nuestra investigación el concepto es la derivada.

Para el diseño de las situaciones, se tomará el marco metodológico que propone la Educación Matemática Realista, que precisa realizar un análisis fenomenológico de la derivada, en este caso, utilizando la revisión histórica del concepto, relacionando los aspectos identificados en la fase 1 con los contextos, situaciones y fenómenos.

El análisis fenomenológico resultante, tendrá como particularidad, que el aporte de Fermat será la principal fuente de estudio para el posterior diseño de las actividades, implicará además que el docente-investigador debe estudiar la historia para hacer una correcta reinvención guiada y conducir de alguna manera a los

estudiantes a reinventar modelos, que evolucionen hacia las estrategias usadas por Fermat, reduciendo el conjunto de contextos y situaciones.

En la investigación se estipulan seis fases de investigación. Las cuatro primeras, corresponden a un proceso de didactización, en particular, la segunda fase corresponde al análisis fenomenológico que propone Freudenthal para la elaboración de las actividades. La quinta y sexta corresponden al proceso de matematización de la derivada.

Se muestra a continuación un problema abordado por Fermat y una aclaración sobre las interpretaciones de otros autores como muestra del trabajo que se realizó en la Fase 1.

El problema del segmento

Este problema consiste en dividir un segmento de magnitud *B* en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de las dos partes sea máximo. La solución del problema realizada por Fermat entre 1629 y 1636 presenta un algoritmo, bautizado como el *Methodus* (*Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum*) (TH.OF.1.133, TH.OF.III.121) aplicado al problema del segmento.

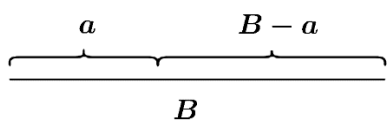


Tabla 1. *Aplicación del Methodus*

a	Es la incógnita.
$a(B - a)$	Es la cantidad a maximizar.
$aB - a^2$	La cantidad a maximizar desarrollada en potencias de *a*.
$(a + e)[B - (a + e)]$	Sustituyendo *a* por *a* + *e*.
$\mathrm{aB} + Be - 2ae - a2 - e^2$	Desarrollo en potencias de *a y e*.
$aB + be - 2ae - a^2 - e^2 \sim aB - a^2$	Planteamiento de la *adigualdad* (~).
$Be - 2ae - e^2 \sim 0$	Eliminando los términos comunes en la *adigualdad*.
$B - 2a - e \sim 0$	Dividiendo todos los términos por *e* o potencias mayores si es necesario.
$B - 2a \sim 0$	Se suprimen los términos que aún contengan *e*.
$B - 2a = 0$	Las cantidades restantes se hacen iguales.
$a = \frac{B}{2}$	Se da respuesta al problema. Se halla la incógnita para que la cantidad sea máxima.

La segunda columna muestra el *Methodus*, para solucionar el problema se establece la incógnita y la cantidad a maximizar, luego se plantea una *adigualdad*, se dividen los términos que contienen *e,* se suprimen los términos que aún contengan *e* para finalmente convertir la *adigualdad* en igualdad y dar respuesta al problema.

Como era costumbre en Fermat, no mostró inicialmente detalles del fundamento del *methodus*. Es por esto último, que es común encontrar interpretaciones anacrónicas que asumen que Fermat estaba proponiendo los fundamentos mismos del análisis infinitesimal que luego fueron desarrollados por Barrow, Newton y Leibniz, entre otros.

Repasando el *Methodus* y usando notación moderna, se tendría lo que se ve en el siguiente cuadro, que es como algunos historiadores de la matemática han pretendido interpretarlo (Eves, 1969; Edwards, 1979; Boyer, 1949, Collette, 1985)

Tabla 2. *Interpretación del Methodus*

a	Es la variable.
$f(a)$	Es la función que modela el problema.
$f(a+e) \sim f(a)$	Se establece la *adigualdad*.
$f(a+e) - f(a) \sim 0$	Se *adiguala* a cero.
$\frac{f(a+e) - f(a)}{e} \sim 0$	Se divide por e.
$\left(\frac{f(a+e) - f(a)}{e}\right)_{e=0} \sim 0$	Se eliminan los términos que todavía contienen e, o bien se haría $e = 0, p$ara obtener la siguiente expresión.
$\left(\frac{f(a+e) - f(a)}{e}\right)_{e=0} = 0$	Se resuelve la ecuación, transformando la *adigualdad* en igualdad.
$\lim_{e\to 0} \frac{f(a+e) - f(a)}{e} = 0$	Finalmente, si se induce desde la mirada de hoy, la expresión anterior equivale a tomar el límite cuando $e \to 0$. Por lo que es prácticamente hallar la derivada e igualar a cero como en el cuadro 1.

Sin embargo, estas equivalencias no son más que coincidencias felices en el sentido de que no reflejan para nada el pensamiento de Fermat, basados en las investigaciones de (González Urbaneja, 2008) plasmadas en su libro: *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial* vamos a aclarar la idea original.

¿Cuál es el origen del Methodus?

En la antigua Grecia un grupo de problemas que tenían "condiciones límites" se conocían como *Diorismos*, el razonamiento realizado por Pappus en la proposición 61 del libro VII indicaba que este tipo de problemas en el caso de los "extremos" eran *únicos* y *singulares.* Los *Diorismos* pueden entenderse como condiciones que se agregan al problema para resolverlo en términos generales (González Urbaneja, 2008). Los problemas de máximos y mínimos estarían en esa categoría.

Fermat aplica el método de la *Syncrisis* de Viete en los *Diorismos*, en este caso, para los valores extremos. El método de Viete, consiste en igualar ecuaciones semejantes para obtener expresiones de los coeficientes de una ecuación en términos de sus raíces. Se podría afirmar que el *Methodus original* aplicado al problema del segmento se vería de la siguiente manera:

Se pretende buscar el valor de Z donde el producto de $a(b-a)$ es máximo.

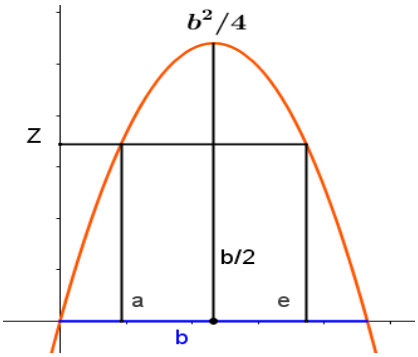


Figura 8. Z menor que el valor máximo

En la gráfica anterior Z es un valor menor que $b^2/4$ (Valor máximo conocido), Fermat observa que para ese valor Z existen a y e tal que
$a(b-a) = e(b-e) = Z$

$$ab - a^2 = eb - e^2$$

Al trasladar al mismo lado los términos cuadráticos y luego factorizar $(a-e)$, y dado que a y e son valores distintos, se tiene:

$$ab - eb = a^2 - e^2$$

$$\frac{b(a-e)}{(a-e)} = \frac{(a-e)(a+e)}{(a-e)} \quad (*)$$

$$b = a + e$$

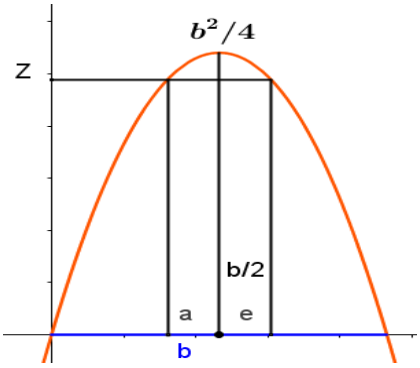


Figura 9. Z próximo al valor máximo

Fermat observa que si se toma un valor de Z cada vez más grande, la diferencia de a y e se hace menor. Cuando $Z = b^2/4$, $a - e = 0$, por lo que

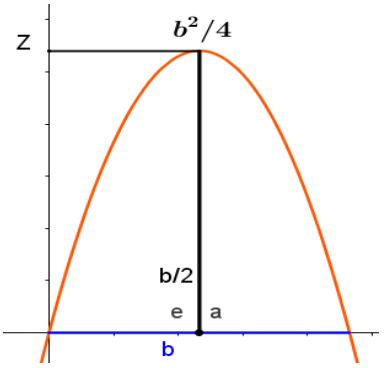


Figura 10. Z igual al valor máximo

$$b = 2a$$

y el valor de la incógnita a para la cantidad que se quería maximizar es

$$a = \frac{b}{2}$$

Salta a la vista la diferencia con el *methodus* publicado. Como diferencia notoria, se encuentra que no se plantea la adigualdad, y tampoco se divide por el valor e. Además, queda claro que la idea original no es precursora de la idea de límite que conocemos actualmente.

Reflexión final

La investigación está en desarrollo, se encuentra en la fase 3 que corresponde al diseño de las actividades. El análisis de la matemática de Fermat nos ha permitido abordar cuestionamientos como: ¿Cuál es el

origen del método usado por Fermat para resolver problemas de máximos y mínimos?, En verdad, ¿qué tan cerca estuvo Fermat de la noción de derivada? A su vez, hemos adoptado algunas posturas de cara al uso didáctico que se le va a dar al aporte de Fermat al cálculo, por ejemplo: El trabajo con funciones polinómicas, la definición de la derivada de Fermat, el diseño enfocado en problemas de optimización inicialmente hasta razones de cambio junto con un manual docente.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano

Boyer, C. (1949). *The History of Calculus and its Conceptual Development (the Concepts of the Calculus)*. New York: Dover.

Collette, J. (1985). *Historia de las matemáticas* (Vol. II). Madrid: Siglo XXI.

Edwards, C. H. (1979). *"The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer- Verlag.

Eves, H. (1969). *An introduction to the History of Mathematics.* New York: Rinehart and Winston.

Fermat, P. (1891-1912). *Oeuvres de Fermat.* París.

González Urbaneja, P. M. (2008). Fermat y los orígenes del cálculo diferencial (Primera ed.). España: NIVOLA libros y ediciones, S. L.

Graveimejer, K. & Terwuel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. J. Curriculum Studies, 32(6), 777- 796

Hitt, F. (2009). Dificultades En El Aprendizaje Matemático pp. 1–10. Recuperado de https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_cálculo?auto=download

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' understanding of tangency, numerical calculation of gradients and the approximate value of a function at a point through computers. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 20 (1), 111-135

TRANSFORMACIÓN METODOLÓGICA EN LO RELATIVO A LA ARITMÉTICA ESCOLAR EN PRIMER AÑO DE ENSEÑANZA BÁSICA

Marta Cecilia Salazar Aburto, Rafael Bracho López, Natividad Adamuz Povedano
Universidad Central de Chile. (Chile), Universidad de Córdoba. (España)
martacecilias@gmail.com, rbracho@gmail.com, natiadamuz@gmail.com

Resumen

En el presente trabajo, se presentan los elementos característicos de la metodología desarrollada en una experiencia llevada a cabo en un colegio de una comuna de Santiago de Chile, en un primer año de Enseñanza Básica, con 43 niños y niñas. Dicha experiencia se ha centrado en el aprendizaje del sistema de numeración decimal, aplicando una metodología innovadora con el uso de materiales manipulativos concretos, diseñados para favorecer el desarrollo del sentido numérico en el alumnado. La metodología empleada es cuali-cuantitativa.

Palabras clave: pensamiento numérico, materiales manipulativos, educación primaria

Abstract

In this paper, we show the main features of a methodology developed in an experience carried out with 43 first-year students of basic education at a school from a commune of Santiago de Chile. This study has focused on the decimal-number system learning. We implemented a qualitative and quantitative, innovative methodology based on the use of specific easy-handle materials, designed to encourage the development of students' numerical sense.

Key words: Numeric thinking, manipulative materials, elementary education

Planteamiento del problema

La enseñanza de la matemática en los tiempos actuales está siendo cuestionada por investigadores de educación matemática y profesores, que ven que sus métodos de enseñanza no están siendo motivadores para sus estudiantes, por lo que se requiere de una metodología diferente que dé respuesta a las necesidades de los tiempos actuales, y motive hacia la curiosidad y el interés por la matemática. El aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar proporciona una gran potencia cognitiva, favoreciendo el desarrollo intelectual de los estudiantes a través del logro de capacidades, destrezas y habilidades matemáticas específicas, que promueve el crecimiento educativo de los seres humanos (Rico y Lupiáñez, 2008).

Por otro lado, el Desarrollo del Sentido numérico, de aquí en adelante denominado como DSN, constituye, en los primeros años de aprendizaje, un pilar fundamental para el conocimiento matemático. Es por ello que la comprensión profunda del Sistema de Numeración Decimal y de sus propiedades, orientándolo

hacia el desarrollo de la competencia matemática en general y hacia la resolución de problemas como eje vertebrador del aprendizaje matemático en particular, resultan trascendentales.

De acuerdo a las diferentes investigaciones realizadas, es necesario producir cambios metodológicos que contribuyan a la comprensión del Sentido Numérico, esto partiría con la erradicación de la enseñanza de los algoritmos tradicionales, los que si bien tuvieron su razón de ser durante una época, desde hace décadas existe unanimidad en el seno de la comunidad científica acerca del poco sentido pedagógico que tiene seguir enseñando las viejas cuentas de lápiz y papel hoy en día. Sin embargo, en la práctica la totalidad de las escuelas, incluso en las que presumen de ser innovadoras, se sigue enseñando a sumar, restar, multiplicar y dividir como se ha venido haciendo en las últimas generaciones.

A partir de esta mirada surge este proyecto de innovación metodológica, para dar paso a la comprensión profunda del sistema de numeración, dejando de lado los algoritmos tradicionales que son parte de la enseñanza tradicional y obstaculiza poder alcanzar una competencia matemática en los niños y niñas en la primera etapa de la edad escolar. Dicha experiencia se ha centrado en el aprendizaje del sistema de numeración decimal, aplicando una metodología innovadora con el uso de materiales manipulativos concretos, diseñados para favorecer el desarrollo del sentido numérico en el alumnado. En esta investigación el Objetivo General planteado es el siguiente:

Analizar la competencia matemática en general y de manera más específica el Desarrollo del Sentido Numérico tras la utilización de la metodología basada en el uso sistemático de materiales didácticos manipulativos para el aprendizaje del Sistema de Numeración Decimal en alumnado de Primer Curso de Enseñanza Básica.

Marco teórico

El DSN implica dominar una amplia gama de habilidades que son el resultado de una comprensión profunda de los números. Para adquirir un buen sentido numérico es necesario alcanzar destrezas relacionadas con el cálculo mental, estimación del tamaño relativo de los números y del resultado de operaciones con los mismos, reconocimiento de las relaciones parte-todo, conceptos de valor posicional y resolución de problemas, lo que constituye las bases fundamentales para el conocimiento matemático en los primeros años de escolaridad (Greeno, 1991). De esta forma, para que niños y niñas de estas edades (5 a 8 años) puedan comprender el significado del DSN es fundamental la presencia de recursos que puedan observar, manipular, verbalizar. Para ello, la experiencia física desempeña en los primeros años un papel crucial en el desarrollo global y especialmente en el desarrollo lógico-matemático, entendido este como una construcción personal, activa y reflexiva a partir de las relaciones que el niño establece con los objetos y situaciones que le proporciona su entorno (Bracho-López, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul y García-Pérez, 2011). Esta realidad nos debe llevar en la escuela a una importante implicación metodológica, es fundamental que acompañemos la información verbal y gráfica que proporcionamos a nuestro alumnado con soportes materiales concretos que ellos puedan ver, manipular y sobre los que puedan iniciar y desplegar procesos de razonamiento (BOJA, 2007). A modo de ejemplo, trabajar con materiales didácticos manipulativos ayuda al alumnado en la adquisición de capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, comprender la estructura del sistema de numeración decimal y utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos mentales y razonados (NCTM, 2003).

Estas experiencias relacionadas con los objetos concretos se desarrollan mediante el uso de materiales didácticos manipulativos diseñados para favorecer la adquisición de determinados conceptos que, en especial en los primeros años de aprendizaje, deben tener una presencia fundamental, dado su carácter instrumental en los procesos de contextualización de conceptos y técnicas, y debido a la necesidad que tienen los niños y niñas de contar con referentes.

Metodología

La metodología empleada en la investigación se centra en situaciones concretas, particularizando los resultados y ofreciendo una perspectiva contextualizada a través de técnicas descriptivas e inductivas, teniendo en cuenta las limitaciones, puede permitir acercarse a la realidad. Desde un enfoque empírico analítico se trata de una investigación cuantitativa ya que se realizará un estudio descriptivo e inferencial con un diseño transversal.

Se ha establecido un grupo de control y un grupo experimental. En el grupo de control se aplicó la metodología tradicional para la introducción de las cuatro operaciones básicas y en el grupo experimental se aplicó la metodología basada en la metodología innovadora con materiales manipulativos.

Para análisis e interpretación de los datos se aplicó un test de competencia matemática básica TEMA-3, que consta de 72 items, de los autores (Ginburg y Baroody, 2003). El test fue aplicado al grupo de control y al grupo experimental, en dos instancias, la primera a comienzos del año escolar, a fines de marzo, y un post test finalizando el año escolar, primera semana de diciembre. Se tomaron los test siguiendo las recomendaciones sugeridas por los autores, es decir, se tomó de manera individual, en un lugar específico facilitado por cada colegio, que reuniera los requisitos de ser un espacio con silencio, sin factores distractores, respetando el propio ritmo de cada alumno, fue tomado por cinco evaluadores, que fueron capacitados específicamente para ello.

Los materiales que se han usado forman parte de la propuesta metodológica elaborada por M Teresa García (García-Pérez & Adamuz-Povedano, 2016; García-Pérez, Adamuz-Povedano, Bracho-López, Jiménez-Fanjul, & Maz-Machado, 2013; García-Pérez, Bracho-López, Jiménez-Fanjul, & Adamuz-Povedano, 2014), entre ellos están: la Cinta Numérica que es un recurso para la visualización de los números como conjunto ordenado, continuo y ampliable, es la primera asociación número-espacio que resulta muy rentable, además, el Panel Numérico que permite visualizar "familias" de números para analizarlas y compararlas, se hacen más evidentes los patrones del sistema de numeración, se pueden señalar los números de una fila y ver que tienen en común, se puede hacer lo mismo con las columnas, se presenta en tamaño grande y tamaño individual, donde los estudiantes trabajan apoyados de fichas para ubicarlas de acuerdo a lo que van reflexionando según la actividad dada. Para complementar estos dos materiales, que ponen más de relieve el orden, se necesitan recursos que prevalezca el aspecto cardinal: franelógrafo, donde los estudiantes pueden ubicar conjuntos numéricos con variadas figuras (animales, flores, aves) y realizar relaciones biunívocas con tarjetas de números en símbolos y representaciones en tarjetas de puntos. El franelógrafo es de gran ayuda en esta etapa de aprendizaje ya que los estudiantes aun no poseen suficiente destreza gráfica. A través del franelógrafo podrá proceder con más seguridad y confianza debido que no tiene que escribir los números, además mejora su capacidad de interpretación verbal de situaciones en clave numérica y aprendiendo a traducir esas situaciones a la operación correspondiente. La caja

numérica es un recurso que facilita la exploración y la manipulación de los números, beneficiando la comprensión del Sistema de Numeración Decimal. Consta de tres apartados cada uno representa la unidad-decena-centena, en su orden respectivo, con la ayuda de palitos y elásticos. Con ella el estudiante puede construir los nueve primeros números, después la decena y las cantidades hasta el noventa y nueve. El trabajo realizado con las decenas facilita de manera natural el camino hacia la construcción de la centena. Puede comprobar la estructura de este nuevo elemento: constituye una unidad dentro del sistema de numeración, 1 centena, que a su vez está formada por diez decenas, cada una de las cuales contiene diez unidades. La equivalencia entre los distintos órdenes es visible y constatable con este recurso.

Resultados

Los resultados obtenidos muestran que se ha conseguido una mejora en el Índice de Competencias Matemáticas del grupo experimental, aunque no son estadísticamente significativos. En el descriptor correspondiente a la clasificación por intervalo del Índice de Competencia Matemática (ICM) correspondiente al grupo de control y grupo experimental, podemos señalar que el mayor porcentaje de estudiantes, el 39,5% (17), del grupo de control se encuentra por debajo de la media al igual que en el grupo experimental, con un 28,6%(10), lo que indica que estos alumnos presenten dificultades en el desarrollo de su pensamiento matemático. Solo 4 alumnos del grupo experimental se encuentran en niveles superiores a la media mientras que en el grupo control tenemos a 2 alumnos. En el análisis cualitativo, se observa a través de las entrevistas y observación no participante, una diferencia en la motivación y la visión de la matemática que es muy significativa, el grupo experimental presenta una gran motivación por las clases de matemáticas, sintiéndose, motivados por todas y cada una de las actividades, proyectándose como profesionales en el área de las matemáticas, poseen un lenguaje matemático para argumentar los resultados en resolución de problemas, características que no se observan en el grupo de control.

Conclusiones

Bajo el análisis estadístico no se aprecia que existan diferencias significativas entre el grupo de control y el grupo experimental, lo que se puede atribuir a factores como, el poco tiempo que existió entre el pretest y postest. Además, se debe considerar que los estudiantes no tuvieron esta metodología en la etapa pre-escolar (Kinder, Infantil), que les permitiera adquirir las competencias matemáticas. Otro factor importante, es el periodo de adaptación que debió realizar la docente, cambiar su metodología, que implicó cambiar su práctica pedagógica con los estudiantes en la clase de matemáticas, debía dejar que fueran autónomos en sus decisiones, a diferencia de lo habitual señalar cada paso a seguir. Sus prejuicios culturales relacionados con el género, raza y alumnos con necesidades educativas especiales, debía dejar de lado y visualizar que todos tenían las mismas capacidades de aprender matemáticas. Esto pudo ser un factor que influyera en los resultados estadísticos. Sin embrago, al realizar el estudio cualitativo podemos señalar que se observa una diferencia notoria en la motivación por el gusto y la comprensión por la matemática, diferencia que se reflejó no solo en los estudiantes que participaron sino que en el colegio del grupo de experimental, causo un impacto dentro de la comunidad adoptando dicha metodología para todo los cursos y, realizando una sala de didáctica de matemática implementada con materiales manipulativos.

Referencias bibliográficas

Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N. y García-Pérez, T. (2011). Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 28, 41–60.

BOJA (2007). *Orden de 10 de agosto de 2007 por la que se desarrolla el currículo de la Educación Primaria en Andalucía,* Núm. 171, pp 4-23. Sevilla. Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Castro, E. y Segovia, I. (2015). *Sentido Numérico*. España. Ed. Pirámide

García-Pérez, T., & Adamuz-Povedano, N. (2016). Conocemos los números. Una experiencia basada en la manipulación. *Epsilon-Revista de Educación Matemática*, *33*(1), 73–88.

García-Pérez, T., Adamuz-Povedano, N., Bracho-López, R., Jiménez-Fanjul, N., & Maz-Machado, A. (2013). *Materiales didácticos para desarrollar el sentido numérico*. Taller Presentado En XVI Jornadas Sobre Enseñanza Y Aprendizaje de Las Matemáticas. Mallorca.

García-Pérez, T., Bracho-López, R., Jiménez-Fanjul, N., & Adamuz-Povedano, N. (2014). *Tocando las mates. Uso de materiales manipulativos en primer ciclo de educación primaria*. XV Congreso Sobre Enseñanza Y Aprendizaje de Las Matemáticas. Baeza.

Ginsburg, H., & Baroody, A. J. (2007). *Tema-3: test de competencia matemática básica* (M. C. Núñez del Río & I. Lozano)

Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated Knowing in a conceptual domain. USA. *Journal for research in mathematics education, 22*(13).

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Rico, L., Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ed. Aljibe.

ANÁLISIS EXPLORATORIO SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS MATRICES Y FORMAS CUADRÁTICAS, Y SU RELEVANCIA EN EL ESTUDIO DE SECCIONES CÓNICAS PARA ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA MEDIA

Camilo Higuera, Hernaldo Millar, Guisell Sepúlveda
Universidad Central de Chile. (Chile)
calejandrohiguera@gmail.com, h.millar01@gmail.com, guisell.s.g@gmail.com

Resumen

La presente investigación se basa en una Ingeniería Didáctica como método de investigación, diseñando una secuencia didáctica que permita generar una propuesta de inclusión de contenidos de nivel superior y analizar los aprendizajes logrados a partir de la aplicación de una secuencia didáctica para la enseñanza de las matrices y formas cuadráticas a estudiantes de la asignatura Álgebra y Modelos Analíticos. Es posible considerar que dicha asignatura no responde a la profundización de contenidos especificados en el Decreto 220 de Educación, ya que el Ministerio de Educación de Chile no ha re-evaluado y realizado ajustes al programa que sigue este curso, evidenciando que los enfoques no se encuentran contextualizados ni ahondan en la búsqueda de las competencias necesarias para una sociedad del conocimiento del siglo XXI. Este estudio, se realizó en base a la metodología investigación-acción, la que pretende, realizar una práctica reflexiva social en la que interactúan la teoría y la práctica en miras de establecer cambios en una situación estudiada.

Palabras clave: cónicas, curriculum, formas cuadráticas, ingeniería didáctica, matrices, secuencia didáctica.

Abstract

The current research work is based on a Didactic Engineering as the method of investigation. It involves the design of a didactic sequence that allows us to include higher level contents and to analyze the students' acquisition of knowledge from the application of a didactic sequence for the teaching of matrix and quadratic forms in the subjects Algebra and Analytical Models. It is possible to regard that such subject does not correspond to the deepening of contents specified in 220 Education Decree, since the Education Ministry of Chile has not re-evaluated and readjusted the course program, what shows that the approaches are not contextualized nor go deeply in the needed skills for the XXI century knowledge society. This study has been based on the research-action methodology which aims to carry out a social reflexive practice in which theory and practice interact in order to establish changes in a studied situation.

Key words: conics, curriculum, quadratic forms, didactic engineering, matrix, didactic sequence.

Planteamiento del problema

La asignatura de Álgebra y Modelos Analíticos ha quedado como un programa de estudio que merece una revisión, no tan solo porque los contenidos de enseñanza media han cambiado radicalmente en los últimos ocho años, sino para los programas de estudio, sin embargo, luego de realizar un análisis al plan diferenciado de III° Medio es posible notar que no cumple con implementaciones didácticas.

Lo que se denota como orientaciones didácticas dentro del programa de estudio referente a la asignatura de Álgebra y Modelos Analíticos, es más bien una descripción de algunas de las características del lenguaje algebraico y cómo se construye a partir de las propiedades correspondientes, también menciona que dentro de los objetivos del plan diferenciado se encuentra el entregar herramientas a los estudiantes para que estos sean capaces de profundizar en los contenidos estudiados durante I° y II° Medio. Así mismo lo menciona el MINEDUC:

> ...Es importante que los alumnos y alumnas logren percibir el álgebra como una herramienta que generaliza y, en consecuencia, está directamente relacionada con las demostraciones; se sugiere invitar constantemente a los estudiantes a la reflexión y a diferenciar los casos particulares del general. (2001, p.10)

Es posible observar que el programa de estudio carece de propuestas didácticas, si bien sugiere a los docentes invitar a sus estudiantes a realizar reflexiones, no es posible evidenciar situaciones didácticas que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

Al analizar las actividades que se proponen en el programa de estudio solo se puede observar que se entregan indicaciones al docente, no supone posibles errores, ni se evidencia el interés en cómo los estudiantes son capaces de reflexionar o encontrar respuestas a ciertos conflictos matemáticos.

Además es importante rescatar lo señalado por el CINDA en la introducción del libro “El proceso de transición entre Educación Media y Superior”.

Se debe considerar la necesidad de establecer instancias bipartitas de coordinación, en las cuales estén presentes los dos niveles educacionales: medio y superior, y que ayuden a perfeccionar el nivel de la enseñanza media y a tomar sus condiciones reales de funcionamiento como un elemento fundamental para el diseño de las asignaturas iniciales de la formación de profesionales. (2011, p. 20)

En base a lo anterior y tomando en cuenta el programa de estudio del plan diferenciado de matemática para estudiantes que cursan IIIº Medio, resulta interesante realizar un análisis exploratorio del cual es posible generar conexiones con contenidos de la asignatura Álgebra Lineal de educación superior, específicamente el tema de formas cuadráticas. Es aquí donde se desprende la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aprendizajes logran, a partir de la implementación de una secuencia didáctica, estudiantes que cursen la asignatura Álgebra y Modelos Analíticos con los contenidos de matrices y formas cuadráticas?

Estructura teórica del reporte

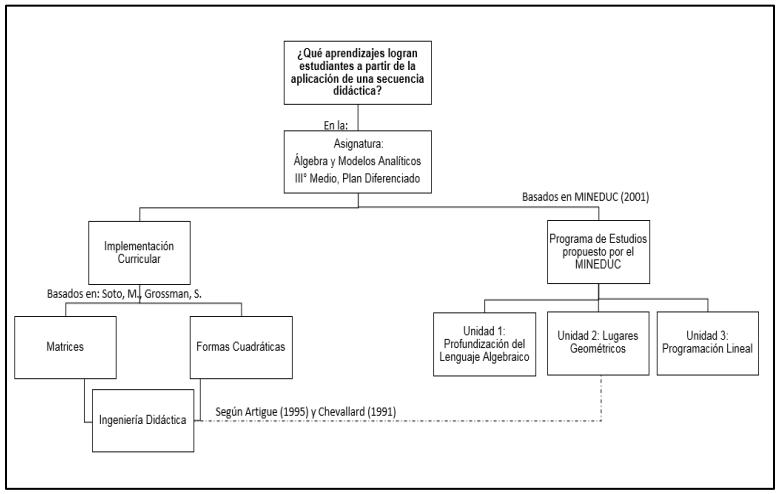


Figura 1. Mapa conceptual Estructura Teórica

En síntesis, esta investigación se basará en la implementación de una secuencia didáctica de acuerdo con la teoría de Brousseau, se ha seleccionado esta metodología por el hecho que permite realizar secuencias didácticas las cuales permiten ordenar secuencialmente un contenido determinado. Cuyo objetivo es obtener mejoras a partir del contraste entre el análisis a priori y a posteriori, esto en directo beneficio para los estudiantes, de tal manera que les resulte fácil la interiorización de los nuevos conceptos. Según el programa de estudio del MINEDUC, con respecto al curso de Álgebra y Modelos Analíticos se orienta la profundización de contenidos matemáticos como complementos de lo propuesto en los programas de estudio en la asignatura de matemática en la formación general. Las unidades que se plantean tienen como principal objetivo el desarrollo de las habilidades de modelación y análisis geoanalíticos en el plano cartesiano.

La propuesta de la secuencia didáctica contempla la inclusión de los contenidos de matrices y formas cuadráticas, como nuevos temas dentro de la unidad del plan diferenciado Lugares Geométricos, esto debido a la conexión realizada entre las secciones cónicas y las formas cuadráticas, desde una visión de la geometría analítica. La nueva propuesta curricular entregada por el MINEDUC apunta a formar estudiantes integrales, con el fin de desarrollar todas las habilidades posibles para su futuro específicamente, dentro de los desafíos emanados por el diagnóstico elaborado para la propuesta curricular, se encuentra un elemento muy importante para la formación de los estudiantes que cursan la educación científico-humanista, donde se señala que es necesario redefinirla, creando espacios de reflexión, con el fin de contestar a las inquietudes educativas de la realidad en Chile (MINEDUC, 2017). En virtud de lo expuesto por el MINEDUC, es posible establecer que desde el punto de vista de Artigue, la ingeniería didáctica permite al docente generar una secuencia de clases, organizadas y articuladas, que permitan construir un proyecto de aprendizaje que transcurra el tiempo.

Metodología implementada.

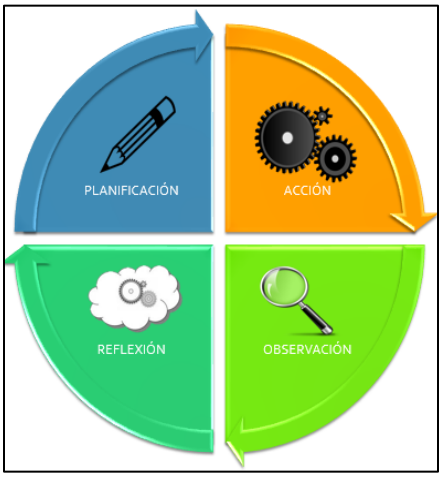


Figura 2. Diseño Investigación-Acción

En este punto es preciso tener en claro que el propósito de la investigación es realizar un análisis exploratorio sobre el aprendizaje de las matrices y formas cuadráticas, junto con ello la relevancia del estudio de las secciones cónicas para estudiantes de enseñanza media. Por lo anteriormente mencionado, se opta por la utilización del método de Investigación-Acción. Este método fue introducido el año 1944 por Kurt Lewis como un programa de acción social. Dentro de las características de este diseño se puede entender que su finalidad es intentar explicar "lo que sucede" esto significa desarrollar un esquema que contextualice la situación de los actores y su entorno. En resumen, a lo que se denominó "explicación" es más bien efectuar una comprensión de la realidad, evitando algún tipo de comparación o asimilar la realidad en base a algún estereotipo. (Rodríguez, Herraiz, Prieto, Martínez, Picazo, Castro y Bernal, 2011).

El método de investigación-acción está ligado al paradigma socio crítico quien busca una relación entre lo práctico y lo teórico, transformando la estructura de vínculos sociales para buscar respuestas a dilemas específicos dados por lo anterior. Además, se caracteriza por ser un paradigma que utiliza la autorreflexión, donde los miembros son participantes activos buscando la independización de estos. (Martínez, 2011)

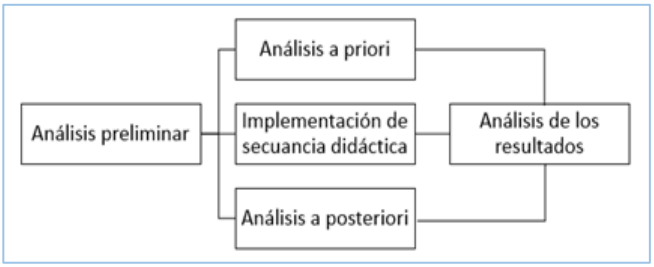


Figura 3. Fases Ingeniería Didáctica

Para lograr el desarrollo de esta investigación se opta por la utilización de herramientas propias de la Ingeniería Didáctica (Artigue, Douady, Moreno, y Moreno. 1995) lo que se describe a continuación en la Figura 3.

Dada la factibilidad de los centros educativos para desarrollar la práctica profesional, se escoge mediante un muestreo del tipo intencional o de conveniencia el curso III° Medio del Liceo Bicentenario Provincial Santa Teresa de Los Andes de la comuna de Colina, Santiago de Chile para realizar un análisis exploratorio sobre la implementación de metodologías de enseñanza de nivel superior a estos alumnos sobre el tema de matrices y formas cuadráticas respectivamente.

Algunas características de este establecimiento son: de dependencia municipal, se encuentra en un grupo socioeconómico de nivel medio, donde la mayoría de los apoderados han declarado tener entre 12 y 13 años de escolaridad y un ingreso del hogar que varía entre $450.001 y $700.000, entre 31,01% y 50% de los estudiantes se encuentran en condición de vulnerabilidad social. (Recuperado de www.simce.cl). Para efecto del análisis, se escoge el curso III° Año Educación Secundaria (Álgebra y Modelos Analíticos), el cual es dividido en dos grupos, compuestos por 41 y 25 estudiantes. Considerando una muestra total de 66 estudiantes, donde la muestra es intencionada, de modo de establecer un muestreo intencional o de conveniencia. En base a lo anteriormente mencionado, es que los cursos III° Medios son una variable no controlable, ya que estos están compuestos por el azar natural al igual que los alumnos que componen los cursos de Álgebra y Modelos Analíticos.

Finalmente es importante establecer la calidad de la investigación, para eso se presentan en la Figura 4, las estrategias y realizaciones para lograr los criterios de rigor de la investigación. Este esquema se basa en un diseño planteado por Suárez, en su investigación "El saber pedagógico de los profesores de la Universidad de Los Andes Táchira y sus implicaciones en la enseñanza".

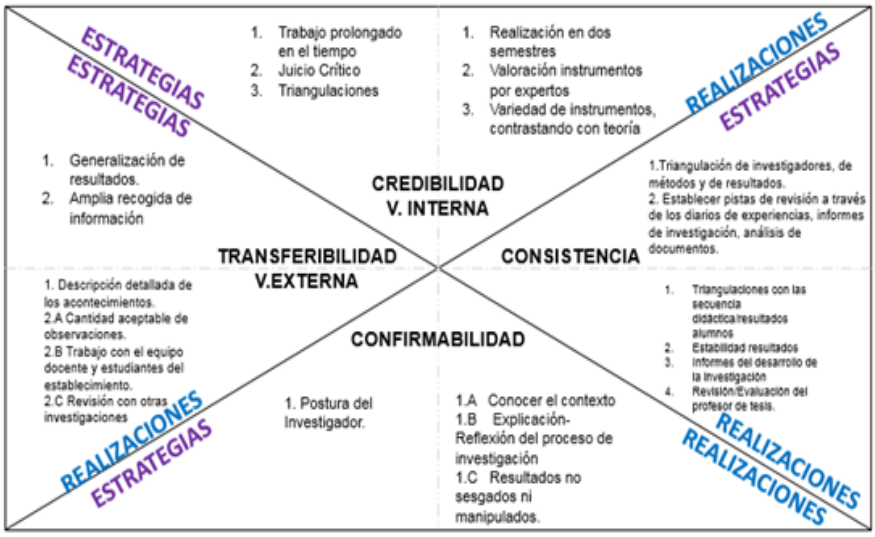


Figura 4. Síntesis criterios de rigor científico

Análisis de algunos problemas.

Para esta investigación, hemos tomado 3 ejemplos como relevantes y que resultán interesantes de profundizar. El problema N° 1, cuyo objetivo era "Determinar y reconocer problemas que implican la adición o sustracción de matrices, considerando que la matriz debe ser del mismo orden para poder sumar o restar términos correspondientes." Al codificar las respuestas se evidenció que los estudiantes en su totalidad comprendieron el problema como una adición de matrices, se entiende que para efectuar el proceso de adición de matrices deben cumplir con la condición de que sean de igual orden. De acuerdo a las respuestas entregadas se destaca lo que indica Pérez (2008):

> Dadas dos matrices del mismo orden, A y B, se define su suma como otra matriz, C, del mismo orden que las matrices sumando cuyos elementos se obtienen sumando a cada elemento de la primera matriz, A, el correspondiente elemento de la segunda matriz sumando, B. (p.8)

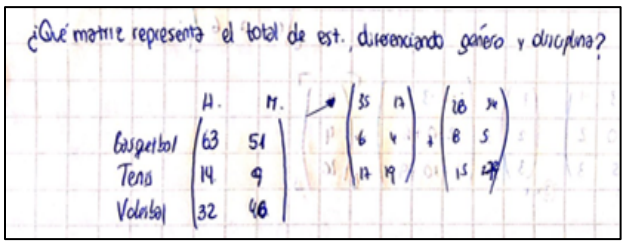


Figura 5. Representación Estudiantes P1

Otro ejemplo fue el problema relacionado con la multiplicación de matrices donde los estudiantes en su mayoría contestaron respondiendo a lo establecido, teniendo presente las condiciones para efectuar la multiplicación. Nuevamente se presenta la dificultad de argumentación frente a la respuesta de los gastos efectuados por las sucursales. Sardá habla de la argumentación como Actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta al receptor y la finalidad con la cual se emiten.

En la Figura 6 se presenta un caso donde un grupo de estudiantes no lograron efectuar la matriz de gasto de forma correcta debido a que no consideró lo que señala Soto (2013) quien indica:

> La matriz producto, se obtiene multiplicando elementos de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y finalmente se suma. Además, para multiplicar matrices el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

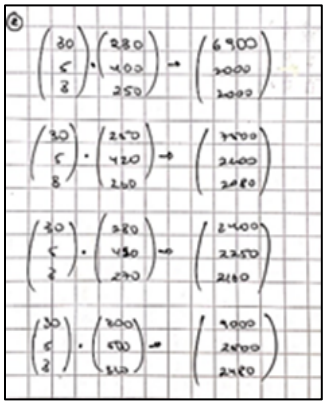


Figura 6. Representación Estudiantes P2

Finalmente el problema relacionado con la rotación de cónicas el 94% de los estudiantes lograron:

- Determinar de forma matricial la sección cónica en rotación.
- Calcular los autovalores y autovectores, y si son ortogonales-ortonormales.
- Reconstruir la ecuación matricial para determinar la cónica en su ecuación principal.
- Identificar y graficar la sección cónica.

Para lograr estos propósitos se recurrió a relaciones con la asignatura de Física del establecimiento, ya que, deben conocer los vectores ortogonales y ortonormales para la resolución de problemas de fuerza y movimiento, tal como muestra la Figura 7.

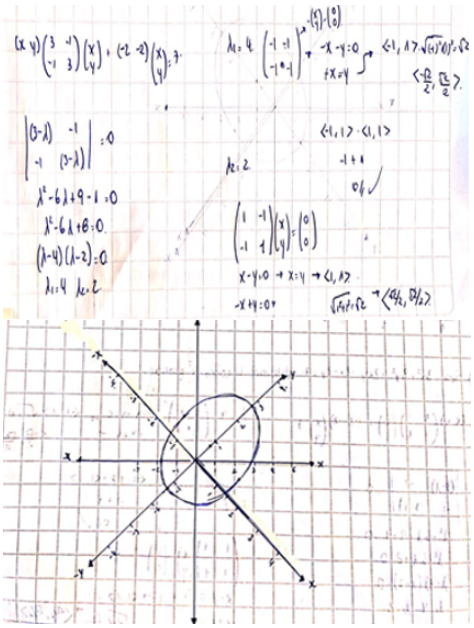


Figura 7. Representación Estudiantes P2

Análisis de los resultados

Para llevar a cabo esta investigación se han establecido como instrumentos para le recogida de la información un test que corresponde al inventario de conocimiento de los estudiantes denominado Test KPSI, luego tenemos la Secuencia Didáctica y finalmente un conjunto de reactivos (evaluación).

En lo que respecta al Test KPSI como Test de autopercepción de los conocimientos que tienen los estudiantes permitieron en esta investigación que el diseño de instrumentos y secuencia didáctica fuera el correcto. Tras la aplicación de la secuencia didáctica planteada para la enseñanza de las matrices y formas cuadráticas se puede observar que la ordenación de contenidos cumplió coherentemente con los pasos propuestos por la Ingeniería Didáctica. La secuencia didáctica bien ejecutada y planificada permitió al docente que al finalizar la unidad de aprendizaje propuesta se obtuviera mayores aprendizajes logrados, debido a que la construcción de la secuencia no se rige para un contexto general como país, sino que está creada en función de un grupo de estudiantes en específico. Es muy importante reconocer que el "contexto" donde se desarrolló esta investigación permitió desenvolver de mejor manera el proyecto didáctico, debido al capital cultural e intelectual de los estudiantes participantes de esta investigación, quienes desarrollaron su autonomía, y fueron capaces de dar respuestas a problemas aplicados a nuevas áreas de la matemática.

En la actualidad, la sociedad del siglo XXI no sólo debe poseer la información, sino que también es necesario que los estudiantes sean capaces de interpretar, aplicar, relacionar y comprender los aprendizajes propuestos en la enseñanza de las matemáticas, ya que estas habilidades desarrollan en el estudiante las capacidades científicas necesarias para otras disciplinas o áreas.

Conclusiones

Considerando los objetivos específicos, es que se hace posible concluir en esta investigación que, al realizar el diseño de una secuencia didáctica en base a una Ingeniería Didáctica respecto a las matrices y formas cuadráticas, resulta exitosa su implementación. Se pudo observar que esto se debe a una correcta contextualización hacia un determinado grupo de estudiantes, lo que permitió obtener buenos resultados por medio de la organización de las clases en función de las problemáticas en estudio y del ritmo de aprendizaje de los estudiantes. Por medio de esta secuencia, es posible reafirmar que la ingeniería didáctica como método de investigación exclusivo de la educación matemática, permite a los investigadores realizar actividades reflexivas que hacen posible mejorar las prácticas docentes dentro de las aulas. La aplicación de manera secuencial de los contenidos de matrices y formas cuadráticas, presentaron los mayores y menores aprendizajes tras la aplicación del reactivo final de la secuencia didáctica, evidenciando que los estudiantes son capaces de operar expresiones matriciales a través de problemas de enunciados con la adición y la identificación de secciones cónicas con rotación de los ejes cartesianos y su gráfica respectiva, a partir del método de las formas cuadráticas. En síntesis, se puede determinar que el objetivo general se cumple en gran medida, respaldado por las triangulaciones con la teoría en el análisis de cada pregunta, ya que, si bien la secuencia didáctica presentó falencias al momento de la ejecución por factores estructurales y externos, permitió de igual forma tratar los contenidos de educación superior y lograr considerablemente los aprendizajes esperados.

Esta investigación sigue un enfoque mixto, basado en el paradigma socio-crítico y con una muestra intencionada, es por esto, que no se hace posible generalizar los resultados a otros tipos de establecimientos educacionales, sin embargo, genera la posibilidad de que cada establecimiento educacional construya secuencias didácticas específicas para sus estudiantes para avanzar así en la alfabetización matemática de la población estudiantil en Chile. Además, para poder ahondar en el tema de investigación planteado, es que es posible reformular la pregunta orientadora, quedando de la siguiente manera: ¿Qué otras temáticas de nivel superior son posibles de implementar en estudiantes que cursan el Plan de Formación Diferenciada de Matemática?

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Editorial Iberoamericana. Bogotá. Colombia.

Brousseau, G. (1981). Problemas de Ingeniería Didáctica. *Didáctica de las Matemática*. Francia

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica* (1era.ed.). Editorial AIQUE. Francia.

CINDA. (2011). *El proceso de transición entre Educación Media y Superior*. MINEDUC. Chile.

Godino, J., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., Wilhelmi, M. (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño*. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20et%20al_2013%20Ingenieria%20didactica.pdf.

Grossman, S. (1998). Algebra Lineal, Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamericana.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill Interamericana. Ciudad de México. México.

Martínez, J. (2011) Métodos de investigación cualitativa. *Revista de la Corporación Internacional* para el Desarrollo Educativo Bogotá. Colombia.

MINEDUC. (2001). *Matemática Álgebra y Modelos Analíticos, Programa de Estudio Plan Diferenciado*. Santiago. Chile. Recuperado de: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34389_programa.pdf

MINEDUC. (2017). *Propuesta curricular para 3° y 4° medio. Documento de consulta pública*. Unidad de Curriculum y evaluación. Chile.

Rodriguez, S., Herraiz, N., Prieto, M., Martínez, M., Picazo, M., Castro, I. y Bernal, S. (2011). *Investigación Acción, Métodos de investigación en Educación Especial*. Recuperado de: https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/Inv_accion_trabajo.pdf

Sardá, A. (2003). Argumentar; proposar i validar models, en N. San Martí (coord.), *Aprendre Ciencies tot aprenent a escriure ciencia* (121-148). Barcelona Edicions 62.

Soto, M. (2013). *Apuntes del curso Álgebra Lineal I.* Universidad Central de Chile. Santiago. Chile

CREENCIAS ACERCA DE LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES COLOMBIANOS: ADAPTACIÓN Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO

José Manuel Diego-Mantecón, Francisco Javier Córdoba-Gómez
Universidad de Cantabria. (España); Instituto Tecnológico Metropolitano. (Colombia)
josemanuel.diego@unican.es, franciscocordoba@itm.edu.co

Resumen

El presente trabajo es un estudio preliminar sobre las creencias acerca de las matemáticas que tienen los estudiantes de último grado de educación secundaria en Medellín, Colombia. Se presentan resultados parciales obtenidos, con una muestra de 276 estudiantes, tras aplicar la versión española del Mathematics-Related Beliefs Questionnaire (MRBQ)— un instrumento diseñado y validado inicialmente por expertos de la Universidad de Lovaina. Tras la adaptación del cuestionario al contexto colombiano, este se validó mediante un análisis factorial como en investigaciones anteriores. Los análisis mostraron la existencia de cuatro factores consistentes, que se corresponden con los obtenidos en los estudios originales. Los análisis respecto a la variable sexo permitieron identificar diferencias significativas en dos de los factores extraídos.

Palabras clave: creencias, matemáticas, cuestionario de evaluación, educación secundaria

Abstract

The present work is a preliminary study on mathematics-related beliefs undertaken with students from the last academic year of the secondary education in Medellín, Colombia. Partial results are presented, with a sample of 276 students, after applying the Spanish version of the Mathematics-Related Beliefs Questionnaire (MRBQ) — an instrument that was initially designed and validated by experts from the University of Leuven. After the questionnaire adaptation to the Colombian context, it was validated by applying factor analysis as in previous researches. The analysis revealed the existence of four consistent factors, which shown to be aligned with those obtained in the original studies. The analyses concerning the variable sex allowed identifying significant differences in two of the factors.

Key words: beliefs, mathematics, questionnaire, secondary education

Introducción

Para entender los factores que inciden en el rendimiento académico de los estudiantes en la materia de matemáticas no basta con estudiar las aspectos cognitivos y pedagógicos del aprendizaje. Hay otros aspectos a los que también se les debe prestar atención y que, en el contexto colombiano, no han sido suficientemente investigados hasta ahora. Uno de ellos tiene que ver con el dominio afectivo y en concreto con las creencias que tienen los estudiantes sobre las matemáticas. Estas tienen una fuerte influencia en

las actitudes que desarrolla el estudiante frente a esta materia. Unas creencias negativas pueden conllevar a un rechazo de las matemáticas, así como de otras materias con alto componente matemático, resultando en un bajo rendimiento académico del alumno.

En las últimas dos décadas ha habido un interés creciente por investigar las creencias del estudiante acerca de las matemáticas (Martínez-Sierra & Miranda-Tirado, 2015) y el papel que estas juegan en su aprendizaje (Andrews & Diego-Mantecón, 2015). En especial, un número importante de investigaciones sugieren que las creencias del estudiante sobre esta materia y su enseñanza tienen influencias significativas en diferentes aspectos del aprendizaje como la motivación (Pintrich, 1999), la selección de estrategias de resolución de problemas (Gómez-Chacón, 2010) o el tiempo invertido en obtener la solución a un problema matemático (De Corte, 2015).

En el contexto colombiano no se ha prestado, sin embargo, suficiente atención al estudio de las creencias. Se desconoce hasta el momento un instrumento que permita evaluarlas de forma fiable, y que ayude a comprender las dificultades del alumnado en el aprendizaje de las matemáticas. Normalmente las investigaciones se han centrado en el análisis de los procesos cognitivos (Arévalo & González, 2013), y meta-cognitivos (Santos & Lozada, 2013) del aprendizaje, así como en los aspectos curriculares (Ángulo, Reyes, Triana & Aristizábal, 2016). De acuerdo con lo anterior, este estudio tiene como objetivo la adaptación y validación de un cuestionario que permita identificar las creencias acerca de las matemáticas, de los estudiantes colombianos, y que nos ayude a entender mejor los factores que influyen en su aprendizaje.

Las creencias

Pehkonen & Törner (1999) señalan que una persona recibe continuamente percepciones del mundo que le rodea de acuerdo con sus experiencias, y estas percepciones conforman un conocimiento subjetivo de los diferentes fenómenos y su naturaleza. Este conocimiento personal, que está en continuo cambio y evolución, genera nuestro sistema de creencias. Cada nueva creencia se incorpora automáticamente en el sistema de creencias existente y lo modifica (Schoenfeld, 1985).

Las creencias tienen un fuerte impacto en cómo se aprenden y se enseñan las matemáticas, y por lo tanto se pueden convertir en un obstáculo para su aprendizaje. Los estudiantes con creencias rígidas y negativas sobre esta materia (ej. las matemáticas son únicamente una serie de reglas a seguir), pueden llegar a convertirse en aprendices pasivos, centrados principalmente en la memorización, y no en la comprensión y conexión de conceptos (Pehkonen & Törner, 1999). De acuerdo con Hidalgo, Maroto, Ortega y Palacios (2013) estas creencias negativas pueden ir afianzándose con el tiempo, si no se interviene, y afectar significativamente en el aprendizaje. Pehkonen & Törner (1996, citados en Vila, 2001) sugieren que el estudio de las creencias es fundamental para comprender mejor el pensamiento y las acciones de los estudiantes, y poder realizar así intervenciones en el aula que faciliten el aprendizaje de esta materia (Vila, 2001; Gómez-Chacón, 2007).

Op't Eynde, De Corte & Verschaffel (2002) afirman que para comprender la naturaleza y el funcionamiento de las creencias no se deben estudiar las diferentes dimensiones de creencias por separado, como se ha venido haciendo tradicionalmente, sino en relación unas con otras. Después de una exhaustiva revisión de la literatura, propusieron un modelo que integra las diferentes dimensiones de creencias

identificadas en tres categorías principales: (1) creencias sobre la educación matemática, (2) sobre uno mismo en relación con las matemáticas, y (3) sobre el contexto socio-cultural. A diferencia de otros modelos, los autores señalan que estas tres dimensiones están relacionadas entre sí e influenciadas por las características personales del individuo. Para verificar este modelo Op't Eynde & De Corte (2003) desarrollaron un instrumento de medida denominado: Mathematics-Related Beliefs Questionnaire (MRBQ). Este instrumento resultó ser fiable con estudiantes de diferentes contextos socioculturales, incluidos el flamenco (Op 't Eynde & De Corte, 2003), el español, inglés, irlandés y eslovaco (Diego-Mantecón, Andrews & Op't Eynde, 2007; Diego-Mantecón, 2013), y el ecuatoriano (De Corte, 2015).

Metodología

El objetivo de este trabajo es impulsar investigaciones en el campo de las creencias, mediante la validación de un instrumento de medida que permita identificar creencias sobre las matemáticas. En concreto, se pretende verificar la fiabilidad del MRBQ en el contexto colombiano, y por lo tanto establecer si es efectivo para identificar las creencias de estos estudiantes. Determinar la fiabilidad de este cuestionario permitirá la realización de investigaciones más amplias, que ayuden a comprender mejor los factores que influyen en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de colombianos.

El MRBQ adoptado en este estudio se corresponde con la versión modificada y validada de Diego-Mantecón (2013). Es una versión mejorada del cuestionario original que contiene 60 ítems. Como se ha indicado anteriormente, este instrumento ha mostrado consistencia a lo largo del tiempo en diferentes contextos socio-culturales, incluido el inglés, el español y el eslovaco. Además, la versión MRBQ de Diego-Mantecón (2013) está traducida al español y validada en varios países hispanos. Esto ayudó a establecer la equivalencia 'lingüística' y 'contextual' necesarias (Osborn, 2004) para adaptarlo al contexto colombiano. Sus ítems son además una versión refinada de los originales, dando lugar a escalas más fiables que las obtenidas en otros estudios (Diego-Mantecón, 2013).

Antes de su administración en el contexto colombiano, el MRBQ español fue revisado por expertos en educación matemática y por profesores de secundaria, para realizar las adaptaciones lingüísticas y contextuales necesarias. Además, se sometió a una prueba piloto con una muestra reducida de estudiantes para verificar que los ítems se interpretaban de la manera prevista por los investigadores. Durante este análisis se modificaron ligeramente algunos ítems y se eliminaron cuatro de ellos al no considerarse adecuados para el contexto colombiano. Este proceso fue el resultado de la validación interna (McQueen & Knussen, 2002) y de contenido de las escalas (Cohen, Manion & Morrison, 2003), previa a la administración del cuestionario. Se administró a una muestra de 276 estudiantes de la ciudad de Medellín (149 hombres y 127 mujeres), con edades comprendidas entre los 15 y 16 años. La muestra se seleccionó mediante una estrategia de conveniencia, administrando el cuestionario en aquellos centros públicos donde los investigadores tenían acceso y permiso para realizar la prueba. Esta se llevó a cabo en seis centros urbanos característicos de un nivel socio-económico bajo y correspondientes a los estratos uno y dos en una escala de seis niveles, donde el seis es el nivel más alto. La administración del cuestionario se realizó durante la jornada académica y fue llevada a cabo por uno de los investigadores, para evitar sesgos o contaminaciones en la recogida de datos. Los datos se tomaron en una escala Likert de 6 puntos (con 1 *Muy En Desacuerdo* y 6 *Muy De Acuerdo*), siguiendo las sugerencias de los estudios anteriores del MRBQ.

Análisis y resultados preliminares

Antes de realizar el análisis factorial se hizo un escrutinio de los datos eliminando aquellos ítems que no correlacionaban con los demás o que presentaban correlaciones extremadamente altas (Field, 2009). De los 60 ítems originales se conservaron 47. Para estos 47 ítems se determinó la medida de adecuación muestral mediante la prueba Kaiser Meyer-Olkin (KMO) y la prueba de esfericidad de Bartlett. Estas pruebas arrojaron un valor de 0.888 con un $p < 0.0005$, indicando una buena adecuación de los datos para computar un análisis factorial. Se aplicó un análisis factorial con rotación ortogonal, forzando la extracción de cuatro factores, y siguiendo la misma estrategia de análisis que en los estudios de Op't Eynde & De Corte (2003), Diego-Mantecón (2013) y De Corte (2015).

Los cuatro factores extraídos se identificaron como: Factor 1 (*Dominio Afectivo del Profesor*), Factor 2 (*Competencia y Gusto por las Matemáticas*), Factor 3 (*Importancia y Utilidad de las Matemáticas*) y Factor 4 (*Las Matemáticas como una Disciplina Exigente*) con unos valores del alpha de Cronbach de 0.90, 0.86, 0.87 y 0.74 respectivamente. Estos valores, superiores todos ellos a 0.70, son indicadores de la fiabilidad de los factores extraídos, y por lo tanto de la consistencia del cuestionario para su utilización en el contexto colombiano. Los cuatro factores se correspondieron en gran medida con los identificados en los estudios de Op't Eynde & De Corte (2003), Diego-Mantecón (2013) y De Corte (2015) lo que otorga una mayor consistencia y fiabilidad al MRBQ. El porcentaje total de varianza explicado fue del 43.7%, lo que se considera un valor aceptable. Es ligeramente superior a los valores obtenidos por Op't Eynde & De Corte (2003) y Diego-Mantecón (2013) con porcentajes del 38.3% y 39.4% respectivamente, y ligeramente inferior al conseguido por De Corte (2015) que fue de un 46.8%.

A manera de ejemplo, se muestran algunos de los ítems del cuestionario incluidos en los Factores 1 y 3, *Dominio Afectivo del Profesor* e *Importancia y Utilidad de las Matemáticas* (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Factores 1 y 3 extraídos usando rotación ortogonal*

Factor	*Ítems*	*Cargas factoriales*	
Dominio Afectivo del Profesor	Mi profesor trata de hacer las clases de matemáticas interesantes	0.781	
	Mi profesor de matemáticas es muy amable con nosotros	0.779	
	A mi profesor realmente le preocupa mucho cómo nos sentimos en clase	0.753	
	Mi profesor comprende las dificultades que tenemos con las matemáticas	0.733	
	Mi profesor realmente quiere que disfrutemos cuando aprendemos cosas nuevas	0.728	
	Creo que las matemáticas son una materia importante		0.770

Importancia y Utilidad de las Matemáticas	Las matemáticas son una materia necesaria que vale la pena estudiar		0.707
	Las matemáticas son importantes para mi vida		0.684
	Saber matemáticas me ayudará a ganarme la vida en un futuro		0.673

Los primeros ítems de cada factor, con cargas más altas, son los que más información aportan sobre el significado del constructo. En el caso del Factor 1, expresiones como "trata de hacer las clases interesantes", "es muy amable", "le preocupa cómo nos sentimos en clase", se relacionan con los aspectos afectivos del profesor en la enseñanza de las matemáticas. Este factor se denominó por lo tanto *Dominio Afectivo del Profesor*. El Factor 3 fue identificado como *Importancia y Utilidad de las Matemáticas*, al confluir en éste ítems como "creo que las matemáticas son una materia importante", y "las matemáticas me ayudarán a ganarme la vida". Mediante un procedimiento similar se identificaron los nombres de los otros dos factores.

Con respecto a las diferencias por sexo, se encontraron diferencias significativas (prueba t-test) en los Factores 1 y 4. En la Tabla 2 se muestran los cuatro factores extraídos, con el valor *p* y la media por sexo.

Tabla 2. *Valores medios de cada factor por sexo y valores significativos p*

Factor	*Chicas*	*Chicos*	*t*	*p*
1. Dominio Afectivo del Profesor	3.90	3.70	-2.095	0.037
2. Competencia y Gusto por las Matemáticas	3.55	3.59	0.473	0.636
3. Importancia y Utilidad de las Matemáticas	4.03	4.00	-0.341	0.734
4.Las Matemáticas como una Disciplina Exigente	2.87	3.08	2.31	0.022

Las chicas mostraron creencias significativamente ($p < 0.05$) más positivas acerca del profesor que los chicos (Factor 1), y consideraron también las matemáticas como una disciplina significativamente ($p < 0.05$) menos exigente que los varones (Factor 4). No hubo diferencias significativas respecto al sexo en los factores 2 (Competencia y Gusto por las matemáticas), y 3 (Importancia y Utilidad de las Matemáticas). En el Factor 2, tanto los chicos como las chicas, reportaron un nivel neutro en su competencia y gusto por las matemáticas, mientras que en el Factor 3 ambos respondieron positivamente sobre la importancia y utilidad de esta disciplina.

Conclusiones

Este estudio muestra que el MRBQ es consistente para su aplicación en el contexto colombiano, y que sirve por lo tanto para evaluar las creencias de los estudiantes colombianos con una fiabilidad aceptable. Se identificaron cuatro factores que se corresponden, en gran medida, con los obtenidos en estudios previos, y que explican un porcentaje total de varianza aceptable. Estos muestran además unos indicadores altos de validación interna. La validación del instrumento permitió hacer algunos análisis preliminares sobre la variable sexo, en los que se observaron diferencias significativas en los factores relacionados con la percepción del profesor sobre su enseñanza y la percepción sobre la exigencia de la disciplina. En los otros dos factores, relacionados con el gusto y la importancia de las matemáticas, no se observaron diferencias significativas.

Aunque este estudio presenta unos resultados consistentes, estos deben interpretarse con cautela ya que son el producto de un análisis preliminar, con una muestra relativamente pequeña. Un estudio más amplio con una muestra más representativa es necesario para contrastar resultados, y obtener más información sobre la influencia de las creencias en el aprendizaje de las matemáticas con estudiantes colombianos. La utilización de entrevistas cognitivas ayudaría en gran medida a interpretar los datos y a identificar, por ejemplo, los factores que influyen en las diferencias significativas encontradas con respecto a la variable sexo. Consideramos este trabajo como un estudio inicial para estimular el camino hacia futuras investigaciones sobre las creencias, en el contexto colombiano.

Referencias bibliográficas

Andrews, P. & Diego-Mantecón, J. (2015). Instrument adaptation in cross-cultural studies of students' mathematics-related beliefs: learning from healthcare research, *Compare: A Journal of Comparative and International Education, 45*(4), 545-567.

Angulo, L., Reyes, A., Triana, K. & Aristizábal, A. (2016). Análisis y recomendaciones para el cambio del currículo en la escuela: El programa PISA, los estándares básicos de competencias y los planes de estudio de matemáticas. *Revista Científica, Edición Especial*, 34-35.

Arévalo, C. & González, O. (2013). La compresión y reflexión de los procesos cognitivos que se generan en las prácticas de estudiantes para profesor a la hora de demostrar en geometría. *Revista Científica, Edición Especial*, 27-31.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2003). *Research methods in education* (5th ed.). London: Routledge Falmer.

De Corte, E. (2015). Mathematics-related beliefs of Ecuadorian students of grades 8–10. *International Journal of Educational Research, 72*, 1-13.

Diego-Mantecón, J. (2013). Evaluación de un modelo de creencias transcultural para el aprendizaje de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 16*(3), 561-574.

Diego-Mantecón, J., Andrews, P., & Op 't Eynde, P. (2007). Mejora y evaluación de un cuestionario de creencias de matemáticas en función de nacionalidad, edad y sexo. In M. Camacho, P. Flores & P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática, XI,* (pp. 325-333).

Field, A. (2009). *Discovering statistics using SPSS*. London: Sage Publications.

Gómez-Chacón, I. (2007). Sistema de creencias sobre las matemáticas en alumnos de secundaria. *Revista Complutense de Educación, 18*(2), 125-143.

Gómez-Chacón, I. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 121-140). Lleida: SEIEM.

Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T. & Palacios, A. (2013). Atribuciones de afectividad hacia las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *35*, 93-113.

Martínez-Sierra, G., & Miranda-Tirado, M. (2015). Mexican high school students' social representations of mathematics, its teaching and learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(5), 700–720.

McQueen, R., & Knussen, C. (2002). *Research methods for social science: An introduction*. Harlow: Pearson Education Limited.

Op´t Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students´ mathematics – related beliefs: A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G.C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 13-37). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Op't, Eynde, P. & De Corte, E. (2003). Students' mathematics- Related belief systems: Design and analysis of questionnaire. Paper presented at the 2003 *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, April 21-25, Chicago.

Osborn, M. (2004). New methodologies for comparative research; Establishing 'constants' and 'contexts' in educational experience. *Oxford Review of Education, 30*(2), 265-285.

Pehkonen**,** E. & Törner, G. (1999). Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research. In E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics: Proceedings of the workshop in Oberwolfach, November 1999*. (pp. 50-56). Duisburg, Germany.

Pintrich, P. (1999). The role of motivation in promoting and sustaining self-regulated learning. *International Journal of Educational Research 31*, 459-470.

Santos, D. & Lozada, G. (2013). ¿Es posible hacer evidentes los procesos de meta-cognición en la resolución de problemas? *Revista Científica, Edición Especial*, 47-50.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Vila, A. (2001). *Resolució de Problemes de Matemátiques: Identificació, Origen i Formació dels Sistemes de Creences en l´alumnat. Alguns Efetes Sobre L´Abordatge dels Problems*. Tesis de doctorado inédita, Universitat Autónoma de Barcelona, España.

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: UMA ANÁLISE DO PRIMÓRDIO DO ENSINO A FORMAÇÃO DOCENTE

Daniela Alves da Silveira Moura; Geraldo Leonardo de Oliveira; Matheus Henrique Damasceno; Mayara dos Santos Pereira
Faculdade de Pará de Minas (Brasil)
danisilmoura@yahoo.com.br, leonarddo_olliveira@hotmail.com, matheushenrriquebh@hotmail.com, mayyarastos@gmail.com

Resumo

Apresenta-se neste artigo um estudo de abordagem qualitativa, realizada em uma escola privada de Itaúna/MG, comparando os resultados obtidos nos testes de Matemática do 3º ao 6° ano, Ensino Fundamental e os mesmos aplicados em uma turma de Pedagogia da Faculdade de Pará de Minas. Utilizaram-se como aporte teórico Vergnaud, Ramos, entre outros, com a pretensão de desvelar e compreender as dificuldades dos alunos no fazer matemático em situações problema que envolvem estruturas do campo aditivo e multiplicativo, bem como investigar como eles desenvolvem e registram seus conhecimentos.

Palavras Chave: campos conceituais; Vergnaud; aprendizagem

Abstract

This paper shows a qualitative study, carried out in a private school in Itaúna, Minas Gerais, comparing the results, obtained in Mathematical proofs from 3 to 6 grades of Elementary School, to the same proofs applied in a class of Pedagogy at the Faculty of Pará State in Minas. We used Ramos and Vergnaud's theoretical contributions, among others, with the aim of finding and understanding students' difficulties in their mathematical doing in problem situations involving addition and multiplication structures, as well as investigating how they develop and acquire their knowledge.

Key words: conceptual fields; Vergnaud; learning.

Introdução

A aprendizagem é temporal, pode ser vista como o desenvolvimento cognitivo de um indivíduo, ou se considerado num recorte ao longo de um período curto de tempo, pode ser vista como o desenvolvimento de um esquema particular. No campo da matemática, embasados na premissa do saber, do conhecimento, justifica-se a necessidade do ensino desta componente como importante ferramenta de interação social. Assim, através de suas relações nos mais diversos campos de estudo, trabalho e relacionamento social, percebe-se sua real importância no cotidiano das pessoas, como na contagem do tempo, nas operações comerciais, no dimensionamento de medidas como, volume, comprimento, área e até nos momentos de descontração como os jogos. Deste modo a matemática atua de forma significativa no currículo da

Educação Básica, se legitimando em quanto representação de uma linguagem formal, específica e participante no desenvolvimento cognitivo de cada indivíduo.

Vergnaud (1996, p.225) afirma que o desenvolvimento cognitivo deve ser analisado tanto a partir da perspectiva das situações matemáticas em que as atividades dos alunos ocorrem, quanto na perspectiva dos conceitos envolvidos na análise das situações. Reconhece que a teoria dos campos conceituais é uma teoria da representação e do desenvolvimento cognitivo. Ressalta que as situações matemáticas de certa forma são como vetores promotores que instigam e mobilizam o cognitivo, assim quando os alunos são confrontados com uma nova situação, eles buscam o conhecimento que foi modelado por experiências com situações mais simples e familiares anteriormente para tentar moldar esta situação nova. (Vergnaud, 1988, p.141). Esta descrição é análoga a teoria Piagetiana de acomodação e assimilação.

A partir desta temática, refletimos sobre as operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão no Ensino Fundamental 1 e 2, por se tratarem de fenómenos corriqueiros, mas que ainda causam inquietação por parte dos docentes, uma vez que muitos alunos não se sentem confortáveis na resolução destas simples operações. Portanto, subsidiados pelos campo conceituais de Vergnaud (1996) concatenados à ideia de resolução de problemas elaborada por Ramos (2011), objetivamos analizar o desenvolvimento e representações dos alunos acerca destas estruturas do campo conceitual aditivo e multiplicativo por alunos do 3º (terceiro) ao 6º (sexto) ano do Ensino Fundamental, bem como, fazer transparecer assim a dificuldades destes alunos dentro destes conceitos.

Neste estudo adotou-se como metodologia a pesquisa qualitativa e quantitativa, por evidenciar a descrição, a inferência, a coleta e a análise de dados pautados na teoria do estudo de registros, análise de gráficos e porcentagens, documentos e estudo de caso. Os dados foram coletados mediante aplicação das situações, problemas em turmas do 3º (terceiro) ao 6º (sexto) por meio de um formulário do Google. Considera-se, portanto, um momento privilegiado, segundo Lüdke e André (1986) por associar o pensamento e a ação de um sujeito, ou de um grupo, com o empenho de elaborar o conhecimento de elementos da realidade que deverão servir para a elaboração de soluções dos problemas diagnosticados. Esse conhecimento é recorrente de inquietações, de estudos e da atividade investigativa. Deste modo, a educação matemática abarca esta metodologia uma vez que os registros dos alunos no desenvolvimento de tarefas são identificadores de seu conhecimento, pois descrevem relacionamentos, que são tomados pelos alunos quando um caminho é percorrido para solucionar um problema.

Referencial teórico

Pressupostos Teóricos: Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativos

Para Vergnaud (1996), a teoria dos campos conceituais, defende a necessidade de identificar e distinguir as etapas pelas quais as crianças operam para lidar com as diferentes estruturas de problemas e o uso de diferentes estratégias para resolvê-los.

Em várias pesquisas nas últimas décadas, Vergnaud desenvolveu e propôs sua teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1988, 1994, 1996, 1997). De acordo com Vergnaud (1996), a teoria dos campos conceituais visa fornecer uma estrutura fecunda e ampla para o estudo em intricadas competências cognitivas, diversidade de tarefas e desenvolvimento a partir da experiência e da aprendizagem,

fundamenta-se no entendimento de que um único conceito pode abarcar inúmeras situações distintas, e uma única situação pode ser analisada a partir da correlação de vários conceitos. O limiar que mobilizou o desenvolvimento da teoria dos campos conceituais surgiu da necessidade de conectar conceitos matemáticos, relações e teoremas, bem como concepções e competências inerente a estes conceitos matemáticos.
Vergnaud (1997) analisou e descreveu vários campos conceituais, os quais abrangem as estruturas aditivas e estruturas multiplicativas. Seus estudos incluem a classificação e a organização ordenada dos problemas e atividades matemáticas, bem como a análise na participação dos alunos, que compreende a identificação na tomada de decisões e procedimentos de resolução.

A teoria dos campos conceituais é holista e incorporativa, dois fenômenos que permitem a os pesquisadores estudarem diferentes níveis, por ser específico do conteúdo, mas não limitado ao conteúdo, assim esclarecendo estes termos, significa que não se restringe a aprendizagem de tópicos específicos, mas que pode ser estendido para investigar a aprendizagem de qualquer domínio. Nesta perspectiva, mesmo que Vergnaud trate os campos conceituais no cenário da matemática básica, como proposto nos seus exemplos, sua teoria contém indicações de que os campos conceituais podem ser estudados fora da matemática básica e mesmo fora desta disciplina.

Outra característica importante são as estratégias, ou esquemas usados pelos alunos que abrangem objetivos, regras de ação, possibilidades de inferência e invariantes operacionais (representação semiótica). Comunga com esta perspectiva, Duval (2009) que discorre sobre o conhecimento, ratificando que não é possível estudar os fenómenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação [...] Porque não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação. (Duval, 2009, p.29)

Vergnaud (1988) definiu a teoria do campo conceitual como um conjunto de situações, cuja competência exige o domínio de vários conceitos de diferentes naturezas. Em particular, Vergnaud caracterizou dois campos: o aditivo e o multiplicativo. O campo aditivo inclui a adição e subtração, a qual trataremos as seguintes estruturas: (I) composição de duas medidas numa terceira, que envolve a ideia de reunir, juntar; (II) A transformação de uma medida inicial numa medida final; que compreende o conceito de acrescentar; (III) A relação de comparação entre duas medidas, que abarca a estrutura de comparar, relacionar; (IV) A composição de duas transformações, que implica mobilizar mais de um movimento, tal como, acrescentar e acrescentar, ou retirar e acrescentar, por exemplo (Vegnoud, 1996, p. 205).

Para Vergnaud (1996), o campo conceitual multiplicativo refere-se a um sistema de estruturas que implicam em situações e procedimentos envolvendo ações de multiplicação e divisão que abarcam diferentes significados tais como: ideia aditiva, abreviar a soma de parcelas iguais, combinar a ideia de área que resulta em calcular o número de elementos dispostos em linhas e colunas, distribuir e formar agrupamentos, conjunto de ideias que configuram as estruturas: multiplicação, comparativa, ideias de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória (Brasil, 2001, p.19). Em complemento a essa teoría Magina (2016) diz que devemos permitir a identificação das descontinuidades entre os campos conceituais aditivos e multiplicativos, e que devemos evitar os conceitos como que *a multiplicação sempre aumenta e a divisão sempre diminiu*.

Nesse sentido, visando diagnosticar as principais dificuldades apresentadas pelos alunos, selecionamos problemas de estrutura aditiva e multiplicativa, que busca instigar o aluno a construir uma linha de raciocinio e tomada de decisões no desenvolvimento das situações matemáticas.

Estudo de caso

Realizamos a aplicação de uma ampla sucessão de situações matemáticas diversificadas, as quais foram selecionadas com base na teoria dos campos conceituais aditivos e multiplicativos. Esta pesquisa integra a análise de Vergnaud e outras análises como Magina (2011, 2016) e resulta em um conjunto de estruturas que tem como objetivo refletir acerca da natureza destes conceitos no campo da matemática bem como cognitivamente.

Para aplicação utilizamos uma ferramenta do Google (formulário do Google) no qual foram disponibilizadas as tarefas dos campos conceituais. Os participantes deste estudo foram alunos do ensino fundamental 1 e 2, de uma escola privada no Município de Itaúna – Minas Gerais– Brasil. Durante o processo de aplicação, pode-se observar as dificuldades apresentadas pelos alunos em incorporar as situações matemáticas no emprego das operações apropriadas na resolução das questões.

Tem-se por intuito, analisar e discutir os dados de resolução de 6 (seis) destas situações matemáticas, se atentando a tomada de decisão do aluno e a interpretação utilizada para a resolução do problema. Classificando-as em acordo com as estruturas aditivas e multiplicativas.

Proposta de Atividade sobre os campos conceituais Aditivo

1- *Daniela tem algumas pulseiras coloridas e Carla tem 17 pulseiras. Se Carla tem 8 pulseiras a mais que Daniela. Quantas pulseiras tem Daniela?*
Este problema envolve o conceito de comparação, que seria o confronto de duas quantidades para achar a diferença. Vergnaud (1996) esclarece que, no raciocínio de comparação, os valores não se transformam, apenas se estabelece a ideia de uma comparação entre dois estados. Nesta questão, houve no 3º (terceiro) ano, um número de erros em torno de 34,6%, evento justificado pelo próprio conceito de complemento imbricado neste item, mas sobretudo por abarcar justaposto uma mudança de estado, uma vez que não se sabe a quantidade inicial de pulseiras de Daniela, podendo também fazer uso da estrutura de complemento. A turma que se saiu melhor nesta questão, foi a do 4º (quarto) ano, que obtiveram um percentual de acerto de 86,7%.

Proposta de atividade sobre campos conceituais multiplicativo

1- *Pedro tem a metade de figurinhas que Lucas tem. Se Pedro tem 14, quantas figurinhas tem Lucas?*
Esta tarefa abrange o conceito de correspondência. Magina prefere utilizar o termo proporção para correspondência, e especificamente nesse caso, faz-se a proporção de um pra muitos. A maior quantidade de erros, ocorreu no 6º (sexto) ano, 28%, ou seja, a turma que deveria ter uma maturidade matemática maior, e o 3º (terceiro) ano foi a turma com maior número de acertos. O termo metade no enunciado da questão, provocou nos alunos a ideia de divisão, como na proposta, se Pedro tem a metade que são 14, Lucas deveria então ter o dobro.

Conclusão

Concluímos que os alunos no campo aditivo dominam o processo dos algoritmos, em suma concebem a tomada de decisão corretamente e apresentaram alguns resquícios na compreensão de estruturas mais complexas como completar e comparar. Já no campo multiplicativo revelam controvérsias nas interpretações das tarefas e no processo operatório.
Observamos que, em grande parte dos testes propostos, os alunos apresentaram uma evolução de sua maturidade matemática, tendo assim um melhor aproveitamento, daqueles que se encontravam em anos mais avançados que os demais, tendo uma diferença menor dentre os alunos do 5º (quinto) e 6º (sexto) ano no que tange os campos conceituais aditivos e multiplicativos.

Para ter uma análise justa, e não haver distorção dos fatos, não levamos em consideração os testes dos campos conceituais multiplicativo do 3º (terceiro) ano, uma vez que os mesmos ainda não foram apresentados a multiplicação por se encontrarem nessa série. Exceto quando tivemos um fato peculiar, onde o 3º (terceiro) ano, teve uma média superior ao do 6º (sexto) ano em uma das questões dos campos multiplicativos.

Por fim, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud é usada e refinada para analisar tentativas dos alunos de testar e estabelecer relações, assim as seguintes questões são levantadas: as estratégias cognitivas são usadas pelos alunos quando enfrentam problemas desconhecidos referenciando-se á problemas familiares. Fica também evidente o uso de ferramentas matemáticas diversas, como representações pictóricas, algoritmos e esquemas de resolução.

Referências bibliográficas

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. (2001). *SAEB 2001: novas perspectivas. Matrizes de Referência do SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica.* Brasília: Autor. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/saeb/2001/Miolo_Novas_Perspectivas2001.pdf

Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano*. São Paulo: Livraria da Física.

Lüdke, M., Marli, A. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Magina, S. A (2005) Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente. *Anais XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática. São Paulo: Unicamp*. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/ anais/conf/conf_01.pdf

Ramos, L. (2009). *Conversas sobre números, ações e operações: Uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos*. São Paulo: Ed. Ática.

Vergnaud, G. A. (1996) Teoria dos campos conceituais. In: J. Brun (Ed.), *Didáctica das matemáticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

da Silveira Moura, D., Damasceno, M., dos Santos, M., Santos, C. y Rodrigues J. (2016) Avaliações em larga escala: Reflexões acerca dos campos conceituais aditivos e multiplicativos. *XII Encontro Nacional de Educação Matemática* Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5882_3865_ID.pdf

Magina, S. A. (2011). *Comparação multiplicativa: a força que a expressão exerce na escolha das estratégias de resolução dos estudantes*. Conferencia Internacional Educação Matemática Recife

Magina, S.A. (2014). Raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. *Ciênc. educ. (Bauru)* [online]., vol.20, n.2, pp.517-533. ISSN 1516-7313.

Pereira, V.P. (2016). *Analizando a Resolução de situações Problemas das Estruturas Multiplicativas na Educação de Jovens e Adultos*. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciado em Matemática, Vitória da Conquista/Maio.

LA MODELIZACIÓN EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO DEL ESTUDIANTE DE INGENIERÍA

Saúl Ernesto Cosmes Aragón
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
cosmes21@hotmail.com

Resumen

Se presenta un avance de investigación de proyecto doctoral relacionado con la construcción de conocimiento matemático del estudiante de ingeniería frente a la modelización matemática. En la problemática mencionada se ha considerado el perfil de egreso requerido por diversas agencias acreditadoras de nivel nacional e internacional. Además se han realizado reflexiones relacionadas con la relación entre el ciclo de modelización de Blum y el Espacio de Trabajo Matemático (ETM). En una etapa actual se está indagando sobre el ETM de referencia en modelización a través del estudio de programas, entrevistas y revisión de documentos.

Palabras clave: modelización matemática, ciclo de modelización, ingeniería

Abstract

This paper shows a preview of an ongoing PhD research project related to the construction of mathematical knowledge engineering students have face mathematical modelling. With this respect, the exit profile, required by several accreditation national and international agencies, has been considered. In addition, reflections related to the relationship between the modelling cycle of Blum and the Mathematical Doing Space (MDS) have been made. At the present stage, we are researching into the MDS of reference in modelling through the study of programs, interviews and document reviews.

Key words: mathematical modelling, modelling cycle, engineering

Introducción

La construcción de conocimiento matemático (CCM) a través de la modelización matemática (MM) ha sido ampliamente estudiada por diversos investigadores ((Mena (2016), Rodríguez (2016)), incluso existen programas de investigación consolidados en el área, aunque con perspectivas de modelación distintas, guardan similitud en cuanto a su pretensión de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Cordero (2016) introduce una perspectiva social a la CMM.

Diversos grupos de investigación en modelización matemática dan evidencia de la importancia de su inclusión en el currículo escolar pero sobre todo en el día a día del salón de clase, e.g en Blum (2015) se presentan las siguientes justificaciones:

- *Justificación pragmática:* la enseñanza de tareas vía la actividad de modelización debe ser enseñada explícitamente en el salón de clase, pues no se considera una transferencia instantánea de conocimiento extra matemático sólo por enseñar contenido matemático formal.
- *Justificación formativa:* el trabajo con actividades de modelización permite formar en el estudiante competencias sobre todo competencias de modelación y de argumentación basada en pruebas relacionadas con la realidad.
- *Justificación cultural:* que el estudiante visualice a la matemática como una ciencia útil depende de su relación con contextos extra matemáticos.
- *Justificación psicológica:* al trabajar con este tipo de tareas los estudiantes se sienten más interesados y motivados por crear matemática y ello permite un aprendizaje más duradero.

En nuestro trabajo se está interesado en investigar sobre la CCM mediante la relación entre la modelización y el conocimiento matemático (CM) en el estudiante de ingeniería. Se considera que el CM relacionado con la MM puede dar elementos para un conocimiento acorde a las exigencias de competencia matemática de un ingeniero.

Los elementos teóricos son los relacionados con investigar cómo es el *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM) en el dominio de la modelación en los sujetos de estudio. Al respecto nos planteamos como objetivo caracterizar el espacio de trabajo en estudiantes de ingeniería, que se activa con la modelización matemática, dicha caracterización se realizará en una asignatura correspondiente al eje de las ciencias de la ingeniería, específicamente en la asignatura de Mecánica de Sólidos. Los objetivos específicos que nos conducirán a lograr el objetivo antes planteado son: identificar las variables didácticas, cognitivas y epistemológicas relacionadas con el trabajo matemático vía la modelización así como estudiar el ETM personal del estudiante cuando es enfrentado a un problema de modelización.

La formación por competencias en el estudiante de ingeniería

Algunos elementos que nos permiten justificar la problemática de la CCM están relacionados con las competencias que son necesarias en un estudiante de ingeniería y futuro profesionista. Las exigencias que se perfilan en un egresado de ingeniería quedan establecidas por diversos organismos como por ejemplo CACEI en México, la Comisión Nacional de Acreditación en Chile o las relacionadas con el proyecto TUNING a nivel Latinoamérica.

En PISA se establece que un individuo posee competencia matemática si es capaz de reconocer el papel de las matemáticas en el mundo que le rodea y utilizarlas en el abordaje de distintos contextos. OECD (2013) declara que la noción de construcción de modelos es una piedra angular en la promoción del desarrollo del pensamiento matemático.

La formación matemática en ingeniería vía la modelización es una competencia matemática declarada por (SEFI, 2013), en la que menciona la importancia de formar al estudiante con capacidad tanto para el uso de modelos como para realizar el proceso de modelización matemática. Las dos componentes de modelización matemática mencionadas las describe de la siguiente manera:

> This competency also has essentially two components: the ability to analyse and work in existing models (fins properties, investigate range and validity, relate to modelled reality) and ability to perform active modelling (structure the part of reality that is of interest, set up a mathematical model and transform the questions of interest into mathematical question, answer the questions mathematically, interpret the results in reality and investigate the validity of the model, monitor and control the whole modelling process (p.14)

Para nuestra investigación se va a considerar la construcción del objeto matemático en un doble estatus, en el de objeto matemático propiamente y el estatus de herramienta de solución de situaciones. Para ello se relacionan dominios extra matemáticos con dominios intramatemáticos, como por ejemplo la relación de la modelización con objetos matemáticos correspondientes al cálculo diferencial e integral.

Para abordar la formación por competencias en el estudiante de ingeniería, donde la modelización matemática contribuya a dicha formación, se hace necesario vincular las asignaturas de matemática con las asignaturas de los ejes correspondientes a las ciencias de la ingeniería y/o ciencias del diseño (especialidad), tal vinculo no es una tarea fácil y presenta una brecha de investigación el caracterizar espacios de trabajo matemático en ejes de formación externos al eje de ciencias básicas. La necesidad de que antes mencionado se hace presente en (SEFI, 2013) que declara lo siguiente: "It is obvious that a strong link between those responsible for mathematical education and those who are in charge of proper engineering courses is decisive for achieving a good integration of mathematics into the engineering curriculum" (p.65)

El uso y la forma de los objetos matemáticos que forman parte la actividad del estudiante en el eje de ciencias de la ingeniería dista del uso y la forma de los objetos matemáticos aprendidos en las asignaturas de ciencias básicas, un ejemplo se tiene en el siguiente problema donde es considerada la situación de calcular la fuerza hidróstatica sobre las paredes de un recipiente.

En un contexto puramente matemático en Flores (2008) se muestra uno de los objetos que a priori podrían ser utilizados cuando el alumno aborde la tarea, el de integral en una variable y su expresión para la evaluación de la integral de una función:

Si una función continua tiene una primitiva, entonces la integral de la primera sobre cada intervalo cerrado es igual a la diferencia de valores de la primitiva en sus extremos.
Sea $f: [a, b] \rightarrow R$ continua y $g: [a, b] \rightarrow R$ una primitiva de f, es decir $\frac{dg}{dx}(x) = f(x)$. Entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{dg}{dx}(x)dx = g(b) - g(a)$

Es importante aclarar que para nuestro trabajo consideramos que una situación en contexto no es, *per se,* una actividad de modelización (como si podría serlo por ejemplo para el grupo de modelización de la Teoría Antropológica de lo Didáctico o para el grupo de la Educación Matemática Realista), pues de acuerdo a lo planteado en Blum (20015) esta debe exigir una alta demanda cognitiva en el estudiante y esa demanda es producto de una serie de factores como por ejemplo la naturaleza de la tarea en sí misma, la cual debe ser real y de interés para el estudiante, además en el ámbito de la matemática la tarea debe permitir el trabajo con el modelo matemático planteado pero además se debe facilitar que la tarea permita

una continua vinculación entre la parte real y la parte matemática para de esa manera crear escenarios donde las situaciones de validación permitan al estudiante argumentar sus producciones y resultados.

Tomando en cuenta lo anterior y a reserva de lo que la tarea presentada pueda representar en cuanto a la modelización, un ejemplo de situación en contexto extramatemático, donde la necesidad del uso del objeto integral de una función es el propuesto en Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, Julio., Garza, José (2012) se presenta a continuación
Un estanque lleno de agua tiene una de sus paredes inclinadas, formando un ángulo de 30° con la vertical, como se muestra en la siguiente figura, la profundidad del estanque es de 8 metros y su base es cuadrada con 10 metros de lado.

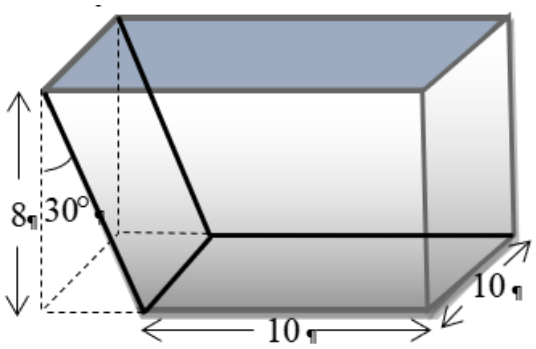


Fig. 1. Recipiente conteniendo el líquido (Salinas, et. Al, 2012)

La tarea anterior necesita que el estudiante modele primero la función matemática que le permitirá posteriormente, a través del teorema fundamental del cálculo, calcular el cambio acumulado de la magnitud fuerza hidrostática sobre las diversas paredes del recipiente mostrado.

Elementos teórico-metodológicos

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) es un modelo teórico desarrollado por Kuzniak y Richard (2014). El ETM se precisa con el objetivo de comprender mejor lo que desde un punto de vista didáctico, se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un marco escolar. El espacio concebido de esta manera designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos. Dicha organización permite transitar entre dos niveles: uno epistemológico donde se hacen presentes elementos como el representante, los artefactos y el referencial teórico y un plano cognitivo compuesto por la visualización, la construcción y la prueba.

Con el objetivo de describir el trabajo matemático en un marco escolar los ETM se clasifican en ETM de referencia, ETM personal y ETM idóneo.

- ETM de referencia: Está compuesto por las matemáticas que pertenecen a la institución y que idealmente provienen de la matemática formal

- ETM idóneo: Es un espacio de trabajo diseñado y construido por un experto, de tal manera que sea apto para su uso por utilizadores potenciales. Depende de una institución y debe ser definido con base en la manera en que este saber se enseña
- ETM personal: Es el espacio de trabajo donde en una determinada institución escolar, un estudiante o profesor atiende un problema matemático. Está condicionado al conocimiento y las capacidades cognitivas del sujeto que lo atiende.

Para comprender el proceso de aprendizaje matemático que estamos proponiendo consideramos la interacción (o ciclos) del modelo de los ETM con el modelo de Blum adaptado en (Borromeo, 2013). La interacción está pensada debido a que suponemos que en el momento en que el estudiante aborda la situación ocurrirá un proceso de matematización horizontal que sirve de base para llevar la situación problema al campo de la matemática de manera que dentro de este campo ocurre un proceso de matematización vertical, que es donde ocurre un proceso de interacción entre el ciclo de Blum y el modelo del Espacio de Trabajo Matemático.

Los diferentes pasos teóricos del proceso de modelización considerando lo anterior quedaría compuesto por las fases que se muestras a continuación. Es importante considerar que son fases teóricas del proceso de modelización donde se está en el supuesto de la interacción entre los modelos mencionados.

Una primera interacción (flechas azules de la figura 2) entre el modelo de Blum y ETM sucede cuando el estudiante inicia el proceso de matematización vertical, en esta fase se produce la activación de las génesis semiótica e instrumental, en ella el estudiante trabaja matemáticamente con el modelo, desarrolla y trabaja en la construcción de representaciones.
Una segunda interacción (flecha roja de la figura 2) entre ambos modelos ocurre Una vez el estudiante ha trabajado con las representaciones donde contrasta sus resultados obtenidos en el trabajo matemático con la situación real, para de esta manera interpretar y validar sus resultados. En esta fase a priori se considera que el estudiante se dirija al modelo de Blum desde el plano semiótico-instrumental.

En un sentido de refinamiento de su proceso de validación entre el espacio de trabajo matemático y su contraste con la situación real teóricamente puede suceder una interacción en la que el estudiante se vea en la necesidad de regresar a trabajar en la matematización vertical dirigiéndose al plano instrumental-discursivo. En esta fase (flecha verde de la figura 2) se espera que el razonamiento matemático se dé una mayor manera y la activación de la génesis discursiva permita refinar su validación matemática.

En una cuarta fase (flecha café de la figura 2) se espera que el estudiante regrese de nuevo a la situación real pero esta vez estaría dirigido desde el plano semiótico- discursivo.

Las fases del proceso de interacción quedan esquematizadas en la siguiente figura

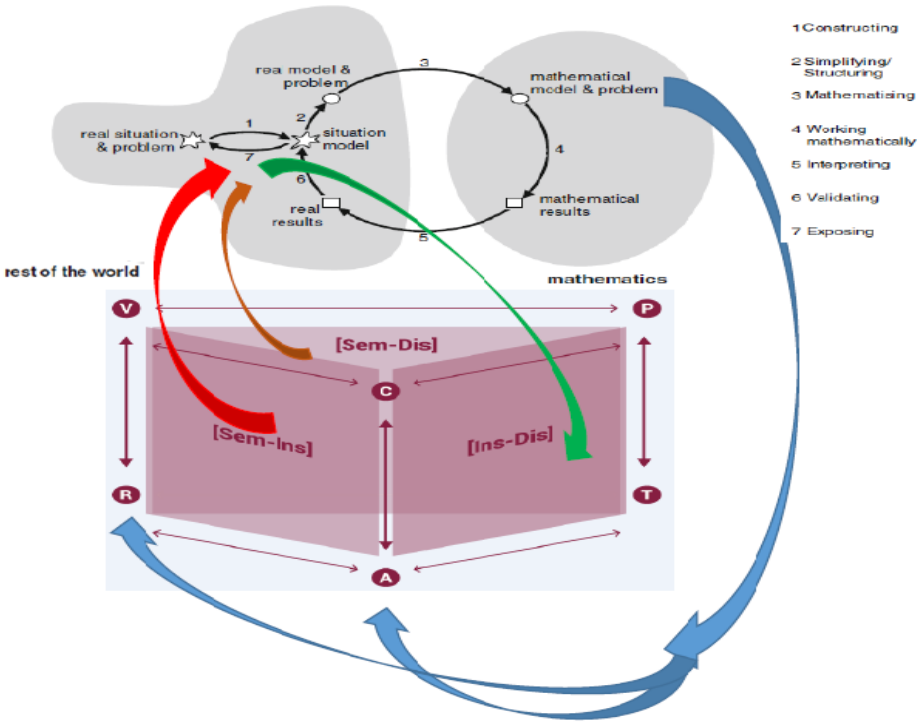


Fig. 2 Trayectoria hipotética de interacción entre el modelo de Blum-Borromeo y el modelo de los ETM

La metodología utilizada para llevar a cabo la investigación es de tipo cualitativa, a través del estudio de caso, específicamente en estudiantes de ingeniería Civil de una universidad chilena. Primeramente se ha realizado un revisión bibliográfica para la construcción del problema a investigar, posteriormente y con base a las consideraciones teóricas se ha indagado con respecto al ETM de referencia en modelización del caso seleccionado, posteriormente se construirá un ETM idóneo a través del diseño de una secuencia de aprendizaje, dicha secuencia permitirá indagar en el ETM personal del estudiante, a continuación se realizará una validación interna tanto de la secuencia de aprendizaje experimentada a través de una confrontación a priori y a posteriori así como de la investigación en general a través de una triangulación de investigadores.

Reflexión final

Los elementos presentados nos permitirán levantar información y dar evidencia de cuáles son los problemas de modelización que están presentes en la formación profesional del ingeniero. Así mismo las consideraciones teóricas que se han estudiado nos brindarán de elementos para diseñar una propuesta que permita generar tareas a partir de la actividad desarrollada por los sujetos de estudio con base a la modelización en su formación como ingeniero.
Además del estudio del ETM personal, la investigación nos permitirá aportar en el modelo teórico relacionado con el ETM en modelación.

Referencias bibliográficas

Alpers, B.A., Demlova, M., Fant, C.H., Gustafsson, T., Lawson, D., Mustoe, L. et al. (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education. A report of the mathematics working group*. Brussels: European Society for Engineering Education (SEFI).

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), The Proceedings of the 12 th International Congress on Mathematical Education: Intelectual and attitudinal challengues (pp. 73-96). New York, NY: Springer.

Borromeo, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal for Mathematics Education at Teachers College*, 4, 18-24.

CACEI. (2014). Marco de Referencia para la Formación de los Programas de Ingenierías. Cd. de México, México.

CNA (2016). Criterios de evaluación para carreras de ingeniería. Santiago-Chile. Recuperado de: http://www.cnachile.cl

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: El eslabón de la matemática y el cotidiano. En Arrieta y Díaz (Ed.), Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa (pp. 139–162). Cd. de México, México: Editorial Gedisa.

Flores, R., Valencia, M., Dávila, G., García, M. (2008), Fundamentos del Cálculo, Hermosillo, Sonora, México: Editorial Garabatos.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 17* (pp. 29-39). Cd. de México, México.

Mena, J. (2016). Modelación matemática y la construcción de conocimiento matemático. En Arrieta y Díaz (Ed.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp. 139–162). Cd. de México, México: Editorial Gedisa.

Proyecto Tuning Latinoamérica (2013). Educación Superior en América Latina: Reflexiones y perspectivas en Ingeniería Civil. En A. Guerrero (Ed.), Bilbao: Universidad de Deusto.

Rodríguez, R. (2016). Enseñanza y aprendizaje de la modelación desde y para la formación de ingenieros. En Arrieta y Díaz (Ed.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp. 163–193). Cd. de México, México: Editorial Gedisa.

OECD (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing. Recuperado de: http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-em

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, Julio, Garza, José. (2012), Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo II, Cd. México, México: Cengage Learning Editores.

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DE HISTÓRIAS EM QUADRINHOS

Danilo Monteiro de Vasconcelos, José Ivanildo Felisberto de Carvalho
Universidade Federal de Pernambuco. (Brasil)
dannilomont@gmail.com, ivanfcar@hotmail.com

Resumo

Este trabalho investiga o uso da história em quadrinhos (HQ) para o ensino e aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo. Construímos uma HQ associada a uma proposta de sequência didática. Como marco teórico, utilizamos os pressupostos da teoria da Aprendizagem Significativa e as ferramentas teóricas da teoria da Idoneidade Didática subjacentes ao Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática para análise do referido recurso didático (HQ) e da sequência didática associada. Os resultados demonstraram que é possível promover este recurso como um material potencialmente significativo para a construção do conceito de trigonometria. Destacamos que o recurso apresenta critérios que comprovam a sua adequação didática para os processos de ensino e aprendizagem da trigonometria.

Palavras-chave: trigonometria; ensino de trigonometria; recursos didáticos; aprendizagem significativa; enfoque ontosemiótico.

Abstract

This paper investigates the use of comic strips for the teaching and learning of trigonometry in the rectangle triangle. We built a comic strip associated with a proposal of a didactic sequence. As theoretical framework, we used the Meaningful Learning theory's assumptions and the theoretical tools of the Theory of Didactic Adequacy that are included in the Onto-semiotic Approach of Mathematics Knowledge and Mathematical Instruction to analyze the teaching resource (the comic strip) and the associated didactic sequence. The results demonstrated that it is possible to promote this resource as a potentially significant material for the construction of trigonometry's concept. We point out that the resource involves criteria that prove its didactic adequacy for the teaching and learning processes of trigonometry.

Key words: trigonometry; trigonometry teaching; didactic resources; meaningful learning; ontosemiotic approach.

Introdução

Os processos de ensino e aprendizagem no campo da Matemática são perpassados por diversos paradigmas que refletem as relações entre os sujeitos (professor e estudantes), os objetos matemáticos e os resultados que decorrem destas relações. O aspecto da motivação frente às aulas é um dos elementos envolvidos em um processo de ensino e aprendizagem da matemática. Ao professor cabe a tarefa de buscar

métodos e recursos didáticos que envolvam os alunos, de tal forma que os façam participantes ativos de sua aprendizagem (Zan, Brown, Evans e Hannula, 2006).

No contexto do ensino e aprendizagem de geometria se deve estar atento para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes e de suas compreensões sobre as regularidades e propriedades envolvendo os entes geométricos. Desta forma, pensando na inserção de um material didático que possa se relacionar com o aspecto motivacional dos estudantes e com a construção de um conceito matemático específico da geometria, apontamos a utilização de histórias em quadrinhos (HQ) como um *material potencialmente significativo* para o ensino e aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo (razões trigonométricas).

O objetivo do trabalho foi investigar como uma sequência didática utilizando uma história em quadrinhos pode favorecer a construção do conceito de Trigonometria no triângulo retângulo. Para esta investigação, nos valemos das discussões da Aprendizagem Significativa (Ausubel, Novak e Hanesian, 1980) e consideramos as ferramentas teóricas de Adequação Didática subjacentes à teoria do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática - EOS (Godino, 2011; Godino, Batanero e Font, 2008).

Diversas são as pesquisas que evidenciam a necessidade de se trabalhar fazendo uso de metodologias diferenciadas no ensino de Matemática (Nehring, Silva e Trindade, 2002). Há discussões sobre o uso de jogos no ensino (Grando, 2000), sobre a necessidade de se trabalhar interdisciplinarmente e sobre a utilização de diversos outros recursos. Percebemos que existe uma real preocupação em melhorar os processos de ensino e aprendizagem e destacamos, dentro dessa discussão, que todas essas metodologias e recursos podem ter algum efeito real levando em consideração duas variáveis: a preparação do professor no uso dos mesmos e a disposição dos alunos em aprender. Porém, nos questionamos se seria possível utilizar algum recurso pouco usual e que esteja presente no cotidiano das crianças e dos jovens (até mesmo de adultos) em uma aula de Matemática. Partindo dessa dúvida, inserimos as histórias em quadrinhos como uma ferramenta para o ensino.

Tal como discutido na teoria da Aprendizagem Significativa (Ausubel, 1980), as histórias em quadrinhos podem ser discutidas como um material potencialmente significativo (ou um organizador prévio) na aprendizagem da matemática. No entanto, eram necessárias ferramentas que norteassem e permitissem esta análise. Encontramos no sistema teórico do EOS, Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (Godino, Batanero e Font; 2008), este suporte.

Estudos antecedentes

A leitura de uma história em quadrinhos exige do leitor capacidades voltadas para a análise, classificação e síntese dentro das convenções estabelecidas para a sua compreensão. Vergueiro (2014), ao tratar do uso de HQ no ensino, destaca a grande popularidade deste meio e a possível inserção como recurso didático no âmbito educacional.

No ensino de Matemática, existem diversos conteúdos que geram entraves na mente dos estudantes. Para este trabalho, optamos pela Trigonometria no triângulo retângulo, tendo em vista as representações

associadas ao tema (figuras planas, ângulos, etc.), as dificuldades presentes em sua aprendizagem, assim como a sua extrema importância para conteúdos futuros, como o estudo do ciclo trigonométrico e das funções trigonométricas.

Rêgo e Rêgo (2000) destacam que é premente a introdução de novas metodologias de ensino, onde o aluno seja sujeito da aprendizagem, respeitando-se o seu contexto e levando em consideração os aspectos recreativos e lúdicos das motivações próprias de sua idade, sua imensa curiosidade e desejo de realizar atividades em grupo.

Para o ensino e aprendizagem das funções trigonométricas, os estudos (Ribeiro, 2011; Lima, 2013) destacam uma discussão sobre a importância da contextualização no ensino da Trigonometria para uma aprendizagem significativa. Lima (2013) apresenta a história da Trigonometria como outro aspecto relevante para a aprendizagem dos estudantes de forma plena, trazendo e discutindo a formação dos conceitos, suas aplicações e a relevância para a vida cotidiana.

Na investigação de Fortes (2012) sobre razões trigonométricas com alunos do Ensino Médio, o autor aponta que as dificuldades encontradas nos estudantes se relacionavam tanto com a falta de atenção durante as aulas como com a ausência de alguns conhecimentos que seriam pré-requisitos para a aprendizagem das razões trigonométricas, no sentido de identificar os elementos que constituem o triângulo retângulo e as relações existentes entre eles.

Esses estudos são considerados na proposta da construção da HQ por nós desenvolvida. Percebemos, com os estudos antecedentes, a importância de implementar processos de ensino e aprendizagem da trigonometria adequados didaticamente e que possibilitem uma construção significativa dos conceitos abordados.

Marco Teórico e método

Em seus estudos, Godino e colaboradores (2008, 2011) desenvolveram um sistema teórico de ferramentas para discussão dos processos epistemológicos (natureza dos objetos), cognitivos (aprendizagem) e instrucionais da matemática.

Tendo em vista os pressupostos teóricos do EOS, é constituído um sistema que permite valorar processos de instrução matemática denominado de *Teoria da Idoneidade Didática* (Godino, 2011), que se articulam nos seguintes componentes: adequação epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica.

Godino, Batanero e Font (2008) afirmam que "a aprendizagem matemática é concebida como o resultado dos padrões de interação entre os distintos componentes..." (p. 11). Neste sentido, utilizamos os componentes de adequação didática para construção e análise de uma sequência didática envolvendo a HQ para o ensino da trigonometria. Para a realização deste trabalho, optamos por uma abordagem qualitativa com foco na discussão do material construído. Realizamos as etapas descritas a seguir:

1. Construção da HQ com 22 páginas: a HQ traz o desenvolvimento dos conceitos matemáticos subjacentes ao conteúdo de trigonometria, como triângulo retângulo, semelhança e

proporcionalidade, até chegar às razões trigonométricas. Além disso, a mesma apresenta situações-problema e elementos que se relacionam com a história da Matemática;
2. Desenvolvimento da sequência didática para aproximadamente seis aulas: esta foi pensada para que a história em quadrinhos pudesse ser utilizada ao longo das aulas, de modo que houvesse interação entre os alunos (leitura em grupos) e com o professor.
3. Desdobramento da HQ, de modo a apresentá-la como um material potencialmente significativo.

Nesta última etapa, nos valemos das ferramentas da teoria da Idoneidade Didática na qual discorre sobre as dimensões primordiais em um processo de ensino e aprendizagem da matemática, a saber: dimensão epistêmico-ecológica – que diz respeito à epistemologia do conceito e sua respectiva relação com o contexto social e com o currículo prescrito; instrucional – que faz referência aos processos de mediação e interação; e a cognitivo-afetiva – relacionando-se com os aspectos motivacionais e com os processos cognitivos dos estudantes.

Resultados e discussões

Nesta seção, apresentamos a potencialidade significativa da HQ na sequência didática proposta, destacando as três ferramentas de Idoneidade Didática citadas anteriormente. No contexto da sequência didática, a história em quadrinhos serve como o leme para as atividades a serem desenvolvidas, tendo orientações tanto para o professor quanto para os alunos.

Na dimensão epistêmico-ecológica, a HQ está de acordo com o que é proposto nos documentos curriculares oficiais nacionais e internacionais: a mesma desenvolve o conceito das razões trigonométricas, conteúdo organizado no currículo para os anos finais do Ensino Fundamental.

Ainda nesta dimensão, a HQ perpassa por situações-problemas representativas concernentes ao estudo da trigonometria e, particularmente, da trigonometria no triângulo retângulo, como mostra a figura 1.

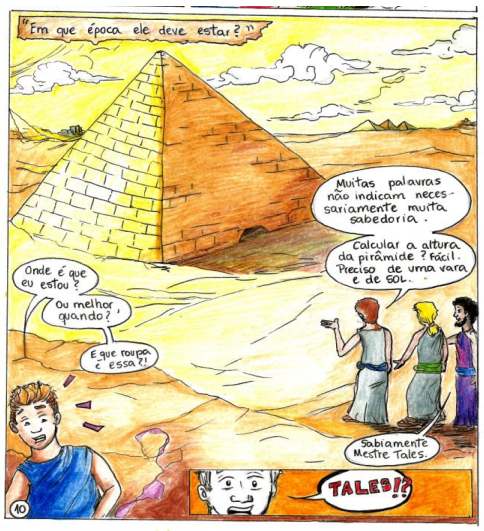


Figura 1. Situação-problema presente na HQ. Fonte: Os autores, 2017.

Elencamos os conhecimentos escolares que precisam estar presentes para a aprendizagem de funções trigonométricas, desenvolvendo toda a intervenção e pesquisa a partir deles: Ângulos; Proporcionalidade; Semelhança de triângulos e Triângulo retângulo.

Em relação à dimensão instrucional, destacamos a interação que a HQ pode proporcionar entre os estudantes e o professor. O trabalho com a mesma leva o professor a explorar as situações propostas de acordo com a necessidade percebida no processo de ensino (como retomar conceitos anteriores e necessários à aprendizagem do conceito em questão).

No que diz respeito aos estudantes, há a possibilidade de interação com as personagens do quadrinho (a quebra da quarta parede surge para possibilitar isto – figura 2) e com seus colegas para a resolução e discussão dos problemas.

Figura 2. Quebra da 4ª parede. Fonte: Os autores, 2017

A organização sequencial do material e a linguagem acessível aos estudantes – uma vez que os adolescentes e jovens estão acostumados com o tipo de linguagem – também são outras características importantes do recurso, permitindo adequá-lo à realidade na qual for inserido. É possível também encontrar em alguns momentos da história *setas* que indicam situações e quadros da HQ nos quais o professor pode nortear suas intervenções (figura 3).

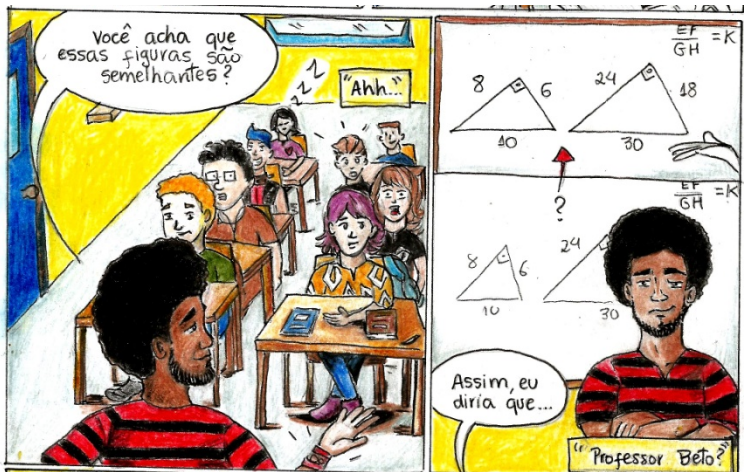


Figura 3. Indicação para intervenção do professor
Fonte: Os autores, 2017.

Por fim, com relação à dimensão cognitivo-afetiva, evidenciamos a possibilidade de motivação frente a esse tipo de material. Vergueiro (2014, p.21) aponta que,

> [...] há várias décadas, as histórias em quadrinhos fazem parte do cotidiano de crianças e jovens, sua leitura sendo muito popular entre eles. Assim, a inclusão das histórias em quadrinhos na sala de aula não é objeto de qualquer tipo de rejeição por parte dos estudantes, que, em geral, as recebem de forma entusiasmada, sentindo-se, com sua utilização, propensos a uma participação mais ativa nas atividades de aula.

Este entusiasmo inicial pode não estar relacionado ao aprender o conceito em si, mas as situações decorrentes podem levar a isso, facilitando o processo.

Com relação aos aspectos cognitivos, a construção progressiva do conceito de razão trigonométrica (desde conceitos de ângulos, proporcionalidade e razões) pode também possibilitar ao professor a revelação de importantes conflitos semióticos postos em jogo pelos estudantes, na vivência com o referido recurso didático.

Considerações finais

A partir da análise feita, levando em consideração todos os aspectos apresentados segundo cada dimensão, esta HQ na sequência didática proposta pode ser considerada um material potencialmente significativo para o ensino de Trigonometria no triângulo retângulo. No entanto, deve-se deixar claro que seu potencial é explorado somente nas relações em sala de aula, no momento em que o professor se apropria dela e promove situações que concorram para uma aprendizagem significativa.

Destacamos que somente a HQ não fornece elementos suficientes para a aprendizagem, pois se devem levar em consideração as concepções anteriores dos estudantes (que podem ser equivocadas) e agir de

acordo para corrigi-las e superá-las sempre que necessário. Nesse momento, o trabalho do professor é imprescindível para ajudar os estudantes a compreender e atribuir novos significados aos conceitos abordados.

Por fim, evidenciamos que a busca por melhorias no contexto da Educação Matemática, da sala de aula e dos processos que perfazem o ensino e a aprendizagem é o que nos impulsiona a seguir neste caminho, neste devir.

Referências bibliográficas

Ausubel, D. P; Novak, J. D; Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. 2ª ed. Rio de Janeiro, Brasil: Interamericana.

Fortes, A. W. B. (2012). *Razões trigonométricas no triângulo retângulo: uma análise de erros no Ensino Médio***.** Dissertação de Mestrado não publicada, Programa de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática - Centro Universitário Franciscano- UNIFRA. Brasil.

Godino, J. D. (2011**)**. Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Edumatec-UFPE (Ed.), *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* – CIAEM (pp1-19). Recife: Brasil.

Godino, J. D; Batanero, C; Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae, 10* (2), 7-37.

Grando, R. C. (2000). *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.* Tese de doutorado não publicada, Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas. Brasil.

Lima, N. J. (2013). A aprendizagem significativa em trigonometria sob o ponto de vista de quem ensina e de quem aprende. Editora ULBRA. *Anais do VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática* (pp.1-15). Rio Grande do Sul, Brasil.

Nehring, C. M., Silva, C. C. e Trindade J. A. O. (2002) As ilhas de racionalidade e o saber significativo: o ensino de ciências através de projetos. *Ensaio – Pesquisa em Educação em Ciências*, 2 (1), p. 1-18.

Rêgo, R. G. e Rêgo, R. M. (2000). *Matematicativa*. João Pessoa: Editora Universitária UFPB.

Ribeiro, E, C. (2011). *Material Concreto para O Ensino de Trigonometria***.** Monografia de graduação não publicada: Universidade Federal de Minas Gerais. Brasil.

Vergueiro, W. (2014). Uso das HQs no ensino. In Rama, A. e Vergueiro, W. (Eds). *Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula* (pp.25-37), Brasil: Editora Contexto.

Zan, R.; Brown, L.; Evans, J.; Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: an introduction. *Educational studies in mathematics,* 63 (2). pp. 113-121.

ETNOMATEMÁTICA INDÍGENA: COMPREENSÃO CULTURAL E ACADÊMICA

Daniela Moura, Denilson Amâncio, Lucas Lemos
Faculdade de Pará de Minas. (Brasil)
danisilmoura@yahoo.com.br, denilsonbdo@hotmail.com, lclemos1@hotmail.com

Resumo

Embasados no Programa Etnomatemática e na busca pela compreensão cultural e acadêmica dos indígenas Pataxó, Muã Mimatxi, localizados no centro-oeste do estado brasileiro de Minas Gerais, busca-se compreender, por meio de uma pesquisa qualitativa, os métodos de trabalho dos índios docentes para com a respectiva tribo e a maneira pela qual se dá a formação acadêmica desse povo, a fim de averiguar tal processo de ensino/aprendizagem e enfatizar a necessidade de se utilizar o conhecimento prévio dos alunos nas salas de aula, promovendo um aprendizado significativo, que capacite os discentes a se tornarem cidadãos reflexivos, críticos e conscientes.

Palavras chave: educação matemática, etnomatemática, educação indígena

Abstract

Based on the Ethno-mathematics Program and on the search for cultural and academic understanding of the indigenous peoples Pataxó, Muã and Mimatxi, located in the middle-west region of Minas Gerais Brazilian state, this qualitative research aims to understand the working methods of the indigenous teachers to their respective tribe and how the academic training of this people takes place, in order to ascertain such teaching-learning process, and emphasize the need of using the students previous knowledge in the classrooms, all of which promote a meaningful learning that enables the students to become reflective, critical, and conscious citizens.

Key words: Mathematics Education, ethnomathematics, indigenous education

Introdução

A globalização provocou mudanças demográficas e uma pluralidade de culturas em vários países. Os diferentes aspectos relacionados à sociedade multicultural estão cada vez mais significativos no campo educacional em geral e em particular na educação matemática.

Discutir o rosto da matemática desses pontos de vista têm o potencial de apreender a matemática como uma área cuja face é múltipla e pode ser interpretada em muitos aspectos, tal como, primeiramente reconhecida na sua definição formal, que pode ser conceituada pelo matemático e é suficientemente absoluta, neste aspecto, deve ser entendida por alunos em qualquer parte do mundo. A segunda interpretação decorre da expansão do mundo da matemática aos quais emergem conceitos em locais que

são influenciados por várias manifestações culturais e históricas. Esta realização exige que se tenha uma discussão holística sobre os valores da Educação Matemática. Neste contexto, apresenta-se a Etnomatemática, que é uma expressão de uma Multiculturalidade da própria Educação em Matemática e projetada como uma nova área por D'Ambrosio, que no livro "Etnomatemática: Um elo entre tradições e a modernidade", diz:

> O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura. (D'Ambrosio, 2005, p.22)

O significado do termo *Etnomatemática* traduzido pelo seu aspecto sociocultural, inclui Linguagem, léxico verbal, regimentos comportamentais e signos de um determinado grupo, e seu aspecto matemático abarca ações como a ontologia do conhecimento decorrente de práticas quantitativas e qualitativas, como contagem, pesagem, medição e classificação, codificação, entre outros.Quanto aos fenômenos que são identificados com o aspecto matemático, há uma grande variedade de implementações existentes, permitindo a explicação dos processos que caracterizam a Matemática praticada nas comunidades, no trabalho e na vida. A referência é a acumulação de conhecimento matemático que ao longo do tempo empiricamente é repassada por gerações.

No entanto, muitas vezes as pessoas envolvidas em Educação Matemática têm sido cegas, indiferente aos fatos reais de procedimentos matemáticos, padrões e estruturas que são desenvolvidas por seres humanos, vivendo e trabalhando em sociedades, ou ignorando-os.

Atualmente o campo da Etnomatemática é central para o processo e métodos de ensino, e, portanto não há razão para evitar sua inclusão nos currículos de formação de professores de Matemática. Entretanto, existe um abismo entre o ideal e a realidade, e a situação hoje é que na maioria dos casos as instituições estão preparando os futuros professores para a disciplina de Matemática sem qualquer contexto cultural. Essa situação induz que os novos professores vão pensar tal conteúdo como universal e acultural.

Os educadores devem pensar como mudar a situação e ajudar os professores a estabelecer modelos culturais em sala de aula. Esta solução parece uma orientação pedagógica potencial que leva em conta o conhecimento que os alunos aprendem fora da sala de aula. Da mesma forma, precisa-se ampliar a compreensão da Matemática sobre a influência dos valores socioculturais sobre os conceitos matemáticos e como ela está envolvida na vida comunitária, como também nas experiências de diferentes grupos culturais.

O contexto Pataxó no Brasil

Os indígenas brasileiros são conhecidos por ser um povo desfavorecido que durante décadas foram marginalizadas não só em termos socioeconômicos, bem como negligenciados quanto ao acesso à saúde, mas, sobretudo no reconhecimento da cultura e oportunidades de acesso à educação. Nas tentativas de aculturação, o povo Pataxó foi considerado como gentio brabo, devido a resistência mantida em seus aspectos culturais, fator responsável nas lutas por valorização e respeito, que se perpetua em tempos atuais,

porém, em uma outra vertente, associada numa garantia de fazer história no cenário educacional, cuja representações do fazer/ensinar contrapõe aos métodos ocidentais que vigoram atualmente.

Concepções sobre o modelo escolar: ocidental versus indígena

O sistema educacional brasileiro, bem como sua maneira de ensinar é reflexo de um modelo jesuítico trabalhado no período colonial que incide atualmente nas escolas ocidentais. A pouca eficácia desses métodos é responsável por várias indagações acerca do modelo educacional e provoca desinteresse devido a não associação do indivíduo ao meio, distanciando o ensinar do aprender e provocando desmotivação, assim como a abordagem do professor como centro da educação que priva os discentes de construírem o conhecimento. Nesse aspecto, a educação indígena se faz consonante com a aprendizagem significativa, uma vez que o conhecimento é construído por meio de práticas coerentes com suas realidades, propiciando a descoberta e utilizando-se do erro para formar o cidadão, sem ressaltá-lo como uma crítica, mas sim como uma reconstrução, promovendo uma aprendizagem concreta, confluindo com o pensamento de Cortella, que diz:

> Errar é, sem dúvida, decorrência da busca e, pelo óbvio, só quem não busca não erra. Nossa escola desqualifica o erro, atribuindo-lhe uma dimensão catastrófica; isso não significa que, ao revés, deva-se incentiva-lo, mas, isso sim, incorporá-lo como uma possibilidade de ser chegar a novos conhecimentos. Ser inteligente não é não errar; é saber como aproveitar e lidar bem com os erros. (Cortella, 2006, p.112)

Nessa perspectiva do saber lidar com o erro, o indivíduo aprende e se torna um cidadão reflexivo, crítico e consciente. Nesse processo de construção do indivíduo como um todo, a cultura indígena se apresenta de maneira relevante. Com isso, estão buscando nas universidades ferramentas que subsidiem a sua valorização e fomentem a relevância de sua cultura para o processo educacional.

Formação de professores indígenas

Pretende formar educadores interculturais, comprometidos com sua comunidade indígena, que possam intervir em sua realidade de modo a transformá-la, tendo como eixo, a reflexão sobre a prática vivida, utilizando, para isto, os instrumentos culturais construídos no curso, através de um processo de pesquisa-ação.

Uma educação escolar que contribua para que os povos indígenas conquistem o pleno desenvolvimento de suas culturas e de suas expressões é, agora, um direito garantido em lei. A Constituição brasileira assegura além do direito ao uso da língua materna, os processos próprios de aprendizagem, possibilitando, assim, a escola indígena diferenciada, específica, bilíngue e intercultural.

A partilha de culturas evidenciaria uma atitude positiva dos professores com o intuito de proporcionar oportunidades aos seus alunos indígenas de compartilhar a história e os valores indígenas no ensino. Essa estratégia é importante porque ajuda os estudantes indígenas a manifestar o orgulho e a confiança em sua identidade indígena. Em contrapartida, os outros não indígenas aprendem sobre eles, para que a cultura

indígena possa ser reconhecida e respeitada, fomentando o compromisso de aprendizagem dos estudantes Indígenas.

Portanto, nota-se que ser um professor indígena não é simplesmente uma decisão pessoal do indivíduo. Precisa, acima de tudo, respeitar e ser eficiente para responder às necessidades da comunidade, sistematizando uma proposta curricular que atenda às necessidades da aldeia. Tal praxe condiz com o que é defendido por Paulo Freire em seu livro "Pedagogia do oprimido", que diz:

> Será a partir da situação presente, existencial, concreta, refletindo o conjunto de aspirações do povo, que poderemos organizar o conteúdo programático da educação ou da política.
> O que temos de fazer, na verdade, é propor ao povo, através de certas contradições básicas, sua situação existencial, concreta, presente, como problemas que, por sua vez, o desafia e, assim, lhe exige resposta, não só no nível intelectual, mas no nível da ação. (Freire, 2006, p.245)

Confluindo-se com o objetivo do programa de etnomatemática, ser educador de nativos significa estar em constante formação e refletir sobre os processos, de modo a aprimorar a prática docente, uma vez que, precisa trabalhar conceitos por meio da realidade dos alunos.

A escola Pataxó

A escola Pataxó se baseia na realidade da tribo, um ambiente propício para o trabalho das ciências e da contextualização, *desfamiliarizando* a ideia de escola tradicional deixada pelos colonizadores. Após alguns diálogos sobre o saber/fazer matemático daquele povo, é interessante pontuar a importância da valorização cultural. Como citado anteriormente, a resistência desse povo foi um fator importante para a valorização da cultura e ainda se faz presente.

O material didático pataxó não possui nenhuma interferência ocidental, uma vez que se utiliza de um material próprio chamado TERREI, desenho que expõe a realidade em que vivem, substituindo o livro didático das escolas tradicionais. Esse subsídio é responsável no trabalho de todas as ciências, uma vez que elas se interligam. É ressaltado pelo cacique da tribo que os brancos vivem "engradeados" por um sistema que impossibilita o trabalho significativo, pontuado também a abominação pelas avaliações escritas, que se trata de uma opressão ao indivíduo, e não a uma técnica que o analisa na sua singularidade.

Visto que a formação escolar dos indígenas se dá por meio de uma metodologia prática, vale ressaltar a importância dos jogos nesse contexto, uma vez que complementam a formação escolar desse povo.

Estudo de caso

O percurso desta pesquisa abarca vários encontros no decorrer dos dois últimos anos. Com o intuito de investigar a manifestação matemática na aldeia Pataxó, dentre as visitas, pode-se destacar, a entrevista com os educadores indígenas, relatado no artigo "MATEMÁTICA E ENSINO INDÍGENA: UM ELO DE PLURALIDADES", publicado no ENEM(Encontro Nacional de Educação Matemática), congresso realizado no mês de julho de dois mil e dezesseis. Tal pesquisa foi resultado de uma visita à escola regular

da comunidade de Lamounier-Itapecerica-MG e abrangeu uma entrevista com o corpo pedagógico desta instituição. Estabelecendo uma contínua comunicação com esta escola, foi dado o último passo na participação de um projeto multicultural entre a escola mencionada, a Escola Estadual Dona Judith Gonçalves e Colégio Cenecista Educare, ambos de Itaúna-MG, a Faculdade de Pará de Minas-MG (FAPAM), bem como a escola indígena Pataxó.
Neste intercâmbio cultural, foi possível reunir cinco "tribos", entre índios e não índios, que apresentou como proposta, a integração dos alunos da escola regular na aldeia, onde estes alunos iriam participar de uma prática escolar indígena promovida e mediada pelos educadores índios Pataxó.

No decorrer do projeto, percebe-se a falta de conhecimento dos professores efetivos e em exercício nas turmas da escola regular do município, que adentem dentre os demais, alunos indígenas. O impacto e participação destes professores nos remetem reflexões de atitudes tomadas diante destes alunos tais como: reação dos professores, mudança psicológica, concepções de ensino, comportamento, mudanças na aplicação de abordagens de ensino, estratégias e técnicas, apoio organizacional, bem como mudanças na aprendizagem dos alunos.

Como tarefa, o professor Pataxó, Siwê, propõe que os alunos visitantes, reflitam sobre os lugares que conhecem, como são estes ambientes, a arquitetura, as paisagens, etc., como apresentado no diálogo abaixo:

Siwê: "Em que você pensou?"
Aluno 1: "Numa praça, porque eu vou lá todos os dias pegar pokemon."
Siwê: "E o quê tem na praça? Já pensou? Lembre-se dos pássaros, cachorros, pessoas, etc."
Siwê: "E você, o quê pensou?"
Aluno 2: "Como eu moro numa fazenda, pensei em desenhá-la."
Siwê: "Que bom! O que tem lá? Tem animais?"
Aluno 2: "Tem. Tem gado, galinhas, peixes, etc."

Assim, após o reconhecimento do espaço, foi proposto aos alunos, o esboço, o desenho destes ambientes com riquezas de detalhes. E a partir deste, os alunos foram conduzidos a criar um jogo, desenvolver as regras deste jogo e elaborar perguntas, desafios que abordassem qualquer área do conhecimento, que fossem pertinentes com o desenho, neste caso, "terreis" na língua Pataxó.

Durante a visita foram dadas todas as orientações. O professor Siwê acompanhou todos os grupos, porém como tempo não foi suficiente, os alunos se comprometeram a terminar os jogos e voltar à aldeia para apresentar o trabalho final e jogar com os próprios indígenas.

Após três meses, os alunos retornaram à aldeia e compartilharam suas produções. Foi um momento mágico, que possibilitou interações mais estreitas. Ambos, indígenas e não indígenas estavam à vontade, desprovidos de receios, abertos ao diálogo, interação e brincadeiras. O professor Siwê e seu pai Kanatio pareciam estar extasiados com uma produção que era fruto de uma proposta idealizada, formatada e direcionada por eles. Estavam muito descontraídos, tiraram muitas fotos e todos da aldeia participaram dos jogos.

Refletindo sobre a proposta do jogo, o grupo de pesquisa da FAPAM, levantou algumas questões condizentes com o desenvolvimento da tarefa, tais como a alegria na execução e o fazer matemático. Os

alunos gostaram muito do projeto, tiveram que pensar em estratégias do jogo e em muitos casos envolvia um raciocínio lógico, tiveram que articular e criar situações matemáticas diversificadas e neste ponto foi observado que os alunos apresentaram propostas que envolviam frações, porcentagem, proporcionalidade, regra de três, álgebra, entre outros. No dia da apresentação dos jogos, era perceptível a sintonia na interação entre estes grupos culturais distintos, alunos indígenas jogavam com alunos não indígenas.

No entanto, este é o ponto em que se deve focalizar. Havia uma expectativa com relação ao ensino da matemática na aldeia, participar de uma prática condizente com o programa Etnomatemática, mas ao estabelecer o contato, foram emergindo outras coisas. Neste momento, faz-se necessário refletir sobre quais representações, ou pré-representações são concebidas sobre como seja uma escola indígena e neste caso, o que seja a matemática indígena. Este ponto é pertinente dentro da reflexão da proposta que traz a luz uma prática bem próxima de uma prática ocidental. E este aspecto faz sentido quando retomamos todo o processo de colonização destes povos, a pressão das secretarias de educação, que tenta formatar a escola indígena, há sempre um embate. Deste modo, percebe-se que o tempo todo eles têm que mostrar que a sua escola funciona, há uma cobrança por planos de aula, cobrança por conteúdo, etc. E estes fatores influenciaram essa troca de experiências no projeto aldeia e a instituição FAPAM.

Conclusão

Diferentemente do modelo de ensino trabalhado nas escolas brasileiras (não indígenas), a cultura indígena promove o aprendizado de maneira lúdica e significativa, articulando todas as ciências de forma transdisciplinar. Essa linha de trabalho contrapõe-se com o que é abordado usualmente na cultura ocidental e que na maioria das vezes não promove significados ao que é estudado, ou seja, estuda-se o abstrato, deixando-se de lado os conhecimentos advindos das vivências dos alunos.

É notório ressaltar que na contemporaneidade a resistência Pataxó perante às imposições ocidentais continuam presentes, porém, em outra perspectiva, buscam aprimorar seus saberes em universidades a fim de capacitar-se como educadores, valorizando sua cultura.

Refletindo sobre a educação indígena e a importância das ações docentes, nota-se que valores, crenças e atitudes devem ser considerados e repensados numa ótica multicultural. Julga-se importante que estes devem recorrer a vários subsídios que promovam o aprendizado do aluno, valorizando e criando condições que oportunizem situações lúdicas, coerentes com o meio que o aluno se encontra inserido, corroborando com a singularidade e a história de cada um, proporcionando um trabalho capaz de transformar a realidade e formando um cidadão reflexivo, crítico e consciente.

Referências bibliográficas

Cortella, M. (2006). *A escola e o conhecimento: fundamentos epistemológicos e políticos*. São Paulo: Cortez.

D'ambrosio, U. (2005). *Etnomatemática – Elo entre as Tradições e a Modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica.

Freire, P. (2006). *Pedagogia do Oprimido*. São Paulo: Paz e Terra.

LENGUAJES Y MEDIACIONES PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Myrian Luz Ricaldi Echevarria
Universidad Femenina del Sagrado Corazón, Colegio Peruano Británico. (Perú)
myrianluz@hotmail.com

Resumen

La presente propuesta describe y analiza el contexto de uso de materiales didácticos como herramientas culturales mediadoras que favorecen el aprendizaje de la matemática a estudiantes del nivel secundaria (12- 16 años). En ese contexto, se incluyen videos, películas, revistas, podcast, cuentos y hojas de cálculo. En el recorrido de la propuesta, que corresponde a un curso corto expuesto en la RELME 31, se revisarán algunos elementos teóricos sobre materiales educativos, los criterios fundamentados para seleccionar y producir materiales que brinden la oportunidad de generar buenas prácticas de enseñanza. El marco teórico que aporta elementos para el análisis del contenido es la teoría antropológica de lo didáctico de Chevallard.

Palabras clave: materiales educativos, materiales didácticos, educación secundaria

Abstract

This report describes and analyzes the context of use of didactic materials as cultural mediating tools that favour the learning of mathematics of secondary school students (12-16 years). In this context, videos, movies, magazines, podcasts, stories and spreadsheets are included. On the route of the proposal, which corresponds to a short course exhibited at the 31st RELME , some theoretical elements on educational materials will be reviewed, the essential criteria on selecting and producing materials that provide the opportunity to generate good teaching practices. The theoretical framework that provides elements for the analysis of the content is Chevallart's anthropological theory of didactics.

Key words: educational materials, didactical materials, secondary education.

Introducción

En la actualidad, la vida cotidiana se encuentra influenciada por distintos textos (escritos, audiovisuales, multimediales, etc), gran parte de ellos producidos por los medios masivos de comunicación con fines inicialmente no didácticos, pero que, de distinto modo, han ingresado a los espacios educativos. El foco de atención del presente escrito es ofrecer planteamientos para profundizar sobre el sentido y fundamento de uso de materiales didácticos y educativos para el aprendizaje de la matemática. Para ello, expondremos algunos lineamientos teóricos y ejemplos de uso de materiales didácticos y educativos aplicables a estudiantes de nivel secundaria (12- 16 años).

Planteamiento del problema

En contextos de aprendizaje se reconoce la influencia de elementos mediadores, entendidos éstos como objetos o artefactos culturales que permiten la transmisión de conocimiento y experiencias a través de diversos lenguajes. A nivel escolar, existen intentos por mostrar alternativas metodológicas para favorecer el aprendizaje de la matemática, nuestro trabajo va en la línea de intenciones metodológicas que buscan apoyar a los estudiantes en la comprensión del significado de las ideas matemáticas y sus aplicaciones en diferentes escenarios. Sin embargo, al mismo tiempo, intentamos explorar alternativas concretas que permitan ir de la comprensión matemática al desarrollo de un sentido social para la formación integral. Por ello, nos planteamos la pregunta ¿cuál es la influencia de los materiales didácticos en la comprensión de los objetos matemáticos para la formación integral? Para responder a este cuestionamiento tenemos en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas como la semiótica, la psicología y la pedagogía, las cuáles han sido punto de referencia para la Didáctica de la Matemática. En un sentido estricto estamos interesados en los procesos de comunicación de producciones que emergen de ámbitos ajenos al educativo para facilitar los procesos de aprendizaje de la matemática. En consonancia con ello, el presente artículo tiene por fin proporcionar a los docentes un marco conceptual que ayude a tomar una postura crítica, constructiva y reflexiva sobre el uso de los materiales educativos en general y didácticos en particular.

Marco teórico

Materiales didácticos

Son textos producidos específicamente para el aprendizaje, es decir, está presente en ellos la intención de enseñar algo a alguien. Sin embargo, los materiales didácticos no son los únicos textos que ingresan en los espacios educativos; los medios masivos de comunicación, por ejemplo, producen una infinidad de textos que ingresan en los contextos de aprendizaje en forma explícita para enriquecer las fuentes de información. A estos materiales los denominamos materiales educativos, los cuáles pueden ser definidos como textos en diversos soportes que se utilizan en las prácticas educativas con el fin de favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, algunos capítulos del programa diálogos con la ciencia de radio Ecca. Se puede precisar que los materiales educativos se incluyen en contextos de aprendizaje para ampliar las fuentes de información, ampliar las actividades, mejorar las formas de presentar los temas que se quieren trabajar y favorecer la comprensión de un tema complejo.

Otros autores como Márquez (2000) definen el medio didáctico como cualquier material elaborado con la intención de facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje, por ejemplo: un libro de texto o el programa Geogebra. Este mismo autor afirma que recurso educativo es cualquier material que, en un contexto educativo determinado, es utilizado con una finalidad didáctica o para facilitar el desarrollo de actividades formativas. En referencia a lo anterior los recursos educativos a utilizar en una situación de enseñanza y aprendizaje pueden ser o no medios didácticos. Ejemplo: Un vídeo para aprender qué son las transformaciones en el plano será un material didáctico (pretende enseñar), en cambio un vídeo con un reportaje sobre el cálculo de probabilidad a pesar de que pueda utilizarse como recurso educativo, no es en sí mismo un material didáctico (sólo pretende informar).

Otro aspecto es el referido al uso del material dentro de una secuencia de acciones que promuevan la reflexión matemática y el aprendizaje, de manera que brinden oportunidades para generar buenas prácticas de aprendizaje. Esto está en concordancia con lo que proponen Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011) cuando afirman que los materiales y recursos permiten al profesor plantear tareas para que los alumnos utilicen los conceptos matemáticos.

Dentro del enfoque de uso de materiales didácticos la propuesta obedece a una perspectiva pragmática del conocimiento matemático, en ese sentido y considerando los aportes de Ullmann (1962) creemos que existen tipos de usos que orientan los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático los cuáles son objetivados mediante el lenguaje y corresponden a situaciones contextuales particulares. De lo anterior se considera que los materiales didácticos son símbolos culturales que emergen de los sistemas de uso en contextos formativos, además, su significado depende de la práctica humana, y se modifican en el tiempo, según las necesidades. En el contexto de los materiales, los ambientes y el aprendizaje partimos de los siguientes supuestos:

- El uso de los materiales se enmarca y cobra sentido en un contexto determinado.
- La interacción con los medios o recursos tiene efectos relevantes en la actuación, el desarrollo y las capacidades de los sujetos. (Perkins 2001).
- Las tecnologías generan modos de aprender y dejan huellas en las mentes de los estudiantes. Según Buckingam (2008) los efectos de la tecnología dependen de los contextos de uso, las motivaciones de sus usuarios y el propósito de su utilización.
- Los materiales pueden proveer información pero son los sujetos los que, con su actividad cognitiva, la convierten en conocimiento.

Si bien asumimos los aportes anteriores como directrices teóricas de nuestra propuesta se quiere superar los límites del conocimiento matemático y transitar hacia el desarrollo de un sentido social para la formación integral que valore las producciones culturales del entorno como potenciales recursos con fines formativos y educativos más allá del aprendizaje de la matemática.

Teoría antropológica de lo didáctico

La Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) surge de los aportes de Chevallard (1985) quien acuña la noción de transposición didáctica, la cual se refiere al cambio del conocimiento matemático a objeto de enseñanza. Esto implica diferencias en el significado de los objetos matemáticos entre la "institución matemática" y "la institución escolar". Como aporte relevante la TAD ofrece un marco de análisis para los materiales didácticos (acciones e interacciones de los procesos para aprender). En este escenario de supuestos teóricos se hace necesario usar un lenguaje y símbolos que faciliten los procesos de comprensión y aprendizaje a nivel escolar, es decir, la transposición disciplinar a contenido para el aprendizaje a través de diversos mediadores. Por ello, es importante evitar los significados sesgados o incorrectos que puedan emerger como resultado del empleo de materiales no creados, inicialmente, para favorecer los procesos de aprendizaje, o cuando éstos no se enmarcan dentro de una propuesta didáctica coherente y bien organizada.

Por otro lado, en referencia al rol del docente en el proceso de transposición didáctica se hace necesario que este tenga un profundo conocimiento de la realidad escolar, de su disciplina y la didáctica vinculada

a su materia. Así lo corroboran Godino, Batanero y Font (2007) quiénes aportan que el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos en juego, y las variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia educativa. En concordancia con el aporte de Chevallard la manipulación de los objetos de aprendizajes emerge como resultado de prácticas sociales en un cierto contexto institucional y la mediación particular de los sujetos. Es así que los procesos de aprendizaje escolar surgen de las prácticas organizadas por el docente donde los materiales didácticos y educativos tienen un rol mediador.

Recursos educativos abiertos (REA) y matemática

Los REA son recursos y materiales educativos gratuitos y disponibles libremente en internet y la World Wide Web (tales como texto, audio, video, herramientas de software, y multimedia, entre otros), que tienen licencias libres para la producción, distribución y uso de la comunidad educativa mundial. Estos recursos son de tres tipos:

- Contenidos educativos: programas educativos, materiales para cursos, objetos de aprendizaje, libros de texto, materiales multimedia, exámenes, compilaciones, publicaciones periódicas, etc.
- Herramientas: software para apoyar la creación, entrega, uso y mejoramiento de contenidos educativos abiertos. Incluye además herramientas y sistemas para crear contenido, registrar y organizar contenido; gestionar el aprendizaje y desarrollar comunidades de aprendizaje en línea.
- Recursos de implementación: licencias de propiedad intelectual de acceso libre, principios de diseño, adaptación y localización de contenido; y materiales o técnicas para apoyar el acceso al conocimiento (López, 2007).

En relación al aporte de los REA para mejorar los procesos de aprendizaje Ricaldi (2014) indica lo siguiente:

- Mejora la práctica educativa, al explorar el uso de recursos diseñados por otros.
- Innova al incorporar cambios en la didáctica de las clases en contextos escolares.
- Diseña nuevos escenarios de aprendizaje usando tecnología.
- Reutiliza materiales diseñados por otros, lo cual ayuda a reducir el tiempo de diseño.

A continuación se detallan algunos recursos seleccionados cuya clasificación se realizó considerando los aportes de Sánchez (2000):

Tabla 1. *Clasificación y selección de algunos REA*

Clasificación de REA	Característica	Recurso para la clase de matemática
Como herramienta de apo al aprender.	Se pueden realizar actividades que fomenten el desarrollo de destrezas	Podcast (triángulo rectángulo, 2:52_):

	cognitivas superiores en los alumnos.	http://www.ivoox.com/dialogos-ciencia-06-triangulo-rectangulo-audios-mp3_rf_1585010_1.html?autoplay=1
Como herramienta.	Potencia las metodologías activas como proyectos, trabajo colaborativo, mapas conceptuales e inteligencias múltiples donde estudiantes y docentes interactúen.	Proyecto: plantación de árboles ¿Cuál es la manera más efectiva de construir un triángulo rectángulo? http://gaussianos.com/cual-es-la-manera-mas-efectiva-de-construir-un-triangulo-equilatero-en-la-practica/
Como extensoras y amplificadoras de la mente.	Expande las potencialidades del procesamiento cognitivo y la memoria, lo cual facilita la construcción de aprendizajes.	Podcast (triángulo propiedades): http://www.ivoox.com/dialogos-ciencia-05-el-triangulo-audios-mp3_rf_1568048_1.html?autoplay=1 (2:18_)
Como medios transparentes o invisibles al usuario.	Que hacen visible el aprender e invisible la tecnología.	Proyecto Gauss (Líneas notables): http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/triangulo01_baricentro/actividad.html Proyecto Gauss (Teorema de Pitágoras) http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/tales_y_pitagoras/pitagoras/actividad.html

Propuesta

El cine en la clase de matemática

Tenemos dos tipos de producciones considerando las habilidades y destrezas que promueven: la primera es el cine de ficción que puede incorporarse en la enseñanza y el aprendizaje para informar y, la segunda el cine documental para estimular la imaginación y promover el disfrute artístico. Las intenciones del docente al seleccionar ambos tipos de producciones pueden, por tanto, coincidir o diferir respecto las

intenciones de los realizadores de la obra. Por otro lado, algunos autores cuestionan las posibilidades didácticas del cine, existen motivos a favor y otros en contra:

A favor: el cine es ventana al mundo, vehículo de cultura, documento de épocas, modos de pensamiento y estilos de vida. Además, conecta ideas y emociones, deslumbra, seduce, convence, informa. Al mismo tiempo, focaliza y profundiza el diálogo.
En contra: toma mucho tiempo, deforma la realidad, el cine confunde, es evasión, y la educación no. A continuación algunos ejemplos de propuestas didácticas:

Tabla 2. *Propuestas didácticas de uso del cine en la clase de matemática*

Madame Curie (Meruyn Le Roy, 1943) NIVEL: enseñanza secundaria y bachillerato.
OBJETIVOS: • Identificar figuras geométricas en el entorno. • Valorar la presencia y aportes de la mujer en la historia de la ciencia. • Fomentar la buena alimentación como condición para un buen desempeño académico.
CUESTIONES: se plantean las siguientes cuestiones mientras se visualiza el video: • En la imagen inicial ¿qué figuras geométricas observas? • ¿Cómo se describe al personaje femenino protagonista de la escena? • Según el contexto de la escena, ¿qué significa "aprender a estar solos con la naturaleza"? • ¿Qué refleja la disposición de la clase, el número y género de los estudiantes? • Describe e intenta conjeturar sobre lo que representa lo escrito en la pizarra. Se proponen algunas actividades extensivas a ser investigadas las cuáles deben ser presentadas en un afiche y socializadas al resto de la clase: • Se mencionan a Newton y Galileo, investiga ¿qué aportes relevantes hicieron para el desarrollo de la matemática? • ¿Qué influencia tiene la buena alimentación en el rendimiento académico? , respalda tu respuesta en evidencias médicas. • Investiga, ¿cuál fue el aporte del personaje principal a la historia de la humanidad? • Analiza cómo se han modificado las ratios entre hombres y mujeres en la Universidad.
Granujas de medio pelo (Woody Allen, 2000) NIVEL: enseñanza primaria y secundaria.

OBJETIVOS:

- Resolver problemas de reparto.
- Valorar la relación entre equidad y justicia.
- Propiciar un acercamiento a las películas desde un enfoque de aprendizaje relacionado a la matemática.

CUESTIONES: se plantean algunas preguntas a manera de motivación al inicio del aprendizaje de las fracciones o situaciones de reparto proporcional:

- Cómo responderías a la pregunta, ¿cómo sabes que 1/3 es mayor que ¼? Demuestra tu respuesta.
- ¿Qué se quiso decir cuando se dijo: "que cobre una parte, pero no una parte entera"? ¿tiene sentido matemático?
- ¿Qué error o errores se comete cuando se afirma que "Tracy cobre 1/3 y los demás ¼ cada uno? Explícalo justificando tu respuesta.
- Para el caso y la situación planteada en el video, ¿qué reparto propondrías tú? ¿por qué?

Se propone una actividad extensiva a ser investigada y compartida en el blog del aula de clase:

- Busca situaciones parecidas que involucren repartos.
- Ubica en el libro el hombre que calculaba la situación referida al reparto de los camellos.
- Investiga ¿cuántos tipos de repartos existen?

NUMB3RS (Tony Scott & Ridley Scott, 2007) – SERIE
NIVEL: 4º de educación secundaria, 1º de Bachillerato.

OBJETIVOS:

- Comprender y aplicar el cálculo de probabilidades y la probabilidad condicional.
- Fomentar el gusto por la matemática a través del tratamiento lúdico y cercano de problemas matemáticos.
- Resolver problemas a partir de situaciones de diverso contexto.
- Fomentar el análisis de situaciones derivadas de juegos más allá del sentido intuitivo.

CUESTIONES:

- ¿Qué significa que las matemáticas demuestran que nuestro instinto no acierta siempre? ¿Qué opinas sobre ello?
- ¿Qué opinas sobre el título de la pizarra: matemáticas para no matemáticos?
- ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra tarjeta? ¿Hay alguna diferencia?

- ¿Cuál es la probabilidad de ganar si cambio a la tarjeta C, teniendo la información adicional de que el coche no está en la B?
- Representa la situación gráficamente.

PARA REFLEXIONAR:

- ¿Crees interesante y formativo introducir situaciones como las propuestas en las aulas de clase?
- ¿Qué opinas sobre la consigna: "hagan juegos como este por su cuenta, preparen algunos ejemplos razonables?
- ¿Crees que en el sistema escolar debe haber grupos diferenciados por niveles? En la educación superior crees pertinente que existan: matemáticas para no matemáticos? Fundamenta tu respuesta.

La fotografía en la clase de matemática

En el campo de la educación matemática se puede abordar la inmersión de la fotografía como objeto cultural que genera posibilidades para la creación, la enseñanza y el aprendizaje. Algunas prácticas para su inmersión en el aula serían analizar la fotografía como práctica social, reconocer, reflexionar y debatir acerca de los usos de la fotografía para el aprendizaje de la matemática, o para evidenciar la presencia de la matemática en imágenes del entorno.

Figura 1. Parábolas en un centro comercial

Figura 2. Matemática en la iglesia

En un contexto visual relacionado con el aprendizaje de la matemática consideramos los siguientes supuestos: el uso de los sentidos para mejorar el aprendizaje, el valor motivacional que presentan los medios icónicos, y su integración en el currículum como contenido por ser parte de la producción cultural de cada momento socio-histórico.

Según Barthes (1995) la lectura de la imagen siempre se realiza desde un determinado marco histórico, cultural e ideológico. De este modo, toda imagen requiere un código lingüístico del cual el lector es portador y es el que permite su interpretación. En el caso del aprendizaje de la matemática los códigos son el lenguaje, los signos, las teorías y las relaciones matemáticas de donde emergen sistemas de prácticas, tipos de tareas y tecnologías que las justifican.

Metodología

El presente reporte se enmarca dentro del enfoque cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2003), debido a que se procuró realizar un aporte hacia la comprensión conceptual de los materiales didácticos y sus usos para favorecer el desarrollo de habilidades matemáticas. El diseño es exploratorio y descriptivo, en el sentido que presenta información teórica sobre el rol mediador a través de distintos lenguajes y formatos de diversos materiales didácticos y educativos para la educación matemática. En el desarrollo de la presente propuesta se partió de los siguientes cuestionamientos: ¿Qué son los materiales didácticos?, ¿qué recursos, qué medios y materiales utiliza habitualmente en sus clases? ¿Cuándo y cómo los integra en su práctica cotidiana? Luego se compartieron algunos materiales con ejemplos prácticos sobre su uso. Posteriormente a manera de reflexión se generó un interesante diálogo sobre las ventajas y desventajas de su uso, alcances y alcances.

Conclusiones

La propuesta de materiales debe responder a objetivos específicos de aprendizaje, más que a una simple moda; ya que el empleo de mediadores simbólicos (lenguaje) y materiales (físicos o digitales) elaborados con fines didácticos o no pueden favorecer el aprendizaje si se encuentran inmersos dentro de propuestas didácticas. En función de los estudios revisados se infiere que las diferentes representaciones de los conceptos matemáticos son fundamentales para su comprensión. En el caso del cine consideramos importante hacer siempre un resumen inicial del fragmento visionado para situar la escena y posteriormente analizar aquellos aspectos matemáticos que presenta. Por otro lado, como futura línea de investigación resultaría relevante el diseño y análisis de secuencias didácticas que analicen el lenguaje empleado y las diferentes representaciones del conocimiento en estudiantes que se forman para desempeñarse en el futuro como profesores.

Referencias bibliográficas

Barthes, R. (1995). El mensaje fotográfico. En *Lo obvio y lo obtuso*. Barcelona: Paidós

Buckingham, D. (2008). *Más allá de la tecnología: aprendizaje infantil en la era de la cultura digital*. Buenos Aires: Manantial

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Penseé Sauvage.

Godino, J.; Batanero, C. y Font, V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Flores, P., Lupiáñez, J., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Hernández, R. Fernández, C. y Baptista, P. (2003). Metodología de la investigación, 3.ed. México D.F.: McGraw-Hill.

López, J. (2007). *Recursos Educativos abiertos (REA)*. Recuperado el 10 de mayo de 2016 de http://www.eduteka.org/OER.php

Marqués, P. (2000). Los medios didácticos. *Los medios didácticos y los recursos educativos*. Recuperado el 10 de mayo de 2016 de http://peremarques.pangea.org/medios.htm

Perkins, J. (2001). Educación a distancia: cuando lo tradicional se torna revolucionario. [en línea]. *Revista Bitácora.* Recuperado el 25 de junio de 2016 de http://tic.sepdf.gob.mx/micrositio/micrositio1/docs/materiales_estudio/u3_l3/Los_medios_didacticos.pdf

Ricaldi, M. (2014). *Impacto de la aplicación de los recursos educativos abiertos en el aprendizaje de temas vinculados al triángulo en estudiantes del nivel de educación secundaria.* Tesis de maestría no publicada, Tecnológico de Monterrey. México.

Sánchez, J. (2000). Aprender con Internet: Mitos y realidades. En J. Sánchez (Ed.) *Actas del V Congreso Iberoamericano de Informática Educativa.* Viña del Mar, Chile.

Ulmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid, España: Aguilar.

DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE ENSEÑANZA EN MATEMÁTICA DE LA EDUCADORA DE PÁRVULOS EN FORMACIÓN INICIAL

Raimundo Olfos, Tatiana Goldrine, Soledad Estrella, Pamela Reyes
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
raimundo.olfos@pucv.cl, tatiana.goldrine@pucv.cl, soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

Con el fin de desarrollar en las futuras educadoras de párvulo conocimientos para una enseñanza que genere en los párvulos oportunidades de aprendizaje en matemáticas, se propone un Sistema de Andamiaje compuesto por contenidos conceptuales y didácticos, estrategias de formación docente –estudios de clases y análisis de video– y un modelo de reflexión sobre la práctica. Los contenidos conceptuales y didácticos favorecen el desarrollo de la dimensión de conocimiento. El estudio de clases y el análisis de videos favorecen el desarrollo de la dimensión práctica. A su vez, el modelo de reflexión promueve la articulación entre conocimiento y práctica. Este escrito describe los hallazgos de la literatura que fundamentan el Sistema de Andamiaje para la formación inicial de educadoras de párvulos, como parte de una investigación en curso.

Palabras Clave: conocimiento pedagógico del contenido, matemáticas, preescolar.

Abstract

In order to develop in the prospective kindergarten female- teachers, the teaching knowledge that could provide young children with opportunities for the learning of mathematics, we propose a Scaffolding System composed of conceptual and didactic contents, teacher training strategies -lesson study and video analysis - and a model of reflection on practice. The conceptual and didactic contents favor the development of knowledge dimension. The study of lessons and the analysis of videos favor the development of the practical dimension. In turn, the reflection model promotes the articulation between knowledge and practice. This paper describes the findings of the research studies that support the Scaffolding System for the initial training of kindergarten teachers, as part of an ongoing investigation.

Key words: pedagogical content knowledge, mathematics, preschool.

Introducción

Los resultados de investigación en Formación Inicial Docente de Educadoras de Párvulos en Educación Matemática (FIDEM) muestra, por una parte, conocimientos insuficientes al egreso de la formación y, por otra parte, bajo desarrollo investigativo en torno a cursos y métodos para la FIDEM. Usamos el género femenino puesto que prevale en el nivel. Las estudiantes de Educación Parvularia egresan con conocimientos y prácticas insuficientes para la enseñanza de la matemática (Esen, Özgeldi y Haser, 2012;

Samuel, Vanegas y Giménez, 2015); y los cursos para las futuras Educadoras no incluyen los contenidos y las metodologías idóneas para enseñar, detectándose una escasez de experiencias prácticas que permita vincular los cursos con prácticas pedagógicas de aula (Parks y Wager, 2015). Así, una insuficiente relación entre la formación teórica y la formación práctica estaría afectando el desempeño de la estudiante al egreso de su formación.

Frente a la insuficiencia de la articulación, los autores están desarrollando una investigación que propone un dispositivo de formación, llamado *Sistema de Andamiaje*, que impacte la articulación entre teoría y práctica, con foco en los conocimientos y prácticas que las futuras educadoras requieren desarrollar para generar oportunidades de aprendizaje en los párvulos. El presente escrito da cuenta de las componentes y dimensiones del Sistema de Andamiaje, enfocándose en la pregunta acerca de ¿qué conocimiento y prácticas poner en juego en el aula de infantil para generar oportunidades de aprendizaje en los párvulos? Este escrito da cuenta a la pregunta.

Antecedentes y fundamentos teóricos

Estudios en distintos países muestran un bajo nivel de logros en la FIDEM y cuestionan la idoneidad de los dispositivos de enseñanza. Esen et al. (2012) encontraron conocimientos insuficientes de conceptos matemáticos en futuras educadoras de Turquía, específicamente, una baja comprensión que podría conducir a la implementación de actividades matemáticas inadecuadas para este nivel. Samuel et al. (2015) reportaron dificultades en futuras docentes españolas para comprender el pensamiento matemático infantil frente a la resolución de tareas matemáticas. En docentes estadounidenses en servicio de infantil, Varol, Farran, Bilbrey, Vorhaus y Hofer (2012) notaron una baja coincidencia entre lo que reportan como importante en el aprendizaje de la matemática y lo observado en sus clases. En Chile, investigaciones evidencian un distanciamiento entre el lenguaje matemático informal y el lenguaje disciplinar, y predominio del conocimiento cotidiano por sobre el didáctico en Educadoras de Párvulos en servicio (Friz, Sanhueza, Sánchez, Samuel y Carrera, 2009).

A nivel nacional, del total de diecinueve Universidades del Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas que dictan la carrera de Educación Parvularia, sólo una de estas carreras cuenta con un total de cinco asignaturas de FIDEM, dos cuentan con cuatro, dos con tres, seis cuentan con dos, cinco cuentan con una asignatura, dos carreras tienen dos cursos integrados y una carrera no tiene ninguna asignatura. A nivel internacional, Falabella y Rojas (2008) revisaron las propuestas curriculares para FIDEM de nueve universidades pertenecientes a seis países (Finlandia, Inglaterra, España, Nueva Zelanda, Australia y Colombia). El estudio mostró que en promedio los cursos de formación específica, en donde se ubican los de didáctica de la matemática, constituyen el 74 % del tiempo curricular. Las mallas muestran entre uno a tres cursos dedicados a la educación matemática infantil, con prevalencia de un curso. De este modo, tanto la revisión nacional como internacional muestran una tendencia a contar con solo uno a dos cursos destinados a la FIDEM. Lo que podría ser insuficiente para que la educadora adquiera una preparación para generar oportunidades de aprendizaje matemático de niños en un rango etario de 0 hasta 6 años.

La investigación en FIDEM y particularmente, sobre cursos y métodos para formar a las Educadoras, muestra un bajo desarrollo. Parks y Wager (2015) desarrollaron un metaanálisis sobre la investigación en FIDEM en los últimos 20 años en Estados Unidos, y encontraron que los cursos que preparan a las

futuras Educadoras no necesariamente incluyen los contenidos, las metodologías y las prácticas pedagógicas apropiadas para la educación matemática para el nivel etario. Junto con ello, reportaron que es escasa la evidencia para establecer con claridad el conocimiento que requieren las educadoras para enseñar matemática. Horm, Hyson y Winton (2013) ya habían advertido que es escasa la preparación de futuras Educadoras en educación matemática. Advierten que pocas investigaciones se refieren a los contenidos y metodologías que los programas debieran incluir; y que faltan experiencias prácticas que permitan ligar los cursos con prácticas pedagógicas de aula.

Estos antecedentes muestran la insuficiente relación entre la formación teórica y la formación práctica como un factor crítico en la FIDEM, que afectaría el desempeño de las estudiantes en sus prácticas en el aula. La investigación en curso sostiene que la débil conexión entre los conocimientos que adquieren las educadoras y sus desempeños en las prácticas profesionales es una de las problemáticas que afecta la eficacia de la FIDEM y que puede ser abordada con un sistema de andamiaje que relacione conocimiento y práctica.

Sistema de Andamiaje

El Sistema de Andamiaje se organiza bajo un Constructo y dispone de un Dispositivo Formativo, estructuras que se precisan a continuación. El constructo se refiere a la Capacidad de Enseñanza de la Matemática (CEM) y está conformado por tres componentes de conocimiento docente: [1] conocimiento del contenido (CC); [2] conocimiento pedagógico del contenido, tanto el referido al pensamiento matemático infantil (CPC-PMI), como el referido a la Enseñanza (CPC-ENS); y [3] creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza en Educación Infantil como un conocimiento. Estos tres componentes se expresan en las dimensiones referidas a un saber conceptual (conocimiento docente) y a un saber hacer (práctica docente), referido a la práctica de enseñanza para la generación de oportunidades de aprendizaje. El dispositivo formativo también consta de tres componentes, (1) los contenidos conceptuales y didácticos para la enseñanza del concepto de número en Educación Parvularia; (2) las estrategias de formación docente Estudio de Clases y Análisis de Video); y (3) un modelo de reflexión sobre la práctica.

La Capacidad de Enseñanza en Matemática de la Educadora

La FIDEM tiene como propósito construir una capacidad de enseñanza en la estudiante que genere en los párvulos oportunidades de aprendizaje en matemática (ODAM). La Educadora genera ODAM al gestionar un ambiente de aprendizaje matemático enriquecido en el aula, mientras pone en juego un conocimiento matemático para la enseñanza que posibilita a los párvulos acceder a:

i) actividades matemáticas basadas en el juego;
ii) recursos manipulativos y representaciones;
iii) resolución de problemas; y
iv) activación de habilidades de pensamiento matemático.

Esta investigación sostiene que una enseñanza de la matemática que presente estas condiciones ofrece a los párvulos el acceso a un currículo de matemática de alta calidad, en el sentido de Samara y Clements (2009). El constructo Capacidad de Enseñanza de la Matemática (CEM), deriva de la conceptualización de Shulman (1987) sobre el conocimiento del profesor. Shulman distingue entre el conocimiento del profesor de un dominio disciplinar y el conocimiento para enseñar ese dominio específico, postulando

un modelo del conocimiento docente con tres componentes: conocimiento del contenido (CC), conocimiento pedagógico (CP) y conocimiento pedagógico del contenido (CPC).

Más de dos décadas de investigaciones han avalado el CC y CPC como factores relevantes del profesor en la efectividad de la enseñanza de la matemática (Estrella, Mena-Lorca y Olfos, 2015; Ma, 1999; Fennema y Franke, 1992; Krauss, Baumert y Blum, 2008). Este modelo ha sido utilizado como referente en estudios que indagan el conocimiento de la Educadora para la enseñanza de la matemática (Goldrine et al., 2015; Lee, 2010; McCray, y Chen, 2012; McCray, 2008; Platas, 2008), aportando sustento conceptual para la utilización de dicho constructo en la FIDEM.

Por otra parte, la conceptualización sobre la naturaleza de las capacidades que requiere desarrollar la Educadora en formación, pone en juego la articulación de los conceptos sobre conocimiento teórico, conocimiento práctico y práctica educativa. La relación entre lo que un profesional conoce teóricamente y lo que hace en la práctica, ha sido objeto de diversas conceptualizaciones que postulan que el conocimiento teórico ejerce influencia sobre el conocimiento práctico y viceversa (Clarà y Mauri, 2010).

A partir de estos antecedentes, este estudio propone el constructo CEM, el cual está conformado por las tres componentes de conocimiento docente señaladas anteriormente y que se expresan en dos dimensiones. Las componentes de conocimiento docente corresponden a: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido para la enseñanza y conocimiento pedagógico del contenido referido al conocimiento docente sobre el pensamiento matemático infantil; y creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza en Educación Infantil. Estas componentes y dimensiones interactúan conformando el conocimiento y la práctica docente, a las que en este estudio, se las une sinérgica y dialécticamente en el constructo CEM. El constructo retoma uno de los últimos trabajos del Grupo *Teachingworks* de la Universidad de Michigan que refiere a la formación del futuro profesor (de preescolar a fin de secundaria) en dos capacidades docentes, *prácticas de alto nivel y contenidos de alto nivel*. En el desempeño del profesor en el aula, el conocimiento pedagógico del contenido se relaciona con prácticas directamente orientadas al aprendizaje del estudiante. A continuación, en la Tabla 1, primera columna presenta la componente, en la segunda la dimensión de saber conceptual, y en la tercera, la de saber hacer práctico.

Tabla 1. *Capacidad de enseñanza de la matemática (elaboración propia)*

Componentes		**Dimensiones**	
		Conocimiento docente	**Práctica docente**
CC		Conceptos matemáticos y representaciones semióticas idóneas para la enseñanza en infantil.	Enseñanza de nociones matemáticas acordes a los niveles de educación parvularia, objetos y representaciones.
CPC	**CPC - PMI**	Conocimiento docente sobre el pensamiento matemático infantil. Etapas en el aprendizaje de nociones matemáticas.	Mediación docente frente a las acciones, estrategias, preguntas y errores de los párvulos

		Conocimiento de errores frecuentes.	
	CPC - ENS	Enfoques de enseñanza de la matemática. Secuencia de tareas matemáticas. Materiales para manipular y representar. Creencias docentes sobre la enseñanza y el aprendizaje infantil	Organización de la enseñanza. Preparación y gestión de oportunidades de aprendizaje. Análisis de materiales para la manipulación y la representación

El Sistema de Andamiaje se focaliza en una CEM para la enseñanza del concepto de número en educación preescolar. Este sistema se insertará dentro de los últimos años del plan de estudios de la carrera de Educación Parvularia. Teniendo presente los propósitos descritos, Cohrssen y Taylor (2016) diseñaron un curso para afectar el conocimiento docente de la matemática temprana, del pensamiento infantil y de escenarios de aprendizaje, es decir, CC, CPC-ENS y CPC-PMI. En el caso de este estudio, la metodología del curso incluirá el estudio de las trayectorias de aprendizaje (Sarama y Clements, 2009), la creación de contextos de juego y la reflexión docente entre pares y con los profesores que vincularán teoría y práctica.

Como se especificaba anteriormente y se observa en Tabla 2, el Sistema de Andamiaje se compone de (1) contenidos conceptuales y didácticos para la enseñanza de la matemática en Educación Parvularia; (2) estrategias de formación docente: estudios de clases y análisis de video; y (3) un modelo de reflexión sobre la práctica.

Tabla 2. *Sistema de Andamiaje para el desarrollo de la Capacidad de Enseñanza de la Matemática (elaboración propia)*

Fases andamiaje		**I Módulo didáctica del número**		**II Práctica profesional**
Componentes		**Conocimiento docente**		**Práctica docente**
CC		Revisión de contenidos sobre iniciación a la lógica y concepto de número (Piaget y Szeminska, 1966). Principios de conteo (Gellman y Gallister, 1978), sistema de numeración decimal. Ordinal. Cardinal. Representación evolución, creación y usos (Bruner, 1971).	⟺ **Reflexión sobre la práctica**	Análisis de videos de educadoras: contextos de enseñanza y generación de oportunidades de aprendizaje
CPC	**CPC-PMI**	Revisión de contenidos sobre trayectorias de aprendizaje. (Sarama y Clements, 2009). Etapas en la simbolización de cantidades. Errores frecuentes en los párvulos.		Estudio de clases, análisis de videos propios

	CPC-ENS	Revisión de contenidos: trayectorias de aprendizaje (Sarama y Clements, 2009), teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 2007), enfoque abierto de resolución de problemas (Isoda y Olfos, 2009), diseño de situaciones, selección de recursos para manipular y representar.		(análisis de: diseño de contextos y generación de oportunidades de aprendizaje)

El Sistema de Andamiaje propuesto considera dos estrategias de formación docente, que la literatura (Bjuland & Mosvold, 2015; Marsh & Mitchell, 2014) señala como herramientas de formación que favorecen la capacidad para reflexionar sobre la práctica: el estudio de clases, Lesson Study, y el análisis de videos de clases. El potencial de estas herramientas está justamente en beneficiar en los futuros docentes los procesos de integración de conocimientos teóricos con experiencias de prácticas de enseñanza a través de la reflexión sobre la práctica.

Conclusiones

Como se ha venido detallando, los contenidos a incluir en el Sistema de Andamiaje para las futuras Educadoras, con respecto al conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, hacen referencia a nociones de construcción del concepto de número, estrategias de enseñanza y pensamiento infantil en la etapa preescolar. Estos contenidos integran los conceptos y habilidades del pensamiento infantil, el patrón de desarrollo que siguen estos conceptos, y las estrategias instruccionales que posibilitan su consecución.

Se espera que el Sistema de Andamiaje propuesto permita a las futuras educadoras apropiarse de las nociones matemáticas a enseñar, de las estrategias metodológicas y de los procesos de construcción de conocimientos matemáticos en los niños. Esto es, saber qué y cómo enseñar en este nivel educativo. Todo ello en un marco que propenda a la comprensión de la progresión del pensamiento matemático y de actividades para implementar ambientes matemáticos enriquecidos, posibilitando mejores y mayores oportunidades de aprendizaje a los párvulos a partir del desarrollo de la capacidad de enseñanza de las educadoras en formación inicial.

Agradecimientos. La investigación presentada ha sido financiada por CONICYT a través del Proyecto FONDECYT N° N°1171076 y por el Proyecto FONDECYT N°11140472.

Referencias bibliográficas

Bjuland, R. & Mosvold, R. (2015). Lesson study in teacher education: Learning from a challenging case. *Teaching and Teacher Education*. 52, 83-90

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bruner, J. (1971). *Toward a Theory of Instruction*. 5ta edición. Cambridge: Harvard University Press.

Clarà M., & Mauri, T. (2010). El conocimiento práctico. Cuatro conceptualizaciones constructivistas de las relaciones entre conocimiento teórico y práctica educativa. *Infancia y Aprendizaje, 33*(2), 131-141.

Cohrssen, C., & Tayler, C. (2016). Early childhood mathematics: A pilot study in preservice teacher education. *Journal of Early Childhood Teacher Education, 37*(1), 25-40.

Esen, Y., Özgeldi, M., & Haser, Ç. (2012). Exploring pre-service early childhood teachers' pedagogical content knowledge for teaching mathematics. En *12th International Congress on Mathematical Education*.

Estrella, S., Olfos, R., & Mena-Lorca, A. (2015). El Conocimiento Pedagógico del Contenido de Estadística en Profesores de Primaria. *Revista Educacao e Pesquisa, 41*(2), 477-493.

Falabella, A., & Rojas, M. T. (2008). Algunas tendencias curriculares en la formación de educadores de párvulos. *Calidad en la educación*, *29*, 160-191.

Fennema, E., & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Publishing.

Friz, M., Sanhueza, S., Sánchez, A., Sámuel, M., & Carrera, C. (2009). Concepciones en la enseñanza de la matemática en educación infantil. *Perfiles Educativos, 31*(125), 62-76.

Gellman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Goldrine, T., Estrella, S. Olfos, R., Cáceres, P., Galdames, X., Hernandez H., & Medina, V. (2015). Conocimiento para la enseñanza del número en futuras educadoras de párvulos: Efecto de un curso de didáctica de la matemática. *Estudios Pedagógicos, 41*(1), 93-109.

Horm, D. M., Hyson, M., & Winton, P. J. (2013). Research on early childhood teacher education: Evidence from three domains and recommendations for moving forward. *Journal of Early Childhood Teacher Education, 34*(1), 95-112.

Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso: EUV.

Krauss, S., Baumert, J., & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *The International Journal on Mathematics Education, 40*(5), 873–892.

Lee, J. (2010). Exploring Kindergarten Teachers' Pedagogical Content. Knowledge of Mathematics IJEC 42, 27–41. DOI 10.1007/s13158-010-0003-9

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' understanding of fundamental mathematics in china and the united states*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Marsh, B. & Mitchell, N. (2014). The role of video in teacher professional development. *An international journal of teachers' professional development*. 18(3). 403-417.

McCray, J., & Chen J. (2012) Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: construct validity of a new teacher interview. *Journal of research in childhood education, 26*, 291–307.

McCray, J. (2008). *Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: relationships to teaching practices and child outcomes*. Tesis doctoral no publicada. Loyola University Chicago, Erikson Institute.

Parks, A., & Wager, A. (2015). What knowledge is shaping teacher preparation in early childhood mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education, 36*(2), 124-141.

Piaget J. y Szeminska A. (1996). *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe.

Platas (2008). *Measuring teachers' knowledge of early mathematical development and their beliefs about mathematics teaching and learning in the preschool classroom.* Tesis Doctoral no publicada. University of California, Berkeley.

Samuel, M., Vanegas, Y., & Giménez, J. (2015). Conocimiento Matemático para la enseñanza en la resolución de problemas geométricos con futuros maestros de educación infantil. En P. Scott y A. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas*. *Volumen 11: Educación Primaria*. (pp. 22-32). México, D.F Comité Interamericano de Educación Matemática.

Sarama, J., & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22.

Varol, F., Farran, D., Bilbrey, C., Vorhaus, E., & Hofer, K. (2012). Professional development for preschool teachers: Evidence for practice. *NHSA Dialog, 15*(1), 122-126.

EL GUIÓN TEATRAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS

Mario Hernández Pérez, Aurora Gallardo Cabello
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)

Resumen

Se presentan dos estudios de caso con estudiantes de primer grado de secundaria pertenecientes a un grupo de 25 alumnos, quienes recibieron enseñanza sobre los números negativos. Se pidió a las alumnas la resolución de tres problemas aditivos, primero a través de expresiones numéricas y luego con un guión teatral. Se escogieron tres respuestas de dos estudiantes. Sus escritos tienen una secuencia lógica aunque no resuelven con negativos. Estos guiones teatrales sugieren la posibilidad de trazar un camino hacia lo formal.

Palabras clave: problemas aditivos, guión teatral, negatividad

Abstract

We show two case studies with first –year secondary school students (from a group of 25), who had studied negative numbers. The students were asked to solve three addition problems, first through numerical expressions and then with a theatre script. Three responses from two students were chosen. Their writings have a logical sequence although they do not solve the problems by using negative numbers. These theatre scripts suggest the possibility of drawing a path towards formal responses.

Key words: additive problems, theatrical script, negativity

Introducción

Nos interesa documentar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas aditivos de Bruno y Martinón (1997), a través del guión teatral, ya que observamos en el estudio de Hernández (2014) a estudiantes de tercer grado de secundaria mostrando resoluciones creativas durante entrevistas. Consideramos que el lenguaje verbal puede contribuir al entendimiento del proceso de resolución de problemas aditivos. Nuestra pregunta de investigación es:

¿Qué procesos cognitivos se muestran en la resolución de problemas aditivos a través de guiones teatrales?

Indagación bibliográfica

Kant (1763) dio una explicación amplia sobre los contextos donde están presenten los opuestos y para ello propone distintos ejemplos. En nuestro trabajo sólo haremos referencia al lenguaje y a la concepción del cero en estudiantes. Respecto al lenguaje verbal Kant señala: "puedo llamar tanto al descender un negativo ascender, como al ascender un negativo descender; e igualmente, tanto son los capitales deudas negativas como las deudas capitales negativos" (Kant, 1763, p. 127). En relación al cero "la supresión de la consecuencia de un fundamento positivo reclama siempre también un fundamento positivo" (Kant, 1763, p. 130), dando lugar al cero, donde las sensaciones opuestas interactúan en el sujeto, a veces predomina una y ocasiona que la contraria disminuya. Es posible recurrir a la idea de potenciales opuestos; por ejemplo, cuando hay dos movimientos con la misma intensidad pero con dirección opuesta, en nuestra mente podríamos hacer que se opongan y se produzca la supresión.

Por otra parte, Almeida y Bruno (2013) en un estudio con futuros profesores de primaria reportan la ausencia de conexión entre representaciones intuitivas y representaciones formales, situación también encontrada con alumnos de primaria y secundaria. Bruno y Martinón (1997) en su Clasificación Semántica y Funcional de Problemas Aditivos exhiben un ejemplo de la Categoría Variación de Variaciones del siguiente modo: "Ayer E perdió. Hoy E perdió 5 menos que ayer. Hoy E ganó 3" (p. 42), donde están presentes expresiones semánticas equivalentes las cuales se pueden expresar sintácticamente. También estos autores señalan que "al introducir números negativos, los conceptos de adición y sustracción quedan unificados: toda suma puede transformarse en una resta y que toda resta se puede transformar en suma" (Bruno y Martinón, 1994, p. 40).

Método

Durante doce sesiones de 50 minutos, en un grupo de primero de secundaria de 25 alumnos, se explicaron distintos contextos sobre los números negativos: el uso de la recta numérica, el lenguaje verbal en expresiones como quitar negativos es lo mismo que aumentar positivos, fichas de colores, etc. En cinco sesiones más, resolvieron ejercicios de sumas y restas con números enteros. Después, se destinaron dos clases para el ensayo y representación de una obra de teatro primeramente, con tema ajeno a las matemáticas. Finalmente, en cuatro sesiones se aplicaron tres problemas (Categorías: Variación de variaciones, Combinación de comparaciones adyacentes y Variación de un estado) con redacción similar a los problemas de Gallardo y Basurto (2009) quienes se basaron en la propuesta de Bruno y Martinón (1997). Los sujetos primero resolvieron con expresiones numéricas y luego con un guión teatral. Se revisaron sus desempeños y se les pidió a varios alumnos que profundizaran en sus explicaciones, por ejemplo, que usaran variedad de representaciones para clarificar sus registros. En este escrito se presentan tres guiones teatrales que las estudiantes E2 y E4 propusieron como respuesta, así como distintas representaciones que complementan los textos creados por ellas. La primera respuesta corresponde a E2, la segunda y tercera son de la estudiante E4.

Resultados

En el análisis de los tres guiones producidos por las estudiantes, presentados a continuación, el investigador ha agregado comentarios entre paréntesis, los cuales son denotados por *I*.

Resolución de un problema de Variación de variaciones

Se presenta el problema con su resolución sintáctica. En seguida el problema es resuelto por la estudiante (E2), primero escribiendo la respuesta (aunque se le pidió una operación ella no la hace, sólo escribe el 5 lo cual representa solamente lo que pasó el martes). Después a través de un guión teatral, aparece la justificación en la recta numérica y otra representación con barras verticales. Finalmente el investigador escribe un análisis del desempeño de la alumna.

Problema

El lunes Daniela perdió $ 3. El martes Daniela perdió $ 5 menos que el lunes. ¿Cuánto ganó o perdió Daniela?

Respuesta deseable

(-3)-(-5)=(+2)

Resolución con un guión teatral
El lunes Daniela perdió $ 3. El martes Daniela perdió $ 5 menos que el lunes. ¿Cuánto ganó o perdió Daniela? R= Gana 5 pesos. *(Respuesta errónea)*.
Se exhibe el desempeño de la estudiante quien ha agregado un narrador y acotaciones entre paréntesis.

Guión.
Narrador: Daniela iba caminando y se encontró a Jorge.
Daniela: Hola, ¿cómo estás?
Jorge: Bien, ¿y tú?
Daniela: Pues la verdad mal.
Jorge: ¿Por qué?
Daniela: Se me perdieron 3 pesos, ¿tú crees?
Jorge: Pues que mal… Bueno, bye
Narrador: Y se marcha Jorge. Al otro día se vuelven a topar.
Jorge: Hola, ¿ya no se te perdieron otros 3 pesos? Ja, ja *(Burlándose)*.
Daniela: Ja, ja, no. Perdí 5 menos que ayer *(Alegre)*.
Jorge: O sea, ¿cómo?
Daniela: Si, o sea, perdí 5 menos que el lunes.
Jorge: *(Dudoso)* Entonces ganaste o perdiste, para más fácil.
Daniela: Ash, ¡focus! *(I: enfócate).* Gané, porque perdí 5 menos que el lunes.

El investigador solicitó nuevamente la resolución con una operación pero la alumna hizo la siguiente justificación:

Tenía:…
Martes: No perdió nada, ganó 5, o sea 5 no perdió, sino aseguró que no perdió. 5.

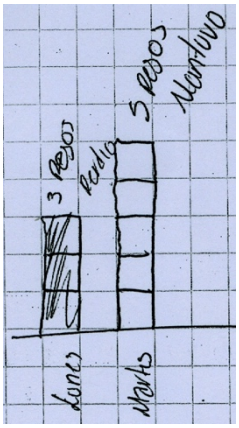


Figura 1. Representación de los opuestos con barras verticales

La estudiante representa a los opuestos con cuadrados (coloreados y no coloreados). En la segunda barra aparece una expresión semántica equivalente a perder menos que es mantener.

La alumna usa una recta numérica que no es exactamente la convencional. Parte del cero para representar con una flecha lo que pasó el lunes y luego se sitúa nuevamente en el cero para representar lo que pasó el martes.

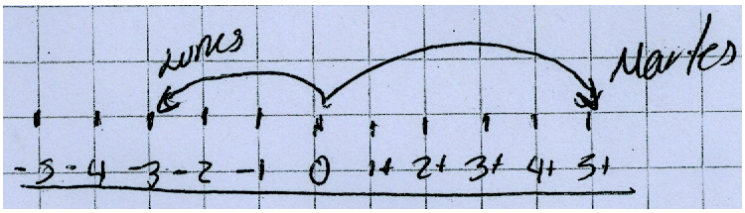


Figura 2. Recta numérica representando a los opuestos.

Comentarios

La alumna muestra expresiones semánticas equivalentes para justificar la resolución del problema: perder menos es ganar, perder menos es mantener. "No perdió nada, ganó 5, o sea 5 no perdió, sino aseguró que no perdió 5" Siguiendo a Kant (1763) podemos afirmar que la palabra mantener es correcta para expresar que perdió menos (porque está implícito que para mantener se puede recurrir a la idea de ganar y perder), y que la palabra ganar es más directa porque es el opuesto de perder.

Kant (1763) advierte que se puede recurrir a la psicología para comprender a las magnitudes negativas. Entendiendo los estados de ánimo, la alumna ha agregado entre paréntesis las palabras: burlándose, alegre y dudoso para explicar sentimientos de los personajes.

En el guión teatral, propone la equivalencia: perder menos es no perder nada o ganar cinco (asegurar cinco), de las cuales, sólo son equivalentes las expresiones perder menos con ganar.

A pesar de que la alumna da señales de comprender conceptos opuestos, no llega a resolver correctamente el problema porque en su registro de la respuesta (escribió R= gana 5), sólo se enfoca en expresar lo que pasó el martes. Aunque en sus procedimientos muestre lo que pasó el lunes no llega a hacer un balance de los dos días. Representa los verbos perder y mantener con torres sombreadas y no sombreadas respectivamente. Además, exhibe en la recta numérica lo referente al lunes con una flecha del cero hacia el negativo tres, y para el martes trazó una recta desde el cero hacia el positivo cinco. No usa una expresión sintáctica con negativos.

Resolución de un problema de Combinación de comparaciones adyacentes

Se presenta la resolución de un problema de Combinación de comparaciones adyacentes por la estudiante E4. Se explica brevemente el modo en que ella usa el lenguaje, las indicaciones que se le dieron durante la actividad y al final se hace un análisis del desempeño.

Problema
Ari tiene 3 canicas menos que Luis. Raúl tiene 7 canicas más que Ari. ¿Cuántas canicas más tiene Raúl que Luis?

Respuesta deseable
(-3)+(+7)=(+4)

El profesor solicitó una resolución con una operación y después a través de un guión teatral. La estudiante E4 introduce una operación en uno de los diálogos. En el texto, ella usa un lenguaje no formal, es decir, cuando los personajes no pronuncian la "s" final en algunas palabras o cuando cambian palabras por otras que casi suenan igual a las formales. También usa los signos ¡! de forma convencional y a veces de otro modo. Los tres nombres de las personas proporcionados en el enunciado son cambiados por otros. Utiliza acotaciones en su escrito. La alumna resuelve correctamente pero no llega a la resolución formal. El investigador sugiere a la estudiante que abunde en sus procedimientos, después de que ha terminado el guión.

Resolución de la alumna con un guión teatral
La escuela en los tiempos actualizados del profe Mario.
(Están platicando 4 chicas sobre que ya no pueden tomar selfies [I: fotografiarse a sí mismas], ni estar en las redes sociales por tanta tarea que deja el profe).

Chica 1: ¡Oigan jovenazas!, vamo' a centrarnos en el problema de mate.
Chica 2: ¡Ay no!, ¡Dio' mio!, con tanto número me da vuelta la cabeza.
Chica 3: Tienes razón, ya con tanto número nos vamos a volver contadoras, ja, ja, ja, ja.
Chica 4: ¡Hay no, de veras con ustedes! *(Se pone la mano en la cara)*. Pero ahora si vamo' a concentrarnos.
Chica 1: Si jovenazas, ya hay que hacer la tareiux *(I: la tarea)*.
Chica 2: Bueno, el problema dice así: Carlos tiene 3 paletas menos que Arturo. David tiene 7 paletas más que Carlos. ¿Cuántas paletas más tiene David que Arturo?
Chica 3: ¡Ay no, pues que codo resultó David ja, ja, ja!
Chica 4: Muchacha, tu siempre tan alegre, deberías ser comediante, ja, ja, ja.
Chica 1: Yo digo que son 4 paletas, mujer¡!

Chica 2: Sí, tienes razón porque a las 7 canicas de David se le restan las 3 canicas de Carlos 7-3=4, para así saber cuántas canicas tiene más David que Arturo. Tenemos que restar, mujercitas.
Chica 3: Aja, si verdad, tan fácil que son las mate, pero preferimos estar en el chisme, ja, ja, ja, ja.
Chicas 4, 2 y 1: Es que está re bueno el chisme, pero ya hay que aplicarnos en mate para que no se nos dificulte mujercitas!!!
Todas las chicas: Si, primero el estudio y luego el chisme.

El investigador pretende profundizar en las explicaciones porque considera que en la operación 7-3=4, no está indicado el papel que juega Carlos en la resolución del problema. Le pide a la alumna que lo represente de otra forma y ella registra una recta numérica con una explicación.

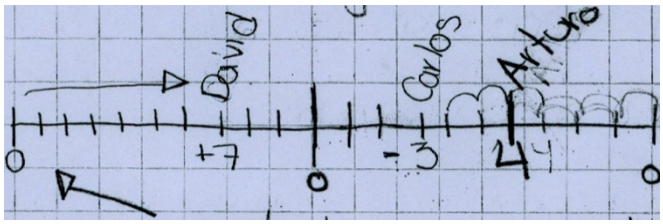


Figura 3. Recta numérica no convencional la cual contiene tres ceros

La alumna escribe: "Se supone que desde aquí (desde el cero que está a la izquierda) empieza la recta y el 7 es, las canicas de David. El 3 de canicas, es de Carlos y empieza el cero en medio. Y las 4 canicas que son de Arturo".

Comentarios

Antes de que el profesor le sugiriera abundar en sus explicaciones, la estudiante no había mostrado algunos indicios del uso de los números opuestos, sólo utilizó positivos (7-3=4). Después de escuchar la petición, ella recurre a la recta numérica pero no representa la situación del problema con una recta convencional, sino que introduce tres ceros, para representar las tres situaciones.

Kant (1763) señala que los opuestos se explican a partir de un mismo sujeto (puede ser persona o un objeto, por ejemplo un barco). Después de analizar el desempeño, podemos afirmar que a la estudiante le hace falta saber que una sola recta podría representar la comparación de los estados de las tres personas. La recta jugaría el papel del sujeto, con lo que el uso de los opuestos en ésta se justificaría de una forma correcta.

Resolución de un problema de Variación de un estado
Se presenta la resolución de un problema por la alumna E4. Para el desarrollo de la actividad se les pidió a los estudiantes que resolvieran primero con una operación y posteriormente a través de un guión teatral. Su respuesta es correcta en el guión, aunque no usa números opuestos. La estudiante E4 registró un esquema y una suma con positivos además, del guión para dar respuesta. El esquema es correcto pero la suma no concuerda con el mismo. Ella hace uso en ocasiones, de un lenguaje no formal, por ejemplo cuando dice charros, pa'rriba, mi'ja, etc. También usa el signo: ! de forma no convencional. En su guión

aparecen dos personajes además de un narrador. Después de presentar las representaciones del sujeto, se hace un comentario final resaltando lo que nos pareció interesante.

Problema
El ascensor de un edificio se encuentra en el piso 2 del sótano, si sube 6 pisos, ¿a qué piso llegaría? El problema es similar al presentado por Gallardo y Basurto (2009), quienes a su vez lo toman de Bruno y Martinón (1997).

Respuesta deseable
(-2)+(+6)=(+4)

Problema
El ascensor de un edificio se encuentra en el piso 2 del sótano, si sube 6 pisos, ¿a qué piso llegaría?
Nota. La respuesta (con una operación) de la alumna no es correcta, sin embargo el esquema sí lo es.

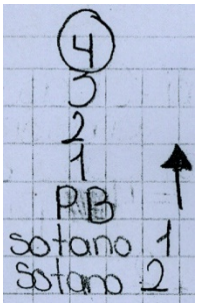


Figura 4. Esquema correcto de la situación presentada en el problema

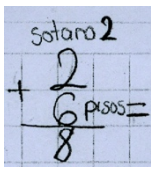


Figura 5. Suma con la situación incorrecta del problema

El sube y baja

Narrador: (Estaban dos chicas platicando sobre el elevador que se traba).
Karla: Charros', esta cosa ya no se mueve y estamos en el 2 del sótano. Voy a llegar tarde a ver el güiri güiri. *(I: La palabra charros es equivalente a ¡rayos!). (I: El güiri güiri es un programa mexicano de humor).*
Perla: Tranquila carnala, ya está subiendo esto pa'rriba, ja ja ja.
Karla: Pero oye!!! Ma'nta, ¿a qué piso vamos a llegar si subimos 6 pisos y estamos en el sótano 2. *(I: la palabra man'ta y mana son equivalentes a camarada).*

Perla: A ver mana. Llegaríamos al cuarto piso porque si subimos 6 pisos y estamos en el sótano 2. Súmale bien mi'ja.
Karla: Charros, si ¿verdad?

La alumna hace un esquema sin números opuestos. Nótese que no hay puntos representando a los números sino que éstos ocupan los espacios de forma continua. Suma el sótano 1 y el sótano 2, más los 6 pisos del esquema (incluidos los dos sótanos) por lo que resulta 8, lo cual no representa de forma correcta la situación del problema. En el guión surge una resolución correcta "Llegaríamos al cuarto piso porque si subimos 6 pisos y estamos en el sótano 2", aunque no usa los números opuestos.

Reflexiones finales

- Interpretando a Kant, la idea del cero en los estudiantes se justifica con la expresión: mantener (no ganó ni perdió), porque la estudiante considera este verbo como lo opuesto de perder.
- Siguiendo a Kant en el contexto de la supresión por oposición, la expresión no perder nada, puede ser la estabilidad, en lugar de ganar como ella sugiere.
- Conforme a las dos reflexiones anteriores, las ideas filosóficas de este autor con respecto a los opuestos, pueden facilitar el análisis de las producciones de los estudiantes.
- Se observa habilidad en las estudiantes para resolver problemas aditivos a través de guiones teatrales, sin embargo hacen falta expresiones sintácticas con negativos que den un sentido correcto a lo dicho en sus textos.

Referencias bibliográficas

Almeida, R. y Bruno. A. (2013). Estrategias de futuros profesores de primaria en la resolución de problemas aditivos con números negativos. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds*), Investigación en Educación Matemática* XVII (pp. 127-136). Bilbao: SEIEM.

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma,* 18, 39-48.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática, 9*(1), 33-46.

Gallardo, A. y Basurto, E. (2009). Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y del presente. *Educación Matemática, 21* (3), 67-94.

Hernández, M. (2014). *De las representaciones intuitivas de la negatividad a la interpretación formal del concepto de entero.* (Tesis de Maestría No Publicada). Cinvestav, Departamento de Matemática Educativa, Unidad Zacatenco, México Distrito Federal.

Kant, I. (1763). Ensayo para introducir las magnitudes negativas en filosofía (Trad. A. Domínguez). En Autor (Ed), *Immanuel Kant: Opúsculos de filosofía natural* (pp. 115-164). Ed. Cast.: Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1992.

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN QUE SE HACEN EVIDENTES AL ESTUDIAR LA INVARIANTE DE CONWAY

Nicol Jenniffer Contreras Vargas, William Alfredo Jiménez Gómez, Adriana Lizeth Vega Carrillo
Universidad Pedagógica Nacional. (Colombia)

Resumen

El seminario de matemáticas de la Especialización en Educación Matemática cohorte 2016-I de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), abordó aspectos referentes a la teoría de nudos, tales como, el invariante de Conway. Además, el curso hizo énfasis en el estudio de las habilidades de visualización que emplea un individuo al desarrollar tareas propias de la actividad matemática, por lo que era de esperarse que surgiera la inquietud de identificar cuáles de estas habilidades empleaban los estudiantes al establecer dicha invariante. Este documento tiene como objetivo presentar los resultados encontrados en dicho análisis y las conclusiones que se establecieron al respecto.

Palabras clave: habilidades de visualización, nudo, polinomio de conway

Abstract

The mathematics course of Math Education Specialization (cohort 2016-I) at the National Teacher Training University from Colombia, tackled some aspects concerning the knots theory, such as Conway's invariant. Moreover, the course highlighted the study of the visualization skills that a person uses when carrying out recurrent tasks of the mathematical activity, from what it was obvious the interest in identifying which of these skills the students used to establish such invariant. The objective of this paper is to show the results found through the analysis and the conclusions set out in this respect.

Key words: visualization abilities, knot, conway polynomial

Introducción

La teoría de nudos tiene su génesis en la física y sus fundamentos en la topología, su desarrollado ha girado en general en torno a tres problemáticas, la primera, el estudio de las representación tridimensional del nudo en relación a otros tipos de representación (gráfica, verbal, simbólica o matricial); la segunda el estudio de la equivalencia entre un nudo y otro y la tercera referente a la clasificación de los nudos.

Un nudo es la abstracción matemática de la noción común que se tiene al respecto bajo algunos cambios, como por ejemplo no usar una cuerda sino un segmento y en vez de dejar los extremos de los segmentos separados, estos se unen para formar un ciclo infinito; algunos ejemplos de nudos se muestran en la figura 1.

Figura 1. Representación gráfica de algunos nudos

La fama obtenida por este este concepto (nudo) en los últimos siglos se debe a su utilidad Cisneros (2011), pues a lo largo de este tiempo la teoría ha ofrecido respuestas en diferentes campos de estudio, entre estos la física y el estudio del ADN; pasando de ser un tópico de las matemáticas, en un campo netamente conceptual, a brindar respuestas y servir de manera específica a diferentes ámbitos científicos como la genética y la física cuántica. Motivo por el cual se determinó trabajar con este concepto el marco del programa de formación de maestros mencionado anteriormente, en el cual se estudiaron algunas de las representaciones de los nudos y a partir de estas, el manejo de ciertas invariantes específicas (polinomio de Jones, de Alexander y de Conway). Además a lo largo del seminario se analizaron los procesos de los estudiantes a la luz de las habilidades de visualización que emplea un individuo al desarrollar cierto tipo de tareas propias de la actividad matemática, por lo que era de esperarse que surgiera la inquietud de identificar cuáles de estas habilidades empleaban los participantes del curso al establecer el polinomio de Conway de un nudo determinado.

Indagación bibliográfica

El marco de referencia de este trabajo está basado en dos aspectos fundamentales, visualización y teoría de nudos, a continuación se realiza un descripción acerca de cada uno de estos.

Visualización: la visualización es un camino para ver lo invisible Arcavi (2003), citado en Souto (2009, p. 19), cuyo uso es la interpretación, manejo y manipulación de conceptos y métodos para la solución de problemas (Souto, 2009). Desde la matemática, según Arcavi (1999), Duval (1999), Carrión (1998), citados en Jiménez, Rojas & Mora (2011, p. 5), la visualización es definida como el conjunto de procesos y habilidades de los sujetos para formar, trazar y manipular imágenes mentales o físicas, usándolas efectivamente para establecer relaciones entre objetos matemáticos. Las habilidades de visualización, se clasifican en psico-fisiológicas e intelectuales. Sin embargo las psico-fisiológicas no son consideradas en el análisis que se presenta en este documento puesto que para evidenciarlas se requiere de la presencia del individuo y el registro se hace complejo, a diferencia de aquellas enmarcadas en el aspecto intelectual que son evidenciables de forma escrita o en trascripciones. De las habilidades tenemos según Gutiérrez (1991):

- *Coordinación motriz de los ojos:* habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos.
- *Conservación de la percepción:* habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma, aunque deje de verse total o parcialmente.
- M*emoria visual:* habilidad para recordar características visuales y de posición, de un conjunto de objetos que estaban a la vista y que ya no se ven, o que se han cambiado de posición.
- *Identificación visual:* habilidad para reconocer una figura que ha sido aislada de su contexto.
- *Reconocimiento de posiciones en el espacio:* habilidad para relacionar la posición de un objeto con el observador o con otro objeto que actúa como punto de referencia.
- *Reconocimiento de relaciones espaciales:* habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.
- *Discriminación visual:* habilidad de comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.

En relación a los procesos se pueden distingir dos categorias asociados a la visualización, Del Grande (1990): *Procesamiento visual* (VP) e *Interpretación de información figurativa* (IFI). Dichos procesos se pueden entender como inversos en algunos casos, pero se deben considerar de forma independiente

- VP: Proceso de cambio de información abstracta en imágenes visuales o de imágenes visuales ya formadas, en otras.

- IFI: Proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales con el objetivo de extraer la información que contienen

En las siguientes líneas se dará un poco más en detalle el concepto nudo.

Teoría de nudos: de acuerdo con Azcurra (2008), desde la perspectiva intuitiva, es un trozo de cuerda que se puede torcer, doblar y manipular a nuestro antojo, para luego unir sus extremos de manera que no sea posible identificar dicha unión; la figura obtenida, representa un nudo que en términos matemáticos se define según Alemañ y Jornet (2011) como una curva continua, simple y cerrada en un espacio tridimensional Euclideo R^3.

Resultados

Con el fin de identificar cuáles de las habilidades de visualización empleaban los participantes del seminario al resolver la tarea, se propuso analizar bajo la perspectiva de la visualización, una situación específica que consistió en determinar el polinomio de Conway de diferentes nudos, a continuación se presentan los resultados encontrados con un nudo específico (figura 2).

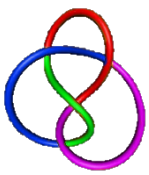


Figura 2. Nudo 1

La idea radica en pasar de la representación gráfica de un nudo a una representación polinómica, para lo cual se debe tener en cuenta la orientación del los cortes del nudo que pueden ser de dos tipos (figura 3).

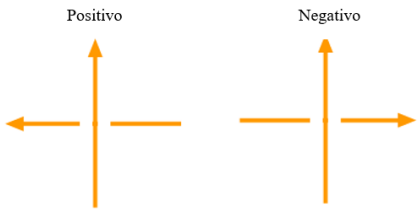


Figura 3. Clasificación de la orientación de cortes

A continuación (figura 4) se observa un nudo cuyo sentido de recorrido a partir del punto A, es en contra de las manecillas del reloj y la orientación de sus cortes se clasifica como positiva.

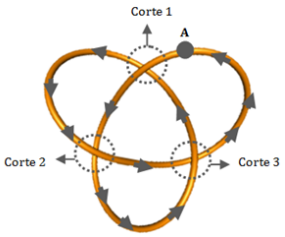
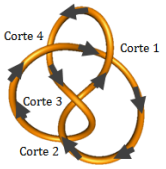
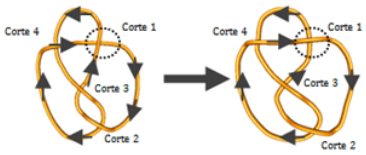
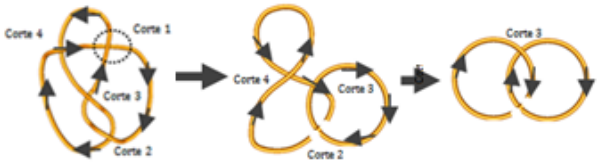
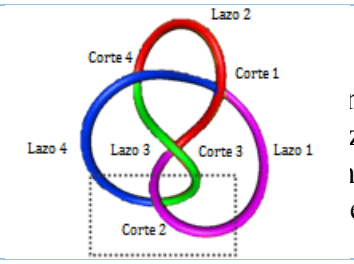
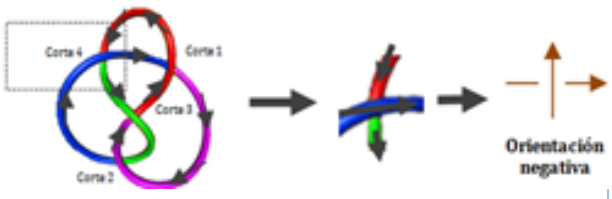


Figura 4. Ejemplo de nudo de tres cortes positivos

Ahora bien, la invariante tiene como objetivo establecer un polinomio que permita determinar la equivalencia entre un nudo y otro. En esta manera, es necesario partir del nudo original y centrar la atención en cada uno de sus cortes (uno a la vez) para aplicar reglas específicas, hasta obtener nudos triviales. Dichas reglas se resumen por un lado en cambiar la orientación del corte y por otro lado modificarlo de tal manera que el corte se rompa y se unan nuevamente las cuerdas, conservando siempre el sentido del recorrido.

Como se mencionó anteriormente, este análisis contempla únicamente las habilidades correspondientes a al aspecto intelectual del individuo, tal como se muestra a continuación (tabla 1).

Tabla 1. *Habilidades de visualización empleadas al determinar el polinomio de Conway del nudo 1*

Habilidad	*Acción que da muestra de la habilidad*	*Ejemplo para el caso del nudo 1*
Reconocimiento de posición	Relacionar la ubicación de un corte con la ubicación de otro al momento de establecer la orientación del nudo y mantener así la continuidad de los mismos.	
Identificación visual	Reconocer el cambio de sentido del corte escogido aislándolo del resto de la representación del nudo.	
	Reconocer visualmente la unión de los lazos cuando se hacen rompimientos.	
Reconocimiento de relaciones espaciales	Relacionar la representación plana de un corte con las características “por encima” ó “por debajo”.	 n el corte 2, el zo 1 está por ıcima del verde el azul
Discriminación visual	Comparar un corte con la imagen que lo relaciona con orientación positiva o negativa.	

Conclusiones

De acuerdo con el trabajo realizado, se evidencia que las habilidades de visualización que están generalmente ligadas a tareas del campo geométrico, trascienden a otras ramas de la matemática, particularmente la topológica que es donde se enmarca el tópico abarcado a lo largo del curso de la EEM.

El trabajo desarrollado en el seminario de matemáticas permite concluir que en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas avanzadas también pueden caracterizarse teorías dirigidas a las matemáticas escolares, específicamente para este caso, las habilidades de visualización.

Referencias bibliográficas

Alemañ, R. Jornet, E. (2011). La fascinante matemática de los nudos. *Revista Números*, *76*, 47 – 54.

Azcurra, P. (2008). *Nudos virtuales e invariantes*. (Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires). Recuperado de http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/azcurra.pdf

Cisneros, J. (2011). *Introduccionon a la teoria de nudos*. V jornadas de física y matemáticas Universidad Autonoma De Ciudad de Juarez. Juarez, 5-7.

Del Grande, J. (1990). Spatial Sense. *Aritmethic Teacher*. *37*(6), 14-20.

Gutiérrez, A. (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial*. Trabajo presentado en 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, Valencia, España.

Jiménez, W., Rojas, S., & Mora, L. (2011). *Características del talento matemático asociadas a la visualización.* Trabajo presentado en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.

Souto, B. (2009). *Visualización en matemáticas un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas.* (Tesis de Maestría, Universidad de Granada). Recuperado de http://www.mat.ucm.es/invesmat/wp-content/uploads/2011/11/trabajo-master-curso-2008-09-blanca-souto.pdf

ELEMENTOS PARA UNA PROPUESTA DE TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE UN CONJUNTO DE FRACTALES GEOMÉTRICOS EN EL NIVEL ESCOLAR

Ximena Gutiérrez Figueroa, Marcela Parraguez González
Universidad de Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
ximenagutierrez@u.uchile.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Este artículo presenta los avances de un estudio que se propone generar un modelo teórico y práctico basándose en elementos provenientes de dos teorías: APOE y TAD, que posibiliten la incorporación de los fractales geométricos como conocimiento de enseñanza en el aula. Dichos objetos se construyen a partir de conexiones con otros conceptos matemáticos, lo que podría favorecer un tratamiento articulado de la enseñanza de la matemática escolar y la activación del pensamiento intuitivo, por su relación directa con aspectos cotidianos naturales, sociales y económicos, dotando a estos objetos de un amplio potencial formativo.

Palabras clave: apoe, tad, estudio epistemológico, fractales geométricos

Abstract

This paper shows the advances of a study that aims to generate a theoretical and practical model based on elements from two theories: APOE and TAD, which enable the incorporation of geometric fractals as useful knowledge to teach in the classroom. These objects are constructed from connections with other mathematical concepts, which could favour an articulated treatment of the teaching of school mathematics and the activation of intuitive thinking, due to its direct relationship with natural, social and economic daily aspects, providing these objects with a wide formative potential.

Key words: apos, atd, epistemological study, geometric fractals

Introducción

El tratamiento desarticulado de la enseñanza de la matemática se ha puesto en evidencia por distintos investigadores desde hace varias décadas. Por ejemplo, lo menciona Klein (1924) cuando alude al tratamiento atomizado de los contenidos que busca la materialización de las áreas particulares de la matemática tratando de prescindir de las herramientas de otras áreas colindantes, la búsqueda de la axiomatización conduce a una concepción lineal de la estructura y construcción del conocimiento matemático.

Guzmán (2007) pone el acento en la necesidad de no abandonar el carácter empírico, manipulativo e intuitivo en la enseñanza de la matemática en los primeros años de escolaridad, dejando su tratamiento

formal para niveles superiores. Lo que se plantea es mostrar un desarrollo de esta disciplina científica más ligado a su evolución histórica y relación con la cultura, haciéndola más cercana e interesante. Aspectos de esta visión también son compartidos por Chevallard (2015), la tradición de mostrar una matemática monumentalista en la que el conocimiento se manifiesta en parcelas específicas a derivado en que los temas tratados puedan ser fácilmente olvidados, la propuesta a destacar el valor de la matemática por su rol en la comprensión del mudo natural y social conlleva un equilibrio entre los paradigmas de las matemáticas puras y el de las aplicadas en pos de aportar a mejores soluciones relacionadas con problemáticas más cercanas al ser humano.

La visión sobre la enseñanza de la matemática anteriormente retratada pone de relieve una problemática vigente durante décadas, desafiando las posturas epistemológicas que sustentan los trabajos de investigación de didactas y docentes avocados al desarrollo de herramientas sustentables para abordar los actuales desafíos educativos.

Estas motivaciones nos llevaron a identificar un conocimiento que conlleva un potencial formativo intrínseco, basado en sus conexiones con aspectos de la vida cotidiana y problemáticas modernas ligadas a otras ciencias. Centramos este estudio en los fractales geométricos como estructuras que permiten comprender procesos estrechamente ligados a la realidad, por favorecer la articulación con otros conocimientos del currículum y promover una re-significación de la matemática escolar. Ya se posee evidencia que avala la premisa de que este conocimiento puede ser reconstruido por estudiantes de nivel escolar secundario (16-18 años) Gutiérrez y Parraguez (2017) presentan un modelo cognitivo-teórico que configuró la base de una secuencia puesta a prueba en el aula recabando elementos conceptuales y procedimentales que emergen en el trabajo de estudiantes que no conocían del tema. Dicha secuencia se sustentó en un estudio epistemológico sobre fractales geométricos que evidenció la naturaleza intrínseca de estas estructuras: su construcción iterativa y su autosimilitud a diversas escalas. Estas características fueron contempladas como base para generar actividades que consideraron elementos geométricos y analíticos, los que fueron puestos a prueba, en el aula.

Los propósitos de la investigación en curso, conllevan dos desafíos esenciales: (1) Disponer evidencia, con sustento teórico, sobre cómo pueden ser construidos los fractales geométricos por estudiantes que no conocen del tema y, (2) Diseñar un constructo epistemológico-didáctico que posibilite la transposición de los fractales geométricos en la sala de clases.

Marco teórico APOE como base del estudio

La Teoría APOE, (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) creada por Dubinsky y desarrollada por otros investigadores (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) está basada en las investigaciones de Piaget (1971) sobre las formas en que un individuo construye y re-construye un conocimiento matemático, proceso que es favorecido por la abstracción reflexiva, mecanismo que favorece la organización de estructuras mentales en esquemas. APOE dispone de un ciclo de investigación propio (Figura 1), el cual se adecúa al trabajo de la Didáctica de la Matemática (DM) como disciplina experimental, proponiendo y poniendo a prueba ciertos modelos predictivos y explicativos sobre el aprendizaje de ciertos tópicos del conocimiento matemático que son propios de la enseñanza. Este ciclo de investigación se inicia con un estudio en profundidad del concepto que interesa investigar, esto junto a la experiencia profesional de quienes hacen el estudio, conlleva al diseño de una Descomposición Genética

(DG), como modelo que permite organizar situaciones de aprendizaje para ser implementadas en el aula. Los datos empíricos son analizados para evaluar la consistencia del modelo y retroalimentar el ciclo adecuando las secuencias de enseñanza o el modelo teórico.

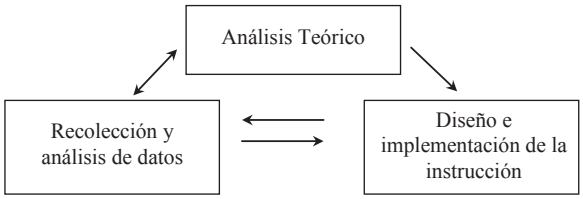


Figura 1. Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al. 1996 por Arnón, et al. 2014, p. 94)

Avances del estudio desde marcos teóricos explícitos: articulación de esquemas

APOE ha permitido disponer de fundamentos para generar un modelo cognitivo-teórico denominado Descomposición Genética (DG), que da cuenta de construcciones y mecanismos mentales por los cuales un estudiante podría avanzar en la estructuración de esquemas cognitivos para el aprendizaje de un conjunto de fractales geométricos. Con base a este modelo se diseñaron dos secuencias de actividades escritas, la secuencia del triángulo de Sierpinski (TS) y su homóloga basada en la curva de Koch (CK), las que fueron desarrolladas por los informantes que conformaron los dos casos de estudio. En este proceso emergen esquemas (E_i) que evocan otros conocimientos, algunos de ellos se sintetizan en la Figura 2.

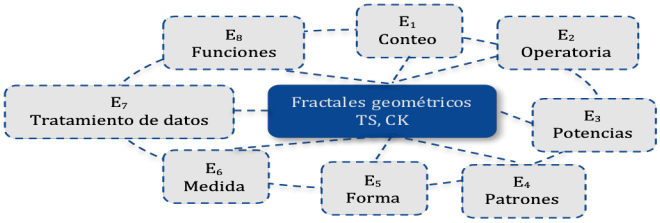
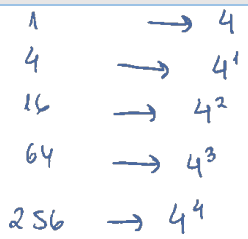
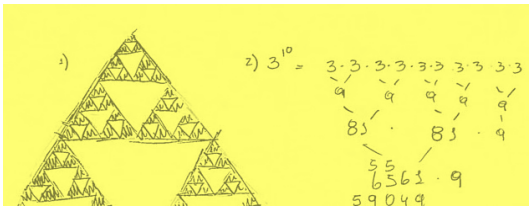


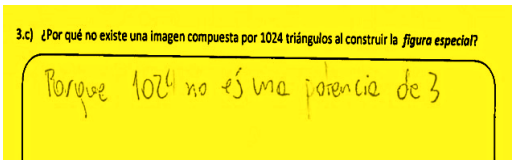
Figura 2. Esquemas emergentes en la construcción de TS y CK

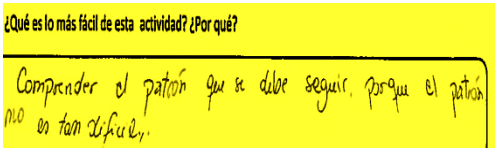
Algunos ejemplos de estas producciones se aprecian en la Tabla 1.

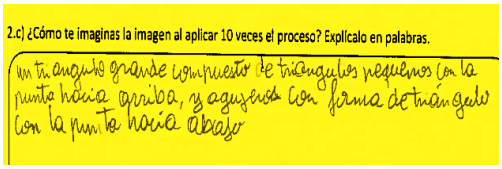
Tabla 1. *Algunos esquemas emergentes en la construcción de fractales geométricos*

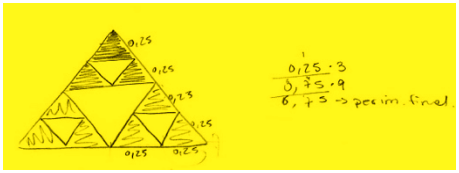
<table>
<tr><th>E1</th><th>E2</th></tr>
<tr><td> 

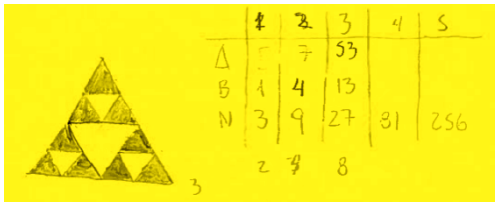
Ante la tarea contar los segmentos que conforman la CK en sus primeras iteraciones, este estudiante activa un conteo basado en las potencias de base 4.</td><td> 

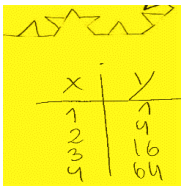
Este estudiante calcula la décima potencia de 10 organizando las cantidades y agrupando factores para determinar la cantidad de partes el TS.</td></tr>
<tr><th>E3</th><th>E4</th></tr>
<tr><td> 

Transcripción respuesta de E3: *Porque 1024 no es una potencia de 3.*
La justificación dada por este estudiante frente a una figura del TS que no es parte del proceso, se basa en sus conocimientos sobre potencias.</td><td> 

Transcripción respuesta de E4: *Comprender el patrón que se debe seguir porque el patrón no es tan difícil.*
Frente a la tarea de dibujar las primeras iteraciones de la CK, un estudiante alude a la dificultad de encontrar el patrón.</td></tr>
<tr><th>E5</th><th>E6</th></tr>
<tr><td> 

Transcripción respuesta de E5: *un triángulo grande compuesto de triángulos pequeños con la punta hacia arriba, y agujeros con forma de triángulo con punta hacia abajo.*
La descripción considera distintas posiciones relativas entre partes de la imagen del TS, que evidencian la construcción del generador.</td><td> 

Este estudiante determina la longitud de la segunda iteración del TS calculando por fases sucesivas el perímetro fractal.</td></tr>
<tr><th>E7</th><th>E8</th></tr>
<tr><td> 

La necesidad de organizar datos para responder a la tarea de contar partes de las primeras iteraciones del TS, activa el registro tabular de datos.</td><td> 

Este estudiante presenta un registro que donde se muestra una dependencia funcional de los datos los que ha rotulado con las variables *x* e *y*.</td></tr>
</table>

La evidencia recopilada a la fecha permite proyectar a un conjunto de fractales geométricos como potencial formativo articulador para una enseñanza más integral de la matemática escolar. Como lo proponen Klein (1924) y Chevallard (2015), una visión más integral contempla conceptos que se articulan entre sí dando respuestas a fenómenos o problemas más globales, evitando una enseñanza que encapsula los conocimientos tratándolos como entes aislados unos de otros. En este sentido, los fractales geométricos no solo integran conceptos, algunos de los cuales fueron presentados en la Figura 2, sino también, pueden ser concebidos como modelos matemáticos de fenómenos que acontecen en la vida cotidiana de las personas.

Las actividades presentadas en la Tabla 1, diseñadas con base en las construcciones mentales presentes en la DG, son parte de un conjunto más amplio y muestran algunas vinculaciones de conceptos siendo una primera aproximación a la construcción de un conjunto de fractales geométricos que pueden ser abordados con el currículum de educación secundaria.
No obstante, se hace necesario disponer de herramientas didácticas que hagan posible que este concepto pueda ser tratado en el aula por el profesorado.

Hacia una articulación de marcos

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), (Chevallard, 2007), propone que en toda actividad humana pueden distinguirse, a) un saber hacer, donde se reconocen cierto tipo de tareas y formas de abordarlas, b) un saber, reconocido a partir de los discursos teóricos, que avalan a los primeros. La praxis y el logos conforma así un modelo definido como praxeología que permite describir los proceso de trasposición del conocimiento y profundizar en la compresión de los fenómenos didácticos. La TAD contempla un modelo epistemológico de referencia (MER) que permite profundizar en los saberes y su evolución en los proceso de transposición, antes de llevarlo al aula (Bosch, García, Gascón y Ruiz, 2006), dando paso a recorridos de estudio e investigación.

Los fractales no son parte del currículum escolar obligatorio, por lo que se propone un uso no habitual de dicho modelo: definir elementos epistemológico-didácticos y antropológicos que permitan diseñar praxeologías que faciliten al profesorado la enseñanza de estos objetos.

De esta forma se configura una articulación de marcos a partir de un eje común, el que se ha definido en este estudio como el *eje epistemológico de base.* Los fundamentos para tal definición están dados en los constructos basales de ambos marcos teóricos presentados en esta comunicación: APOE y TAD se sostienen en mayor o menor medida, en el desarrollo epistemológico del conocimiento, así la aparente disyunción entre premisas cognitivas y antropológicas encuentran una articulación en esta propuesta de investigación.

Esta propuesta de articulación de marcos, pretende responder a uno de los fines de esta investigación: disponer de elementos para que la transposición didáctica sea posible. En este sentido, no basta estudiar solo lo que los estudiantes pueden construir cognitivamente, lo que es abordado desde APOE, sino también, cómo los docentes de aula pueden llevar a cabo tales procesos de enseñanza, considerando un concepto que no es parte del currículum obligatorio. Este problema que se aborda desde la TAD, la que se usa en este estudio como herramienta para construir elementos, que desde este marco se denominan:

tareas y técnicas, que respondan a la praxis, y por otra parte disponer del logos: elementos que sirvan para la interpretación y argumentación de las mismas, denominados elementos tecnológicos y teóricos.

A modo de conclusión y proyección

La Tabla 2 presenta las categorías establecidas para generar el modelo cognitivo que originó la secuencia para TS y CK la que incluye un estudio epistemológico para abordar este propósito. Desde este estudio se pretende configurar un trabajo con docentes de aula con la finalidad de definir algunas praxeologías situadas al contexto nacional con el propósito de desarrollar en conjunto tareas para la enseñanza de lo que denominamos un conjunto de fractales geométricos.

Se contempla un estudio de los programas de formación del profesorado, así como la evolución del currículum escolar nacional a modo de enriquecer el *eje epistemológico de base* que posibilite alcanzar los objetivos propuestos.

Tabla 2. *Categorías para el análisis teórico de los fractales geométricos (APOE)*

Estudio histórico-epistemológico	Usos y aplicaciones recientes en la Matemática y otras ciencias	Usos y aplicaciones recientes en enseñanza y DM
Representantes fractales: *analíticos *geométricos *experimentales Rechazo de sus primeros representantes.	*Procesos deterministas y aleatorios; estudio del caos y dimensión fractal. *Generación computacional de imágenes fractales. *Modelación de órganos humanos, fenómenos de la naturaleza y comportamientos sociales.	*Análisis del currículum escolar. *Tratamiento lúdico de la geometría. *Actividades para la clase. *Aspectos cognitivos. *Obstáculos sobre el infinito

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile (CONICYT), en virtud de la adjudicación de la Beca Folio 21161593.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer-Verlag

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática 18,* (2), 37-74.

Chevallard, Y. (2007). Passé el présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa

y F.J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológicas de lo didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Intellectual and Attitudinal Challenge, 8 july-15july, 2012, COEX, Seul, Korea* (pp. 173-187). doi: 10.1007/978-3-319-12688-3

Gutiérrez, X. y Parraguez, M. (2017). *El triángulo de Sierpinski.* Medellín: Sello editorial de la Universidad de Medellín.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 043*, 19-58.

Klein, F. (1924). *Elementary Mathematics: from an advanced standpoint: aritmetic, algebra, analysis.* New York: Dover.

Piaget, J. (1971). *Genetic epistemology*. New York: W.W. Norton y Company INC.

VISUALIZACIÓN GEOMETRICA EN NIÑOS DE ENSEÑANZA ELEMENTAL

Pamela Valencia
Universidad de Los Lagos. (Chile)
pameval@live.cl

Resumen

Este trabajo tiene como finalidad, describir los procesos de visualización en niños de 4 y 6 años a través del reconocimiento de figuras geométricas planas. Los datos obtenidos se analizaron utilizando la teoría de las aprehensiones de Duval, aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva. Los resultados de la aplicación señalan que la diferencia entre los niños de 4 y 6 años, son las restricciones visuales que aportan las figuras prototípicas encontradas en la pared, lo cual predispone al estudiante de 6 años, a reconocer las figuras similares a las que está siendo expuestos.

Palabras clave: educación elemental, metodología cualitativa, aprehensiones discursiva, operatoria y perceptiva

Abstract

The purpose of this work is to describe the processes of visualization in 4 and 6 year-old children through the recognition of plane geometric shapes. The data obtained were analyzed using Duval's theory of apprehensions; perceptive, operative and discursive apprehension. The results of the application indicate that the difference between 4 and 6 year-old children are the visual restrictions that provide prototypical figures found on the wall, which predisposes the 6 year-old student to recognize the similar shapes that he is being exposed to.

Key words: elementary education, qualitative methodology, perceptive, operative ant discursive apprehension

Introducción y antecedentes

La intuición es parte de la visualización, y se ha indagado esta cuestión desde la psicología educativa (Presmeg, 2006), y cada día más investigadores estudian la visualización, comprendiendo que el estudio de la geometría involucra tres procesos cognitivos: visualización, argumentación y demostración, como lo plantea Duval (1998).

La pobreza en la adquisición de nociones básicas geométricas, como la utilización solo de figuras prototípicas (Tsamir, 2008; Barrantes López & Zapata Esteves, 2008), desarrolla en el estudiante un limitado número de opciones visuales lo que dificulta la creación de una imagen propia de la figura geométrica, por lo tanto, el estudio de la geometría involucra varios tipos de procesos por lo que su estudio se hace más complicado que otras materias (González, 2015).

Gal y Linchevski (2010), alude a la pobreza en la adquisición de las nociones básicas geométricas, y considera que la aprehensión operativa a que alude Duval (1998) es fundamental para alcanzar un trabajo exitoso en la demostración. La visualización deberá entonces crear imágenes ligadas al discurso, y por lo tanto la representación mental deberá corresponder con las características propuestas.

Los errores más comunes que se producen en geometría son producto de definiciones poco claras, y del escaso uso del error, para enriquecer la enseñanza aprendizaje (González, 2015) por lo tanto, la importancia de estudiar e investigar los niveles iniciales de la educación, para entender cómo se enseña geometría y se fundamentan las definiciones iniciales y la creación de las primeras imágenes mentales en los niños, para así evitar los obstáculos y errores que la pobreza de imágenes puede ocasionar (Barrantes & Zapata, 2008).

Para describir los tres procesos fundamente que describe Duval, desde la percepción visual con respecto a las figuras geométricas planas, se investigó cómo se desarrolla la visualización en etapas iniciales de educación elemental, y cómo se puede alcanzar desde la aprehensión perceptiva, las aprehensiones discursiva y operatoria. Se analizaron las respuestas obtenidas por los niños, identificando las aprehensiones alcanzadas e intentando encontrar algunos indicios de como la visualización perceptiva, afecta la creación de la aprehensión operatoria y discursiva.

Marco Teórico

La geometría según Duval (1998) involucra tres clases de procesos cognitivos: visualización, construcción y razonamiento. Para este trabajo, se profundizarán en el proceso de visualización de figuras planas. En particular, el cuadrado, el rectángulo y triángulo en niños de 4 y 6 años.

Para que un objeto sea reconocido por un sujeto, éste deberá no sólo *mirar* el objeto sino que deberá también representar al objeto. A esta identificación configural visual del objeto como un todo, Duval (1998) lo denomina Gestalt, y de sus leyes de organización perceptiva depende la identificación de objetos reales o matemáticos.

El autor señala que para representar un objeto matemático, una figura debe cumplir dos condiciones:

- Ser una configuración, una mezcla de varias gestalts constitutivas, en el caso de un cuadrado, mostrarlo de varias formas, tamaños y rotaciones, formando la condición visual.
- Estar ancladas a un enunciado que fija algunas propiedades, como el cuadrado, sería una figura cerrada de cuatro lados iguales, esta ancla discursiva daría en el futuro acceso a la demostración y a una primera diferenciación entre dos aprehensiones de una figura:
- Aprehensión perceptiva, visual
- Aprehensión discursiva, con un cambio de anclaje: visual-discursiva o discursiva-visual.

Finalmente la visualización en geometría para este autor implica necesariamente al menos uno de los tres cambios acerca de lo que se ve:

- Cambio dimensional: aprehensión perceptiva. Es la identificación de una configuración, no necesariamente ligada al discurso matemático, puede ser intuitiva.
- Cambio figural: aprehensión operatoria. La aprehensión operatoria se produce cuando el alumno lleva a cabo alguna modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Este cambio puede ser de dos tipos: Aprehensión operativa de cambio figural y la Aprehensión operativa de reconfiguración.
- Cambio de anclaje: aprehensión discursiva. Configuración visual unida al discurso, o el discurso unido a una figura.

Marco Metodológico

Esta investigación se enmarca dentro del paradigma cualitativo, y los grupos escogidos para está fueron un pre-kinder y un primero básico de 38 alumnos cada uno.

El instrumento era una cartilla de cartulina de 20x15 cm^2 que contenía 14 figuras geométricas, 4 cuadrados, 3 triángulos, 3 rectángulos, 2 rombo, 1 trapecio, 1 paralelogramo, todas las figuras en diferentes colores, tamaños y rotaciones, figura 1.

***Figura** 7:* Cartilla utilizada por los alumnos.

En pre-kinder se entregaron dos cartillas por grupo, compuesto de 4 y 3 niños cada uno, siendo esta su distribución habitual en la sala.

En primero básico se entregó una cartilla a cada pareja de niños, siguiendo el orden de la distribución en la sala, y se observó trabajar a 8 niños de forma individual.

Tarea

Objetivo: Observar la visualización adquirida por los niños en el reconocimiento de figuras geométricas planas, considerando distintos tamaños y rotaciones.

1. Cada cartilla en pre-kinder contenía 4 cuadrados de diferentes colores, tamaños y rotaciones, lo mismo con los 3 triángulos y los 3 rectángulos.
La actividad consistió en identificar y pegar la figura que el profesor mostró, iniciando con el cuadrado, el rectángulo y los triángulos.
2. Cada cartilla en primero básico contenía 14 figuras, 4 cuadrados, 3 triángulos, 3 rectángulos, 2 rombos, 1 trapecio, 1 paralelogramo, todas las figuras en diferentes colores, tamaños y rotaciones.

Análisis
Datos y análisis pre-kinder (alumnos de 4 años)
Para el pre-kinder, por grupo debían identificar 8 cuadrados, 6 triángulos y 6 rectángulos, como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. *Resultados obtenidos en pre-kinder*

Figuras	Grupos
Cuadrado	7 grupos, encontraron todos los cuadrados. 2 grupos, encontraron 5 cuadrados 1 no aplica
Rectángulo	4 grupos, encontraron todos los rectángulos 3 grupos, encontraron 4 rectángulos 2 grupos, encontraron 2 rectángulos 1 grupo, no aplica
Triángulo	6 grupo, encontraron todos los triángulos 1 grupo, encontró 4 triángulos 2 grupos, encontraron 3 triángulos 1 grupo, encontró 2 triángulos 1 grupo, no aplica

Fuente: Elaboración propia.

Analizando los datos obtenidos en pre-kinder, los niños reconocieron las diferentes figuras, independientes del tamaño, color o rotación. No se incluyeron distractores en la aplicación del pre-kinder.

Las figuras no encontradas por los niños, siempre se refería a las rotaciones en 45° grados en el caso del cuadrado, y los niños al reubicar sus figuras en la hoja en blanco siempre las situaban de tal forma que estuvieran apoyados en una base.

Los triángulos equiláteros o similares, fueron reconocidos por todos los niños, pero el escaleno y el rectángulo fueron más difíciles de asociar con el triángulo, pues según lo observado, se utiliza con mayor frecuencia el triángulo equilátero como el prototipo de esta figura (Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008), y no se asocia con ninguna propiedad de la misma.

En toda la aplicación se les mostró a los niños la figura que debían encontrar, y luego que colocaban las figuras en la hoja blanca, se les retiraba dicha hoja, y se les entregaba una nueva hoja en blanco, y continuaban con la siguiente figura, empezando con el cuadrado, luego el rectángulo y finalmente el triángulo, no recibieron ningún tipo de ayuda, los niños debían escuchar la instrucción, y observar la figura que mostraba el profesor.

Con respecto a las aprehensiones (Duval, 1998), solo alcanzan la aprehensión perceptiva, es decir un cambio dimensional en la figura, pues la reconocen, independiente del tamaño, color o rotación, sin embargo, la aprehensión discursiva no se identifica, puesto que durante la realización de la tarea, al solicitar verbalmente que encontraran cuadrados, los niños no asociaban ese nombre con una figura en particular, en cambio cuando mostraba la figura ellos podían identificarla de las otras figuras.

Para la aprehensión operatoria, en su forma elemental, se podría observar si se ha desarrollo, por ejemplo identificando cualquier triángulo.
Los grupos que no aplican fueron aquellos que mezclaron todas las figuras, sin atender a la instrucción recibida.

Resultados y análisis primero básico (alumnos de 6 años)

Para primero básico los resultados se agrupan en la tabla 2, se ordenan en 18 grupos, incluyendo los niños que realizaron la actividad de forma independiente, pues no hay cambios significativos en sus respuestas.

Tabla 2. *Resultados obtenidos en primero básico*

Figuras	Grupos
Cuadrados	13 grupos, encontraron los 4 cuadrados 5 grupos, encontraron 3 cuadrados
Rectángulos	14 grupos, encontraron los 3 rectángulos 2 grupos, encontraron 2 rectángulos 2 grupos, no aplican
Triángulos	9 grupos, encontraron 3 triángulos 4 grupos, encontraron 2 triángulos 4 grupos, encontraron 1 triángulo 1 grupo, no aplica

Fuente: Elaboración propia

Para primero básico en los resultados obtenidos, los niños reconocen las diferentes figuras, independientes del tamaño, color o rotación, aprehensión perceptiva. Sin embargo, los distractores también fueron elegidos por ellos, 2 grupos incluyeron al paralelogramo y al trapecio dentro del grupo de los rectángulos, esos grupos están identificados como no aplican.

Al igual que en pre-kinder, las figuras no encontradas por los niños, siempre se refería a las rotaciones en 45° grados en el caso del cuadrado, y los niños al reubicar sus figuras en la hoja en blanco las agrupaban de distintas formas, buscando formar alguna otra forma, una cara por ejemplo con los tres rectángulos, o agrupar los triángulos tocando uno de los vértices, y los demás los situaban buscando siempre que estuvieran apoyados en una base.

Los triángulos fueron las figuras que presentaron un mayor desafío para los alumnos, debido a que como sus formas no necesariamente son iguales para ellos, se convierten en otra figura, por lo tanto no se asocia cualquier figura de tres lados con un triángulo, sino solo los equiláteros o similares, pero el escaleno y el rectángulo fueron más difíciles de asociar con el triángulo, se observa que este obstáculo se puede generar debido a que en la sala de clases estaban en la pared figuras prototípicas (Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008), y entre estas un triángulo equilátero, lo que hace que los alumnos solo visualicen al triángulo como esa figura y se empobrece su visualización.

Al igual que en el pre-kinder, se les mostró a los niños la figura que debían encontrar, cuando solo se entregaba una descripción discursiva los niños no identificaban a ninguna figura geométrica, y solo cuando la observaban podían visualizarla y reconocerla de entre las otras figuras, para luego colocarlas en la hoja blanca, que luego se les retiraba, y continuaban con la siguiente figura, empezando con el cuadrado, luego el rectángulo y finalmente el triángulo, no recibieron ningún tipo de ayuda, los niños debían escuchar la instrucción y hacer lo que se les solicitaba.

Con respecto a las aprehensiones (Duval, 1998), al igual que el pre-kinder solo alcanzan la aprehensión perceptiva, es decir un cambio dimensional en la figura, pues la reconocen, independiente del tamaño, color o rotación, sin embargo, cuando se utiliza el discurso para relacionar a las figuras, ellos no la reconoce, esto muestra ausencia de al aprehensión discursiva, y para la aprehensión operatoria, que con esta actividad no se puede deducir.

Sin embargo con las actividades correctas, se pueden promover la aprehensión operatoria y la aprehensión discursiva, siendo esta última la más fácil de alcanzar en un nivel inicial, asociando al menos el número de lados con las figuras, además como existe la unidad de medición, se podrían interceptar, y comenzar a deducir una definición simple, considerando solo la longitud de los lados, para que el niño diferencia el cuadrado del rectángulo, pero también reconozca que pertenecen a la misma familia de cuadriláteros, y los cursos siguientes ir profundizando dicha definición, y se podría trabajar el cambio de anclaje con los niños, y obtener configuraciones más complejas de los objetos estudiados.

Conclusiones

Los niños de 4 y 6 van desarrollando la visualización cuando son expuestos a tareas con las cuales ellos puedan identificar las figuras geométricas planas, cuadrado, rectángulo y triángulo, de un grupo de figuras

en distintos colores y rotaciones y empiezan a asociar el nombre de la figura con lo que perciben como ella.

Con respecto a las aprehensiones, solo se observa la aprehensión perceptiva, desde un cambio dimensional, es decir, al rotar la figura, y cambiarla de tamaño, los niños la siguen reconociendo, por ende es necesario, en estos niveles iniciales, considerando la unidad de medición, relacionar estas figuras con algunas características o propiedades, llegando a alcanzar inicialmente la aprehensión discursiva, con cambio de anclaje.

Considerando los objetivos propuestos, este trabajo proporciona las herramientas iniciales para continuar en la investigación de los niveles iniciales y con propuestas didácticas, más complejas y de intervención directa en el aula, y no solo de observación y levantamiento de información, también se observa la necesidad de un constante desarrollo profesional que subsane las debilidades aquí encontradas.

Referencias bibliográficas

Barrantes, M., & Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geometricas. *Campo Abierto, 271*, 55 - 71.

Duval, R. (1998). Geometry fron a congnitive point of view. (C. Mammana, & V. Villani, Edits.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, 37-51.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). Ver o no ver: análisis de las dificultades en geometría desde la perspectiva de la percepción visual. *Educational Studies in Mathematics.*, 163 - 183.

González, A. (2015). *Errores y dificultades más comunes en el aprendizaje de cuadriláteros: una muestra con alumnos de 9/12 años en Cantabria.* Tesis de maestría no publicada. Universidad de Cantabria. España.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning an teaching mathematics. In A. Gutiérrez& P. Boero (Eds). *Handbook of research on the psychology of mathematics: Past, present, and future*, 205–236. Rotterdam: Sense Publishers.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexample: the caso of triangles. *Educ Stud Math*, 69, 81 - 95.

EL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Karla Esther Pérez Colan de Bardales
Universidad de Lima. (Perú)
karla.pcb@hotmail.com

Resumen

Tradicionalmente, el contenido de un objeto matemático y luego, su aplicación en la resolución de un problema; es un proceso que mantiene dicho orden secuencial en el aula; sin embargo en el caso de la metodología del aprendizaje basado en problemas (ABP) el proceso se aborda de manera inversa. Este taller permitirá a los docentes vivenciar el uso de dicha metodología a través de actividades cooperativas; los cuales organizados en equipos de trabajo buscarán la solución de un problema geométrico contextualizado. Cómo producto final del taller los equipos de trabajo elaborarán un problema tipo ABP.

Palabras clave: metodología, enseñanza, abp, equipos de trabajo.

Abstract

Traditionally, the content of a mathematical object and then, its applications in the solution of a problem; is a process that keeps this sequential order in the classroom; however, in the problem-based learning (PBL) methodology, the process is addressed in a reversed way. This workshop will allow teachers to put into practice the use of this methodology through cooperative activities. The teachers, organized in working teams, will search the solution of a contextualized geometric problem. As the teamwork final outcome, they will elaborate a PBL- type problem.

Key words: methodology, teaching, pbl, work team.

Introducción

Dentro de un proceso de enseñanza y aprendizaje se espera establecer un ambiente metodológico adecuado que promueva el autoaprendizaje, como lo indican Hamed, Rivero y Del Pozo (2016), al señalar: "Para analizar la metodología de enseñanza, las actividades constituyen el elemento central, puesto que describen lo que ocurre en el aula."(p.478). Este taller busca proporcionar a los docentes una alternativa metodológica, denominada Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), la cual está centrada en el estudiante y le da al docente el rol de facilitador; considerando que invierte el proceso de la metodología tradicional o convencional, por ello permite al estudiante desarrollar habilidades de autoaprendizaje, fomenta el trabajo en equipo, entre otras. Este taller permitirá a los docentes vivenciar el uso de dicha metodología a través de actividades cooperativas; ellos organizados en equipos de trabajo buscarán la solución de un problema geométrico contextualizado. Como producto final del taller los equipos de trabajo elaborarán un problema tipo ABP.

Objetivo general

Los docentes elaborarán en grupos de trabajo un problema tipo ABP relacionado con un contenido matemático de su interés y lo expondrán al final del taller.

Objetivos específicos

Los docentes resolverán un problema tipo ABP durante el desarrollo del taller.
Los docentes utilizarán la metodología del ABP en un ambiente de trabajo cooperativo.

Marco Teórico

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es una metodología de enseñanza que se sostiene en el trabajo cooperativo. Su fundamento teórico es el constructivismo (Savery y Duffy ,1996). Esta metodología fue desarrollada en el campo de la enseñanza de la medicina en el año 1992 en la escuela médica Thomas Jefferson de Filadelfia. Aunque su uso se ha extendido en diferentes campos educativos, aún existe una indisposición por algunos docentes para utilizarla como alternativa metodológica, debido a que, como lo indican Duch, Groh y Allen (2006) "Renunciar a la seguridad y autoridad del podio puede resultar incómodo para los docentes acostumbrados solamente al formato pedagógico tradicional del dictado de clases." (p.22). Aún con eso podemos considerar a la metodología del ABP como una alternativa oportuna ya que es una metodología activa que tiene como principal actor al estudiante y más allá de centrarse en contenidos se centra en el desarrollo del pensamiento crítico en el mismo proceso de enseñanza y aprendizaje, lo cual también busca la educación matemática, aunque el ABP no lo incorpora como algo adicional sino que es parte del mismo proceso de interacción para aprender.

Metodología

El taller está dirigido a un grupo de a lo más 20 docentes de nivel universitario de los diferentes cursos de matemáticas, que trabajarán en equipos de 4 o 5 personas en dos etapas del taller, de 30 minutos cada una. Desde el inicio del taller los docentes vivenciarán la metodología del ABP a través de la aplicación de un juego geométrico denominado Tangram, formado por siete piezas poligonales con las que se pueden formar figuras sin superponerlas. Luego de vivenciar el proceso del ABP, los docentes observarán su sistematización para elaborar en equipo- y como producto final del taller - una propuesta del uso de la metodología para desarrollar algún contenido de un curso de matemática.

El desarrollo de las actividades y su análisis.

Al establecer los diferentes momentos para el desarrollo del taller, en sintonía con Duch, Groh y Allen (2006) consideramos que:

> Las actividades en una clase de ABP deben ser desafiantes y reflejar las metas del curso. Para lograr comprometer a los alumnos en una labor cooperativa, y también para generar algo más que una comprensión superficial, las actividades deben ir más allá y ser más complejas que los típicos ejercicios de recapitulación. (p. 154)

Con lo anterior, presentamos el desarrollo de los momentos y actividades del taller.

PRIMERA SESIÓN (90 min.)			
MOMENTO	*ACTIVIDAD*	*MATERIALES*	*TIEMPO*
Inicio	El docente pregunta a los participantes ¿Qué entienden por metodología de enseñanza?, luego éstos opinan y formulan sus conceptos y apreciaciones.	PPT	5 min.
Desarrollo	Los participantes se organizan en grupos de 4 o 5. Reciben un problema geométrico contextualizado y buscan resolverlo. El docente mediante una lluvia de ideas invita a los participantes a identificar las necesidades de conocimiento. Luego de ello, los participantes reciben información relacionada, la cual deberán revisar y priorizar. Los participantes resolverán el problema y/o identificarán uno nuevo. Se socializarán los resultados. El docente compartirá con los participantes la sistematización del proceso vivido a través de una clase expositiva y mostrará la metodología del ABP. Los participantes buscarán en equipos de trabajo información referente a un contenido matemático, el cual traerán a la próxima sesión con la finalidad de elaborar un problema tipo ABP.	Problema geométrico contextualizado. Hoja de colores y plumones. PPT, documento en PDF y Word. Papelote, tijeras, plumones y regla. PPT PPT	5 min. 5min. 10min. 30min. 30min. 5min

SEGUNDA SESIÓN (90 min.)			
MOMENTO	*ACTIVIDAD*	*MATERIALES*	*TIEMPO*
Aplicación	Los participantes reunidos en grupos de trabajo revisarán la información adquirida sobre el contenido matemático elegido y formularán un problema tipo ABP.	Libros, documen -tos (PDF, Word, etc.). Bibliografía digital.	50 min.

Evaluación	Los participantes expondrán sus problemas en clase y socializarán la experiencia en la elaboración del mismo. Desarrollo de Autoevaluación e Interevaluación.	PPT, papelotes, plumones. Hojas impresas.	30 min. 10min.

Conclusiones

Con este taller los docentes podrán vivenciar una metodología dinámica, una herramienta metodológica alternativa para su trabajo en el aula; es retadora tanto para ellos como para los estudiantes. El objetivo es que los estudiantes desarrollen habilidades de autoaprendizaje y de trabajo cooperativo. Ya que el taller se ha realizado en instituciones educativas de nivel superior (Rayego, Sanz y García, 2007) con resultados favorables, su desarrollo en este foro de seguro permitirá evidenciar el logro de los objetivos trazados.

Referencias bibliográficas

Duch, B., Groh, S. y Allen, D. (2006) *El poder del aprendizaje basado en problemas*. *Una guía práctica para la enseñanza universitaria*. Lima. Fondo editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Hamed, S., Rivero, A. y Del Pozo, R. (2016) El cambio en las concepciones de los futuros maestros sobre la metodología de enseñanza en un programa formativo. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 13* (2), 476-492.

Rayego, P., Sanz, B. y García, C. (2007). *Un ensayo de la ABP en la enseñanza de las matemáticas.* Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). España.

Savery, J. R., y Duffy, T. M. (1996). *Aprendizaje Basado en Problemas: Un modelo instruccional y su marco constructivista.* Recuperado de http://www. casagrande.edu.ec/download/biblioteca/aprendizaje-ydiseño-de-clases/APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS.pdf.

SISTEMA DE EVALUACIÓN CONTINUA: ESTUDIO DEL IMPACTO ORIGINADO POR LAS MODIFICACIONES IMPLEMENTADAS EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I EN FACULTAD DE INGENIERÍA

Claudia Mónica Borré Eguía
Universidad Nacional de Salta (UNSa)-Consejo de Investigación de UNSa (CIUNSa). (Argentina)

Resumen

Los ingresantes a la Facultad de Ingeniería de la UNSa constituyen un grupo heterogéneo en nivel educativo. Presentan serias dificultades y déficits de conocimientos inherentes al Nivel Medio. La Universidad proporciona un curso de ingreso, sin examen eliminatorio, que resulta insuficiente para su nivelación. La matrícula aumenta en forma sostenida a través de los años, y los recursos disponibles no lo hacen en consonancia.
Ante esta problemática, se buscan estrategias más eficientes para moderar las dificultades del alumnado con la modalidad promocional vigente en las carreras. Esta búsqueda constante contribuye a la formación de los docentes de la Cátedra. Acorde a ello, se implementaron modificaciones en el sistema de evaluación, tanto cualitativas como cuantitativas, cuyo impacto se busca determinar y analizar.

Palabras clave: matemática, enseñanza, sistema evaluación, promocional.

Abstract

The newcomers to the faculty of engineering constitute a heterogeneous group regarding education levels. They show serious difficulties and knowledge gaps inherent to the middle school. The university provides an introductory course without a qualifying exam which is inadequate to level all the newcomers. The number of enrolled students constantly grows through the years, yet the resources available do not grow accordingly. In the face of this issue, we look for more efficient strategies to mitigate students' difficulties with the promotional modality of the degree courses. This constant search contributes to the improvement of professors' skills, in the chair. So, we implemented both qualitative and quantitative adjustments in the evaluation system, whose impact we try to determine and analyse.

Key words: mathematics, teaching, evaluation system, promotional.

Introducción

Los ingresantes a la Facultad de Ingeniería de la UNSa constituyen un grupo diverso, por las notorias diferencias en su educación según su procedencia; zonas rurales o ciudades, escuelas públicas o privadas,

etc. Presentan serios problemas en el aprendizaje, entre ellos: falta de conocimientos y habilidades matemáticas, manejo del lenguaje, deficiencia en la comprensión de textos y capacidad para resolver problemas, y otras inherentes al Nivel Medio, además de los propios a la adaptación al sistema de estudio universitario. La Universidad brinda a los estudiantes un curso de ingreso sin examen eliminatorio, de acuerdo al Estatuto de la misma, que resulta insuficiente para los requerimientos de las primeras materias de cursado. Estas falencias se traducen en el alumnado en deserción, desgranamiento, alta tasa de recursado, desmotivación, etc.- Los alumnos de grado pertenecen a las carreras de Ingeniería Civil (IC), Industrial (II), Química (IQ), y desde 2014, Electromecánica (IE).

El régimen promocional cuatrimestral, establecido por Resolución en 2005, está vigente en todas las carreras de la Facultad en forma exclusiva: no existe la figura de alumno regular, con examen final. En Argentina, no se conocen otras facultades nacionales que tengan el sistema promocional en forma excluyente; a lo sumo, coexisten la modalidad promocional con la regular tradicional, o hay examen de ingreso eliminatorio, y/o una materia de Introducción a la Matemática (Facultades de Ingeniería en Universidad Nacional de La Plata, Universidad Nacional del Litoral, UBA, Universidad Nacional de Córdoba). Por todo ello, no es posible, encontrar referentes comparables para cotejar experiencias.

La matrícula aumenta en forma sostenida a través de los años (Tabla 1), y los recursos disponibles no lo hacen en consonancia: se trabaja con comisiones numerosas e infraestructura inadecuada, tanto edilicia como docente; esto obliga al cuerpo de profesores a rever consistentemente las estrategias de enseñanza y evaluación, lo que resulta en una mejora continuada de su propia gestión docente.

Tabla 1: *cohortes en la Facultad de Ingeniería por año*

AÑO	INSCRIPTOS	RECURSANTES	TOTAL
2012	1307	227	1534
2013	868	289	1157
2014	1780	286	2066
2015	1712	379	2091
2016	1803	484	2287

Ante la problemática planteada, se modificó el Reglamento Interno de la materia en 2015, y en 2016 se impuso la modalidad de selección múltiple para ET.

Desarrollo

Los sistemas de evaluación y sus instrumentos constituyen un tema de debate continuo, de acuerdo a las corrientes pedagógicas vigentes, países, culturas, etc. (Camilloni,1998; Díaz Barriga,1990; Pozo,1997). En 2005 la Facultad de Ingeniería adoptó el sistema promocional, lo que permitiría propender hacia un sistema de evaluación continua. Sin embargo, cualquiera sea la forma de éste, resulta evidente que no es estrictamente aplicable en grupos muy grandes pues se caracteriza por ser sumamente personalizado. Cabe recordar que “Según la prueba PISA 2012, el promedio mundial de los adolescentes con nivel bajo en

matemática fue apenas 23,1%, mientras que en Argentina, dos de cada tres adolescentes se ubican en este nivel." (Guadagni, 2014).

Aunque se procura el constructivismo, en realidad, el sistema de evaluación actual se asienta en el modelo psicométrico, basado en las teorías conductistas. R. Tyler (1973) desarrolló el primer modelo sistemático de evaluación educacional, relacionando estrechamente objetivos y evaluación, donde tales objetivos describen conductas o reacciones observables en el sujeto, susceptibles de ser medidas a través de la evaluación. Aunque idealmente la evaluación regularía y retroalimentaría el proceso, en la práctica se transforma en la culminación del proceso de enseñanza y aprendizaje; se privilegia la función de acreditación frente a la de aprendizaje. El tiempo del docente está dedicado en gran parte a tareas de corrección, y las "horas-aula", a las evaluaciones, en detrimento de la enseñanza misma. (Borré,2004).

Factores sociales, económicos y culturales contribuyeron a elevar sustancialmente el tamaño de las cohortes, sin que crecieran proporcionalmente los recursos docentes, edilicios y otros, que permitan sustentar tal sistema. Resultan así actualmente, comisiones que a principios de cuatrimestre exceden los 180 alumnos por docente, con aulas de capacidad limitada. Ante la solución de compromiso que implica cumplir con tales premisas, sin bajar el rendimiento académico, se implementaron sucesivamente cambios en las estrategias de enseñanza y aprendizaje y en las herramientas de evaluación, una de las cuales se presenta en este trabajo. El mismo forma parte del Proyecto de investigación del CIUNSa Nº2382, y da continuidad a dos publicaciones anteriores: Borré (2015) y Borré, Berejnoi, Ornass y Tapia (2016).

Objetivos e indicadores

Se propone aquí contrastar el efecto de las modificaciones introducidas en las principales herramientas de evaluación que impone el sistema promocional: Evaluaciones por Temas (ET) y Parciales (P). En general, los contenidos evaluados en cada parcial se corresponden con dos ET. Como algunas modificaciones han sido graduales, se toman como referencia los datos correspondientes a 2012 y 2016.

El trabajo se basa en el estudio comparativo, tanto cuantitativo como cualitativo, de los registros para cada ET, para determinar los ejercicios que presentan mayor dificultad y trabajar sobre ellos; luego, correlacionar con los resultados de P, primero para los alumnos promovidos; tal comparación se realiza para el mismo cuatrimestre, ya que en el segundo, por ser todos recursantes, los rendimientos son tradicionalmente mejores.

Para la etapa normal de cursado, como indicadores de impacto, se estudiarán la cantidad relativa de alumnos promovidos, y los rendimientos promedio por sobre el nivel exigido.

Sistema de evaluación y reglamento

La aprobación de parciales o su recuperación, que se obtiene con 40/100 puntos, es eliminatoria. En todas las materias, la nota final (NF) surge de un promedio ponderado, acorde a cada Reglamento Interno; se promueve con 70/100, que se traduce mediante una tabla a una calificación final en base 10. Cada materia, tiene una etapa normal de cursado, donde se imparten los contenidos, y otra de recuperación.

Las materias de 1er año se dictan en ambos cuatrimestres de cada año. Como tal, Análisis Matemático I (AMI) se dicta con una carga horaria de 10 horas semanales, 5 de teórico-práctica y 5 de práctica.

Para el mismo Programa Analítico, las condiciones necesarias para la promoción son: 100% de trabajos prácticos aprobados y 80% de asistencia mínima a clases prácticas.

Respecto a la forma de evaluar el promedio ponderado, se modificó: básicamente, se redujo de seis (6) a cuatro (4) la cantidad de evaluaciones por temas (ET), y se abolió la aprobación de parciales (P) evaluados por bloques, donde además de 40 puntos mínimos para el parcial o su respectiva recuperación, se exigía mínimamente el 60% del puntaje de cada bloque de contenido (dos o tres bloques según el parcial). La cantidad de parciales se mantuvo (tres), donde el primero corresponde a temas del curso introductorio; los restantes son de tipo mixto, incluyendo problemas de desarrollo, respuesta abierta, completitud, etc.

En los períodos analizados, se modificó también la modalidad de las ET: desarrollo vs. selección múltiple, de menor duración; esta última modalidad se empleó también en el 1er parcial. Con ello se logró mejorar el manejo de la gran masa de estudiantes, a la vez que se disminuyó el tiempo destinado a las ET, ya que se desarrollan durante las clases prácticas, y por lo tanto, a expensas de horas de enseñanza.

NF se calcula según:

$$NF = NF_0 + 0.15TV$$
$$NF_0 = 0{,}60P + 0{,}25\overline{ET}$$
$$P = 0.20P_1 + 0.40(P_2 + P_3)$$
$$\overline{ET} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} ET_i$$

Donde:

P: promedio ponderado de las notas de los tres parciales (P_i) o sus correspondientes recuperatorios, que contribuyen en un 60%,

$\overline{ET}$*:* promedio de las evaluaciones por temas ET_i, donde *n* se redujo de 6 a 4, que contribuye en un 25%, y

TV: tareas varias, que involucra presentación de trabajos prácticos en tiempo y forma, asistencia por sobre el mínimo exigido, etc., y que lo hace en un 15%.

Los contenidos evaluados en ET varían ligeramente, como puede verse en Tabla 2, al reducirse su cantidad, quedando así algunos temas para ser evaluados directamente en los parciales.

Tabla 2: *Contenidos evaluados en cada ET, 2012 (izquierda) y 2016 (derecha)*

ET N°	TP N°	TEMAS
1	2,3, 4	Coordenadas polares. Conjuntos de puntos. Límite. Continuidad de una función y asíntotas.
2	5, 6	Derivadas. Aplicaciones de la derivada (recta tangente y normal a una curva, regla de L´Hôpital, diferencial).
3	7,8	Estudio de funciones. Problemas de extremos.
4	9,1	Integral indefinida.
5	11,12	Integral definida. Ecuaciones diferenciales.
6	13	Sucesiones y series numéricas. Series de potencia. Series de Taylor y McLaurin.

ET N°	TP N°	TEMAS
1	2,3	Límite. Continuidad de una función y asíntotas.
2	4,5	Derivadas. Aplicaciones de la derivada (recta tangente y normal a una curva, regla de L´Hôpital, diferencial).
3	7,8,9	Integral indefinida e Integral definida y Aplicaciones.
4	10,11	Ecuaciones diferenciales. Sucesiones y series.

Resultados

El aumento de la matrícula entre los años comparados, demuestra un aumento considerable de la cantidad de alumnos inscriptos entre 1er y 2do cuatrimestres, respecto a 2012: 49.1% y 72.7%, respectivamente (Fig.1).

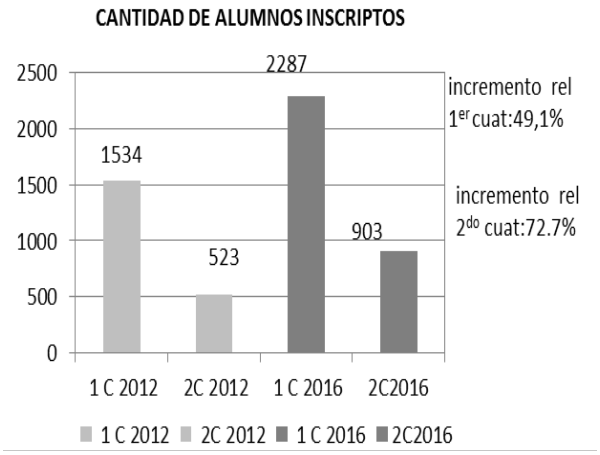


Figura 1: Cantidad de alumnos inscriptos por cuatrimestre

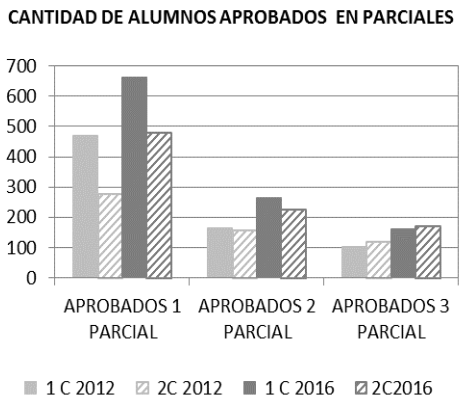


Figura 2: Cantidad de alumnos aprobados por cuatrimestre

Las Figura 2 da cuenta del desgranamiento que se produce a lo largo del cuatrimestre, en parte inherente al mismo sistema, por ser los parciales eliminatorios, a lo que se suman los problemas propios del alumno; por tal razón, se toma como referencia para los rendimientos, la cantidad de alumnos aprobados en el 1er parcial.

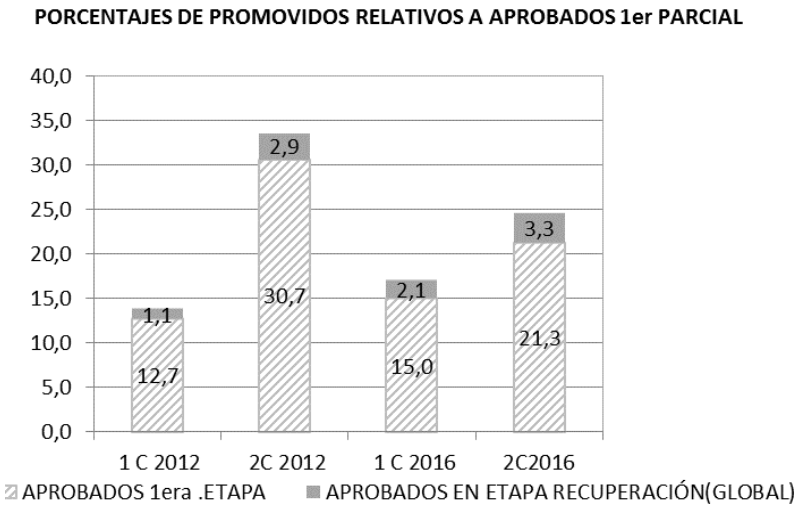


Figura 3: Porcentajes de alumnos promovidos por cuatrimestre

La Figura 3 muestra los valores porcentuales de los alumnos promovidos para cada cuatrimestre comparado, discriminando en ingresantes -pertenecientes a la cohorte de ingreso del año correspondiente- y recursantes. Cabe aclarar que, para el 2do cuatrimestre estrictamente todos los alumnos serían recursantes; en ellos la discriminación realizada corresponde a recursantes de la misma cohorte, o recursantes de cuatrimestres anteriores, ya que no hay límite de cantidad de veces de recursado.

Comparando cuatrimestres homólogos, se observa un aumento del porcentaje de alumnos promovidos en 1º cuatrimestre, de 13.8 a 17.1%, aunque en el 2º estas cantidades disminuyen. Si se analizan los

desempeños de los alumnos promovidos en base a NF, pueden observarse valores bastante similares (Tabla 3).

Tabla 3: *Promedio de alumnos promovidos y excedente porcentual respecto al mínimo*

PROMEDIO DE ALUMNOS PROMOVIDOS, Y PORCENTAJE				
POR SOBRE NF MÍNIMA REQUERIDA (70/100)				
	PROMEDIO GENERAL		% CON NF>=70	
	2012	2016	2012	2016
1º CUATRIMESTRE	75,23	74,7	9,02	8,26
2º CUATRIMESTRE	75,63	75,7	9,62	9,7

Respecto al desempeño en las ET, la Tabla 4 muestra comparativamente los resultados promedio obtenidos por los alumnos promovidos, con uno y otro sistema. Debe destacarse que, para 2016, los resultados individuales presentaron una menor dispersión que para 2012. Asimismo, esta tabla muestra las ET con menores notas: excepto en el primer cuatrimestre de 2016, es la ET2 donde las dificultades de los alumnos fueron mayores, consistentemente con otros cuatrimestres, además de los aquí presentados. Para ambos casos comparados, los contenidos evaluados fueron los mismos: derivada y sus aplicaciones: recta tangente y normal a una función en un punto, cálculo de límites por Regla de L'Hopital y diferencial (ver Tabla 2). Esta identificación permite modificar las estrategias docentes para enfatizar estos temas, tanto en clases teóricas como prácticas, además de la manera de evaluar, lo que impacta en el diseño de este instrumento.

Tabla 4

	1C 2012	2 C 2012	1C 2016	2 C 2016
ET1	36,5	59,9	55,9	60,6
ET2	30,4	46,3	62,1	45,1
ET3	51,8	54,5	66,4	86,1
ET4	52,7	54,9	48,4	62,1
ET5	61,9	59		
ET6	62,1	60,4		
PROMEDIOS	46,0	56,8	58,2	63,5
MENORES	30,4	46,3	48,4	45,1
VALORES	ET2	ET2	ET4	ET2

Analizando, dentro de esta ET, los ejercicios con menores rendimientos son comunes a ambos diseños, y corresponden a la aplicación de diferencial de una función y ejercicios teórico-prácticos.

Reflexiones o conclusiones

Resumiendo, con el nuevo sistema se logró un aumento del porcentaje de alumnos promocionados, manteniendo aproximadamente la calificación (ver Tabla 3), entendida como medida del rendimiento académico. Hubo además un incremento general del rendimiento promedio en ET (ver Tabla 4), con resultados individuales más uniformes, es decir, con menor dispersión; los menores rendimientos se detectan en el tema derivadas y aplicaciones, y en general, en el planteo de problemas, y ejercicios teórico-prácticos o de tipo V/F. La modalidad de selección múltiple incorporada en las ET y el 1er parcial, permitió disminuir el sesgo en las correcciones de ET, dada la diferencia de criterios en la corrección de los docentes, a pesar de la existencia de claves de corrección. La reducción del tiempo de ejecución de las ET mejoró la relación de horas de enseñanza a horas-aula en clases prácticas, y tiempo de corrección de sus docentes. Por último, y no menor, se consiguió una logística más eficiente, que permitió manejar el notable incremento de las cohortes.

Como desventaja, cabe reconocer que en algunos instrumentos no se corrigen procedimientos, o si se los considera, no incide directamente en la calificación. Otra desventaja radica en el tiempo y trabajo que involucra el nuevo diseño de las herramientas de evaluación: que incluyan originalidad, variedad, complejidad e integración teoría-práctica. Se continúa trabajando en estos puntos.

Por otra parte, los nuevos lineamientos de la CONEAU (Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria) para la acreditación de carreras, a implementarse próximamente, relativos a la evaluación por competencias, obligará a una revisión de los Planes de Estudio de cada carrera, y consecuentemente de las materias, que se espera, contribuya a paliar y mejorar esta situación.

Referencias bibliográficas

Borré, C. (2015) Sistema de evaluación continua: Análisis de resultados de las Evaluaciones por Temas en el aprendizaje de Análisis Matemático I en Facultad de Ingeniería. En M. De Paul y Quinteros R.D. (Eds.), *X Jornadas de Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingeniería del NOA, Libro de Resúmenes*, (p. 216). Salta: Editorial Milor.

Borré, C., Berejnoi, C., Ornass, V., Tapia, C. (2016) Sistema de evaluación continua: análisis de modificaciones implementadas en las Evaluaciones por Temas. En C.M. Pérez Ibarra, C.J Izetta Riera, H.R. Tarifa, M.V. Battezzati y N. Coria (Eds.), *XI Jornadas de Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingeniería del NOA*, (pp. 290-296). Jujuy: Universidad Nacional de Jujuy.

Camilloni, A., Celman, S., Litwin, E. y Palou de Mate, M. (1998). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Ed. Paidós. Argentina.

Díaz Barriga, A. (1990). Una polémica en relación al examen. En A. Dìaz Barriga (Ed.) *Curriculum y evaluación escolar*, (pp.31-52). Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Guadagni, A. (2014) *Hay que fortalecer la universidad.* Recuperado el 25 de julio de 2014 de http://www.lanacion.com.ar/1712747-hay-que-fortalecer-la-universidad

Pozo, J. (1997) *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid: Ediciones Morata.

Tyler, R. (1986) *Principios básicos del currículo*. Buenos Aires: Troquel.

Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ingeniería, Argentina. Recuperado el 15 de febrero de 2015 de http://www.fi.uba.ar/

Universidad Nacional del Litoral (UNL), Facultad de ingeniería Química, Argentina. Recuperado el 15 de febrero de 2015 de http://www.fiq.unl.edu.ar/

Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ingeniería, Argentina. Recuperado el 15 de febrero de 2015 de http://www.ing.unlp.edu.ar/

TÉCNICA E TECNICISMO EM NARRATIVAS MATEMÁTICAS PRODUZIDAS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE ATIVIDADES ALGÉBRICAS

Maurílio Valentim, Maria Helena Palma de Oliveira
Prefeitura de Juiz de Fora. (Brasil), Instituto Langage. (Brasil)
valenttinos@yahoo.com.br; mhelenapalma@gmail.com

Resumo

Este estudo buscou identificar e descrever o uso de técnicas e\ou tecnicismo, explícitas ou implícitas na resolução de atividades algébricas por parte dos alunos participantes. A pesquisa foi realizada com 12 alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental II, de uma escola da cidade de Juiz de Fora - MG. Baseado na definição de "texto matemático" elaborado por Smole e Diniz, denominamos as resoluções produzidas por eles como narrativa matemática. Para efeito de análise, consideramos as definições de técnica e tecnicismo as de Gáscon e as de Fiorentini. Ressaltamos a importância da teoria na utilização das técnicas, porém. os resultados mostraram que somente o uso de uma técnica não garante a apropriação do conhecimento pelos alunos, e que a intervenção do professor garantindo que o aluno escreva a explicação sobre o que faz, pode auxiliar a detectar dificuldades e assim proporcionar uma revisão de sua metodologia adequando, se necessário, ao nível de conhecimento dos alunos.

Palavras-chave: técnica; tecnicismo, narrativa matemática; álgebra.

Abstract

This paper is intended to identify and describe the use of explicit or implicit techniques and/or technical terms in the solution of algebraic activities performed by the participant students. The research was carried out with twelve students (6°-9° grade) of elementary school II at a school located in Juiz de Fora city, Minas Gerais(Brazil). Based on the definition of “mathematical text”, elaborated by Smole and Diniz, the solutions they produced can be called ‘mathematical discourse’. For this analysis, we regarded definitions of techniques and technical terms according to Gáscon’s and Fiorentini’s. We highlighted the importance of the theory in the use of techniques, but the results showed that the use of a single technique does not ensure the students’ acquisition of knowledge and that the teacher’s participation, in order to make the student writes and explains about what he does, can contribute to detect the difficulties and thereby to provide the review of their methodology by adapting it, if necessary, to the students’ cognitive level.

Keywords: technical, technicality, mathematical narrative, algebra.

Introdução

Para alguns autores (Smole, Diniz; 2001) um texto matemático é constituído de elementos da Língua Materna e da Matemática, ou seja, trata-se de um enunciado de palavras que exprimem ações expressas em termo como: *decomponha*; *efetue; resolva*; *faça como o exemplo;* e, logo após, são acrescidas de simbologia matemática. O uso de um desses termos que enunciam as atividades, no texto matemático, permite a estruturação da narrativa, tais como: ação, personagem que a realiza, tempo e espaço em que a ação ocorre. Valentim (2015) considera o enredo como a composição de ações consecutivas dentro de uma proposta de continuidade; personagens, como alunos e professores envolvidos e contexto como o cenário em que ocorrem as ações.

Nosso estudo toma como base resoluções de atividades algébricas. Definimos como narrativa matemática toda escrita simbólica ou não, utilizada por 12 alunos dos 6º e 9º anos do Ensino Fundamental (EF) de uma escola municipal da cidade de Juiz de Fora, MG, Brasil, na faixa etária de 13 a 15 anos na realização das atividades propostas.

A escolha dessa faixa etária baseou-se no fato de que, de uma maneira geral, no ensino tradicional da Matemática, no início de etapa escolar, os alunos são apresentados ao uso de representações, na resolução de problemas por meio de letras, apesar de muitos pesquisadores, como Brizuela (2004 e 2006), Lins e Kaput (2004) e Blanton e Kaput (2005), considerarem como possível a introdução ao estudo algébrico em séries anteriores.

Referencial teórico

Para Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2013), a inserção do conteúdo de álgebra tradicionalmente se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal, ou por meio da manipulação da linguagem simbólica. Entretanto, muitos autores defendem a ideia de que o pensamento algébrico deve ser estimulado o quanto antes, sobretudo nos anos da fase I do E.F.

Outro motivo é existência de uma fusão entre os símbolos utilizados na língua materna e no ensino dela e que, de acordo com Caraça (1998), esse pensar algebricamente significa pensar o número sem o numeral. Para Booth (1995), a maioria das dificuldades enfrentadas pelos alunos está nas diferenças encontradas entre as duas disciplinas, a Álgebra e a Aritmética, que de certa forma se completam. Algumas dessas dificuldades foram herdadas da Aritmética. Dentre elas, destacamos o significado dos símbolos e as operações inversas.

O trabalho de Fiorentini (1995) permite deduzir que técnica é a capacidade de utilização de um conjunto de regras e algoritmos com base no entendimento dos fundamentos matemáticos. Consideramos como técnicas o uso de procedimentos que podem ser justificados com embasamentos teóricos.

Nessa perspectiva, a abordagem técnica estaria "[...] exigindo do aluno, ilustrações, construção de modelos matemáticos que descrevem situações-problemas, análises [...]." (Fiorentini, 1995, p. 17).

Em contrapartida, a abordagem tecnicista mecanicista presente nas práticas tradicionais do ensino de Matemática, é capaz de

> [...] reduzir a Matemática a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem preocupação em fundamentá-lo ou justificá-los. Na verdade, esse tecnicismo mecanicista procurará enfatizar o fazer em detrimento de outros aspectos importantes como o compreender, o refletir, o analisar e o justificar/provar. (Fiorentini, 1995, p. 17).

Essa abordagem pedagógica busca reforçar atividades que facilitam a memorização mecânica dos exercícios e ou conceitos matemáticos.

Segundo ele, essa tendência baseia-se somente no desenvolvimento de habilidades que são reforçadas com atividades estimulantes que facilitam a memorização dos exercícios e ou conceitos matemáticos. A principal característica desta pedagogia é estar centrada nas técnicas utilizadas pelos professores. O uso excessivo de regras, truques e a disponibilidade de macetes são ferramentas utilizadas didaticamente. O método *Kumon* e as técnicas de memorização que utilizam músicas, poemas e outros recursos, utilizados pelos cursinhos pré-vestibulares, são exemplos típicos desta tendência na atualidade de ensino.

Gascón (2001) alerta que no início da vida escolar dos alunos a não utilização de técnicas pode provocar uma defasagem no conhecimento, e abrir caminhos para equívocos da parte de educadores ao procurarem ensinar conteúdos matemáticos com base em técnicas elementares, sem contrapartida de um suporte teórico, o que o autor chama de "*tecnicismo*".
Para ele,

> A concepção de ensino tecnicista identifica implicitamente _ensinar e aprender matemática como "ensinar e aprender técnicas (algorítmica) ", em que constitui em outra forma extrema de banalizar o ensino de matemática. Dada a ênfase exclusiva que se impõe sobre as técnicas "simples", o tecnicismo tende a fazer esquecer os problemas "reais" que são aqueles cuja principal dificuldade é escolher técnicas apropriadas para a construção de uma _estratégia de resolução‘. (Gascón, 2001, p. 7, tradução do autor).

De acordo com Libâneo (2005), a prática escolar depende de vários fatores, entre eles, as técnicas de ensino. São elas que fazem a intermediação entre professor/aluno e aluno/aluno.
Ressaltamos a importância da teoria na utilização das técnicas, porém não devemos privilegiá-las atribuindo-lhes valores de conhecimentos definitivos. As técnicas, usadas desta forma, terminam por banalizar as teorias, transformando-as apenas em teoricismo. (Gascón, 2001).

Em tese, podemos afirmar que o reducionismo aplicado nas tendências de ensino acabou transformando a técnica em tecnicismo, que é o uso de técnica sem o suporte de uma teoria, e a teoria em teoricismo, que é o uso da teoria pela teoria, sem respaldo nas práticas.

Pela concepção tecnicista, os especialistas passam a ser o centro das atenções, pelo fato de terem como função criar e testar modelos que funcionam na educação e podem ser aplicados de maneira proveitosa pelos profissionais de ensino.

Considerando o exposto, este estudo buscou identificar e descrever o uso de técnicas e\ou tecnicismo, explícitas ou implícitas por parte dos alunos participantes. Foram solicitadas para a realização das

atividades da pesquisa, informações para as perguntas, tais como: "*Como você explicaria a seu colega como fazer para ...*", "*Justifique sua resposta*.", "*Como você chegou a esse resultado*?".

Método

O método seguiu os parâmetros da pesquisa qualitativa. O material de análise foi recolhido dos diálogos originados por meio da interação entre os alunos (videogravadas) e de registros escritos, entrevistas e questionários e descrito.

Uma das atividades aplicada é apresentada a seguir.

Quadro 1: *Atividade 3 aplicada à turma do 9º ano/turma/a*

Você já conhece a sequência dos números pares que são: 0, 2, 4, 6, 8, 10,... Complete a tabela com os 10 primeiros números pares									
Ordem dos números	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número par	0	2	4	6					

Como você faria para encontrar o vigésimo número par? E o trigésimo? Como você explicaria a seu colega como fazer para encontrar qualquer número par a partir da ordem pedida? Justifique sua resposta. (Questão adaptada, Dante, 2009, p. 14).

Análises e discussões

O quadro a seguir apresenta fragmento do diálogo entre os alunos participantes.

Quadro 2: *Fragmento inicial do diálogo do processo de resolução de atividade 3/turma/a*

PA: *Como você fez?*
MN: *Também quero ajuda.*
TH: *Tudo bem. Vamos lá! Pega o 8, divide ele por 2.*
PA: *Por que por 2?*
TH: *Você vai ver. Divide por 2.*
MN: *Tá!*
TH: *Metade de 8.*
PA: *4.*
TH*: Mais 1.*
MN: *5.*
PA: *Por que mais um?*
TH: *Por quê? Você vai ver.*
TH: *Qual é o número? 8. Primeiro, segundo, terceiro, quarto... .*

Na resolução da atividade os alunos do 9º ano/turma/a conseguiram definir uma regra de formação fornecendo respostas às perguntas sobre a sequência. Uma das integrantes passou a explicar os

procedimentos que usou para a resolução da questão procurando mostrar como se chegava ao resultado da atividade, porém não apresentou as justificativas para suas ações sendo assim consideradas como tecnicismo. Cabe ressaltar que somente o uso de uma técnica não garante a apropriação do conhecimento pelos alunos, e que a intervenção do professor garantindo que o aluno escreva a explicação sobre o que faz, pode auxiliar a detectar supostas dificuldades Mesmo acompanhando o raciocínio da colega TH, a aluna PA não consegue explicar como foi feita a atividade, precisando perguntar à colega.

Quadro 3: *Segunda parte do diáologo do processo de resolução de atividade 3/ turma/a*

TH: *O 2 é o segundo elemento do grupo. Entendeu?* PA: *Mas coloca como aqui?* TH: *Hã! Eu já te expliquei. Agora você faz aí.*

O grupo chega a uma generalização do tipo $\frac{x}{2} + 1$, porém ao responder às demais questões que são *"Como você faria para encontrar o vigésimo número par? E o trigésimo?"*, eles consideram o vigésimo e o trigésimo como números pares e não como posições, ou seja, aplicam os mesmos procedimentos na resolução da atividade.

Quadro 4: *Diálogo da resposta ás perguntas sobre a resolução/ turma/a*

TH: Tá e agora, qual é o vigésimo? *PA: Vigésimo. 40.* *M: Hã!* *TH: A é? Não é a metade, não?* *PA: Péra aí, boiei.* *M: 20.* *TH: PA, não falei que é a metade?.* *PA: 20.* *TH: Qual a metade de 20?. Hum...* *PA: 10.* *TH: Mais 1.* *PA: 11.*

Porém, como analisamos, mesmo não tendo auxílio na resolução da sequência dos números e chegando a um desfecho equivocado relacionado à segunda pergunta, não podemos desconsiderar os procedimentos utilizados pela aluna TH. Esses procedimentos foram elaborados pela participante de acordo com conhecimentos matemáticos retrospectivos; não houve aplicação de um método específico, visto que, para determinar a lei de formação ou regra de formação de uma sequência, podem ser adotadas várias estratégias. O que provocou o erro na segunda pergunta da atividade pode ter sido também uma interpretação errônea de enunciado.

O uso das técnicas é fundamentado em teorias, e os alunos conseguem justificá-la, se necessário, por meio da narrativa matemática explicitadas nas expressões verbais produzidas.

Consideração final

Cabe ao professor provocar, facilitando a elaboração mental por parte do aluno, pois esta construção servirá de instrumento para analisar mais profundamente se o aluno fez uso da técnica ou do tecnicismo. É por meio da narrativa matemática que o professor pode identificar se as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as atividades propostas estão sendo aplicadas de acordo com o conhecimento produzido.

Referências bibliográficas

Blanton, M. L.; Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.36, n.5, p. 412-443.

Booth, L. R. (1995); Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: Coxford, A.; Shulte, A. (Org.). *As idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

Brizuela, B.; Schliemnn, A. (2004); Ten-year-old Students Solving Linear Equations. *For the Learning Mathematics*, v.24, n. 2, p. 33-40.

Brizuela, M. B. (2006). *Desenvolvimento Matemático na Criança - Explorando Notações.* Porto Alegre: Artmed editora.

Caraça, B. J. (1998). (2005). *Conceitos fundamentais da Matemática*. 2. ed. Portugal: Gradiva.

Dante, L. R. (2009). *Tudo é matemática*. (3a ed). São Paulo: Ática.

Libâneo, J.C. Educação Escolar: políticas, estrutura e organização. São Paulo: Cortez.

Lins, R. C.; Kaput, J. (2004). The early development of algebraic thinking. In: K. Stacey & H. Chick. (Org.). *The future of the teaching and learning of algebra.* Dordrecht: Kluwer, p. 47-70.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. Campinas: *Zetetiké*. v. 3, n. 4, p. 1-38.

Fiorentini, D.; Fernandes, F. & Cristóvão, E.M. (2013). *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Acesso em: 20 de maio 2013. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc.>.

Gascón, J. (2001). Incidência del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. RELME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa***,** ISSN: 1665-2436, Vol. 4, nº 2, p.129-160.

Smole, K e Diniz, M. I. (orgs.) (2001). *Ler e escrever e resolver problemas***:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed.

Valentim, M. A. (2015). *Pensamento narrativo na aprendizagem matemática*: estudo com alunos de ensino fundamental na resolução de atividade de álgebra. Tese Doutorado em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, Brasil.

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDACTICAS PARA PROMOVER LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

Daniel Rubal Valencia, Guadalupe Villaseñor Gándara
Universidad de Sonora. (México)
daniel.ruvalencia@gmail.com, gviga@mat.uson.mx

Resumen

En este trabajo se presentan avances de la propuesta de diseño de una Secuencia de Actividades Didácticas, cuyo propósito es promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria en estudiantes de nivel superior. Partimos de la problemática detectada en algunas investigaciones respecto a la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales, la cual está basada en promover un aprendizaje memorístico de definiciones y procedimientos matemáticos. Fundamentamos nuestro trabajo con la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) y la Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS).

Palabras Clave: educación matemática realista, derivada de una función, contextos reales, registros de representación semiótica

Abstract

This paper shows a preview on the design proposal of a sequence of didactic activities, which is aimed at fostering the construction of the notion of ordinary differential equation in higher education students. We start from the problem detected in some investigations, regarding the teaching of Differential Equations, which is focused on promoting a rote learning of mathematical definitions and procedures. We base our work on the theory of Realistic Mathematics Education (RME) and the Theory of Semiotic Representations (TSR).

Key words: realistic mathematics education, derivative of a function, realistic contexts, register of semiotic representation

Introducción

El área de Ecuaciones Diferenciales cuenta con muy pocas investigaciones desde el punto de vista de la Educación (Rasmussen, 2016). En particular, uno de los aspectos que se destaca en este trabajo, es la importancia que tiene la enseñanza y el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en el nivel superior. Así como el uso de la tecnología, pues como menciona Perdomo (2011) el usar herramientas tecnológicas en las EDO, facilita el proceso de aprendizaje del estudiante.

En específico, nuestro interés está centrado en abonar a una de las problemáticas detectadas en la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, relacionada con la memorización de definiciones y procedimientos matemáticos. Referido a esto, Perdomo (2011) menciona que el enfoque de enseñanza habitual en el que se introduce el concepto de EDO a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución suponen un aprendizaje que no perdura en el tiempo si este no se refuerza con razonamientos que produzcan dichos métodos. Además, Nápoles (2003) menciona que, en la enseñanza de las EDO, los conceptos que rodean al tema son evadidos o disfrazados con una fórmula o algoritmo, lo que no permite su comprensión, y hace creer a los estudiantes y en ocasiones a los profesores, que la fórmula es el concepto mismo.

Asimismo, se menciona el problema que existe por parte de los estudiantes de poder relacionar una ecuación diferencial ordinaria con la derivada de una función. Con respecto a esto, Perdomo (2011) menciona que gran parte de los estudiantes muestran dificultades para poder establecer una conexión entre estos dos conceptos.

A partir de ello, el objetivo de nuestro trabajo es diseñar una secuencia de actividades didácticas para promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria de forma integrada con la noción de derivada. La secuencia se aplicará a estudiantes de ingeniería y estará basada en la resolución de problemas, la cual, a su vez será mediada con el uso de tecnología.

Antecedentes de investigación

Para el desarrollo del trabajo, se hace una revisión de varios artículos, los cuales hacen mención de los aspectos a tratar aquí, en específico, de la problemática detectada. En uno de ellos, Dullius (2009) resalta la importancia que se le ha dado a la representación algebraica en los cursos de ecuaciones diferenciales, de tal manera que los estudiantes llegan a dominar los métodos de solución de éstas, pero no la concepción que hay detrás.

Uno de los referentes importantes en nuestro trabajo es el Proyecto Inquiry-Oriented Differential Equations (IO-DE), el cual tiene su fundamento en la Educación Matemática Realista. El equipo de investigación que participa en este proyecto es numeroso, uno de los principales miembros es Rasmussen (2016). Trabajan en torno a tres objetivos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Esos objetivos son:

- Reinvención por parte de los estudiantes de muchas de las ideas y métodos matemáticos fundamentales.
- Tareas desafiantes, que reflejen situaciones reales.
- Balance entre el tratamiento de los enfoques analítico, numérico y gráfico.

Consideraciones teóricas

Consideramos como elementos teóricos que dan sustento a este trabajo a la Educación Matemática Realista (EMR) basada en las ideas de Freudenthal (1968), así como a la Teoría de las Representaciones Semióticas (TRS) de Duval (1993).

De la Educación Matemática Realista se toman los seis principios fundamentales que menciona Alsina (2009):

- De Actividad: En este principio, la idea fundamental de Freudenthal es que la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola. Con relación a ello, Freudenthal (1968) menciona que "matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma" (p. 7).

- De Realidad: La característica más importante que se aborda en este principio es que las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales, y por contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana como a situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos. Para esto, Freudenthal (1991) dice, "yo prefiero aplicar el término "realidad" a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario" (p. 17).

- De Reinvención Guiada: En este principio, se entiende como reinvención guiada al proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal. Freudenthal (1991) menciona que "la reinvención guiada significa encontrar un balance entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar" (p. 48).

- De Niveles: La EMR admite que el estudiante pasa por distintos niveles de comprensión. Estos niveles (Freudenthal, 1991) son: situacional, referencial, general y formal.

    - En el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias es utilizado en el contexto de la situación misma, apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.

    - En el nivel referencial aparecen los modelos gráficos, materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.

    - El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto.

    - En el nivel formal se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.
    - La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel (Freudenthal, 1991).

- De Interacción: En la Educación Matemática Realista, se considera el aprendizaje de la matemática como una actividad social. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados (Bressan, 2010).

- De Interconexión: La Educación Matemática Realista no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones bajo diferentes modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo. Freudenthal (1991) menciona que la resolución de situaciones problemáticas realistas a menudo exige establecer conexión y reclama la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas.

De la Teoría de Representaciones Semióticas se toman lo que son las representaciones semióticas que Duval (1993) define como las "producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento" (p. 175). Además, agrega que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

- La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.

- El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna equivalente en un registro.

- La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

Aspectos metodológicos

En este apartado, se abordan las principales consideraciones para el diseño de una secuencia de actividades didácticas, contemplando tanto la implementación de la propuesta como el análisis a posteriori de ésta. Para ello, se consideran la Educación Matemática Realista y la Teoría de las Representaciones Semióticas, como las guías fundamentales para el desarrollo de las tres etapas: diseño, implementación y análisis.

Etapa 1: Diseño

En esta etapa, se hace apoyo del principio de realidad y de actividad que se destacan en la Educación Matemática Realista y se aúnan a estos, los tratamientos y conversiones en y entre los distintos tipos de representaciones semióticas de la Teoría de las Representaciones Semióticas, así como el uso de recursos tecnológicos los cuales permiten una exploración dinámica de las conexiones entre los diferentes registros de representación.

Se busca que el diseño cumpla con el principio de reinvención guiada que es fundamental para la EMR, para eso se desarrollan las siguientes fases:

- Fase 1: Búsqueda y selección de contextos

Zolkower, Bressan y Gallego (2006) afirman que "los contextos realistas cumplen un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos" (pp. 11-33). Además, Freudenthal (1991) señala que "un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno para ser matematizado" (p. 73).

- Fase 2: Emergencia de modelos

Zolkower, Bressan, Gallego y Pérez (2016) afirman que "los modelos en la EMR no solo son pensados como representaciones sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se realizan acciones y operaciones y se visualizan, explican, comparan, contrastan, comprueban relaciones" (p. 4).

- Fase 3: Trabajar con los diferentes tipos de representación semiótica

Duval (1993) señala que cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo.

- Fase 4: Promover el uso del software matemático GeoGebra

Gruszycki, Oteiza, Maras, Gruszycki, y Ballés (2014) señalan que "GeoGebra permite trabajar con diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático a través de sus distintas vistas" (p. 2169).

- Fase 5: Trabajo individual y colectivo

Heuvel-Panhuizen (2002) afirma que "la educación debe ofrecer a los estudiantes la oportunidad de compartir sus estrategias e inventos entre sí" (p. 13).

Etapa 2: Implementación

Para esta etapa, la implementación de la propuesta, se siguen los principios de reinvención guiada y de interacción, que se plantean en la Educación Matemática Realista. Por tanto, el profesor tendrá un papel de suma importancia en el desarrollo de esta parte del trabajo.
Zolkower, et al. (2006) señalan que los docentes deben fomentar la interacción entre estudiantes de tal manera que eso ayude a generar la participación, el debate genuino y la reflexión de éstos. En adición a ello, añaden que "el docente debe ser capaz de analizar el trabajo oral y escrito de sus alumnos, atendiendo a aquellos momentos clave donde se aprecian discontinuidades en el aprendizaje" (p. 15).

Etapa 3: Análisis

Para finalizar, en esta etapa relacionada con el análisis de las respuestas que brinden los estudiantes a la secuencia, se utiliza el principio de los niveles de la EMR, así como también el análisis de la capacidad

del estudiante para realizar los tratamientos adecuados y las diferentes conversiones entre registros de representación.

En estos momentos, nos encontramos en la Etapa 1. Como muestra, se añaden en la sección de anexos dos de las actividades y algunas preguntas que forman parte de las actividades de inicio, una de ellas está enfocada en el contexto extra matemático del cáncer de mama, que tiene la intención de que el estudiante comience a relacionar la derivada de una función con la ecuación diferencial ordinaria, reforzando primeramente la primera de éstas, llevando al estudiante por un camino geométrico de la derivada, es decir, viendo la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Conclusiones

La importancia que tiene la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el nivel superior se asocia a varios hechos, uno de ellos es que contribuye a la formación de los estudiantes de distintas áreas de la ciencia y la ingeniería. Perdomo (2011) afirma que "las EDO están consideradas como uno de los tópicos básicos en la formación de profesionales de especialidades relacionadas con la ciencia y la tecnología, tal y como se refleja en los currículos de nivel universitario" (p. 113).

Algo que también hay que destacar, es la relación que tienen las ecuaciones diferenciales ordinarias con la vida cotidiana, ya que éstas ayudan a describir fenómenos de variación que ocurren en nuestro alrededor. Perdomo (2011) menciona que "permiten describir fenómenos de variación y por tanto resultan de utilidad para modelizar, analizar y resolver numerosos problemas que surgen en diferentes contextos" (p. 113).

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2009). *El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado*. Recuperado de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII-AngelAlsina.pdf

Bressan, A. (2010). *Los principios de la educación de la Matemática Realista*. Recuperado de https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/06/DOC1-principios-de-educacion-mate-matica-realista.pdf

Dullius, M. (2009). *Enseñanza y aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico* (Tesis inédita de Doctorado). Universidad de Burgos, España.

Duval, R, (1993). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Freudenthal, H. (1968). *Why to teach mathematics so as to be useful*. Educational Studies in Mathematics, 1, 3-8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Gruszycki, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycki, L. & Ballés, H. (2014). *GeoGebra y los sistemas de representación semióticos*. Acta Latinoamerica de Matematica Educativa. Vol. 27, pp. 2169-2176.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). *Realistic mathematics education as work in progress*. En Fou-Lai Lin (Eds.). Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education (pp. 1-43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Nápoles, J. (2003). *La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias: Un enfoque histórico*. Educación y Pedagogía. Vol. 15, No. 35, pp. 165-181.

Perdomo J. (2011). *Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología.* Revista de la didáctica de las matemáticas. Vol. 78, pp. 113-134.

Rasmussen C. (2016). *The Inquiry Oriented Differential Equations Project: Addressing Challenges Facing Undergraduate Mathematic Education*. MatRIC Modelling Colloquium.

Zolkower, B., Bressan, A. & Gallego, F. (2006). *La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores*. Recuperado de https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/Yupana/article/download/247/333

Zolkower, B., Bressan, A., Gallego, F. & Pérez, S. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases Teóricas.* Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wpcontent/uploads/2016/03 /Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

7. Anexo

Actividad 3. La fiebre.
A continuación, se presenta la representación gráfica de la temperatura de un caso de fiebre en un paciente:

Figura 1. Gráfico de la temperatura de un paciente con fiebre

Responde lo que se pide:

1. Describe detalladamente que es lo que está sucediendo con el paciente según la Gráfica 1
2. Calcula para los siguientes intervalos de tiempo, el cambio en la temperatura (ΔT)

(t_1, t_2)	$\Delta T, °C$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}, \frac{°C}{hr}$	Interpretación
(0,4)			
(13,15)			

a. Completa la tercera columna de la Tabla 1 calculando la rapidez de cambio promedio (razón de cambio promedio)
b. Interpreta estos resultados obtenidos para cada intervalo de tiempo

3. En la Gráfica 1 representa la rapidez de cambio promedio en los intervalos indicados
   a. Describe lo que hiciste y argumenta tu respuesta

4. Atendiendo lo hecho anteriormente:
   a. ¿En qué intervalo de tiempo de los señalados el cambio de la temperatura fue más rápido?
   b. ¿En qué intervalo de tiempo de los señalados el cambio de la temperatura fue más lento?

Actividad 4. El cáncer de mama en México.
A continuación, se presenta un modelo gráfico idealizado de las defunciones de mujeres mayores a 25 años, por cáncer de mama en México, a lo largo de los años:

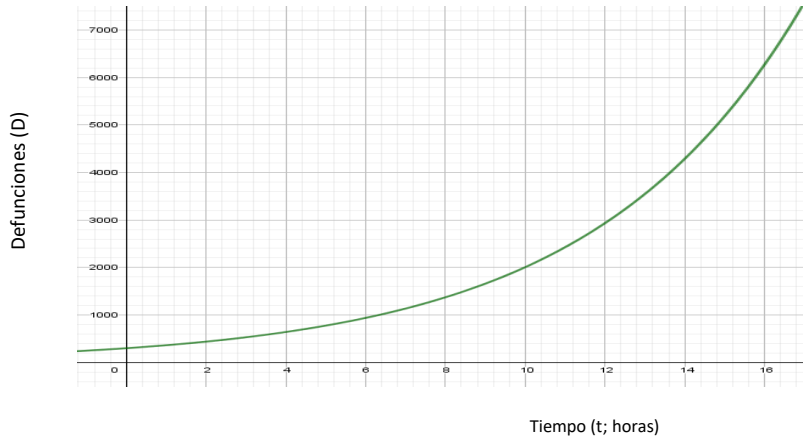


Figura 1. Gráfico idealizado de las defunciones por cáncer de mama

En compañía de un compañero, analiza las gráficas anteriores y responde lo que se pide:

1. ¿Qué puedes decir sobre las defunciones por cáncer de mama con respecto al paso de los años?

Para analizar detalladamente el comportamiento del modelo gráfico presentado anteriormente es necesario descargar el software libre GeoGebra y seguir las siguientes instrucciones:

1. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico1.ggb
    a. Mueve el punto x0 que esta sobre la barra (deslizador) que aparece en la parte superior de la vista gráfica y responde lo siguiente:
        i. ¿Qué sucede al mover el punto señalado?
    b. Realiza una tabla de valores en la cual se tenga el número de años a partir de 1955 y el de defunciones por año:
    c. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico2.ggb
        i. Habilita la opción de recta y mueve el punto x0:
        ii. ¿Qué tiene de particular esa recta?
    d. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico3.ggb
        i. Elige el número m y mueve el punto x0:
        ii. ¿Qué representa el número m?
    e. Descarga y abre el archivo cáncerdemamaenMéxico4.ggb
        i. Selecciona el punto B y mueve el punto $x0$:
        ii. ¿Qué representa el punto B?

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL EN ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS APLICADAS Y ACTUARÍA

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Antonio Pérez González, Ileana Borja Tecuatl
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
lhernan@fcfm.buap.mx, jimy-67@hotmail.com, iborjat@fcfm.buap.mx

Resumen

En este reporte presentamos evidencias de las estructuras y mecanismos mentales relacionados con el concepto transformación lineal, que se hacen presentes en estudiantes de las Licenciaturas en Matemáticas Aplicadas y Actuaría después de aprobar un curso tradicional de Álgebra Lineal en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). El cuestionario que nos permitió recabar dichas evidencias tomó como base al propuesto por Roa (2008). El objetivo fue conocer estas construcciones mentales para hacer algunas recomendaciones didácticas que impacten favorablemente en el aprendizaje de este concepto.

Palabras clave: álgebra Lineal, transformaciones, apoe

Abstract

This report presents the evidence of mental structures and mechanisms related to the concept of linear transformation shown by students of the bachelor´s degree of Applied Mathematics and Actuary, after having passed a traditional course of Linear Algebra in the Faculty of Physical Mathematical Sciences at the BUAP. The questionnaire, that allowed us to gather such evidence, was based on the one proposed by Roa (2008). The objective was to know these mental constructions to make some didactic recommendations to nurture the learning of this concept.

Key words: linear Algebra, transformations, apos

Introducción

Álgebra Lineal es una materia que se encuentra en los programas de matemáticas de diferentes carreras tanto en ciencia como en ingeniería y economía. En distintas investigaciones (Dorier, 2000; Dorier & Sierpinska, 2001; Sierpinska, 2000) se reportan dificultades asociadas a la naturaleza del álgebra lineal que la hacen una materia difícil para los estudiantes; por ejemplo, el alto nivel de abstracción de sus conceptos y los distintos modos de pensamientos que deben estar presentes para comprenderla. De entre los conceptos que causan mayor dificultad para los estudiantes se encuentran las transformaciones lineales, y es en este concepto que centramos nuestra atención en este artículo. Recuperamos las

investigaciones al respecto de Roa (2008) y de Roa y Oktaç (2010, 2012) para estudiar la construcción del concepto de transformación lineal en estudiantes de matemáticas aplicadas y actuaría. Nuestro interés en este tema proviene de las dificultades observadas en nuestros estudiantes y compartidas con las reportadas en los trabajos mencionados.

Antecedentes

Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) reslizaron una investigación sobre la introducción geométrica de los conceptos de vectores, vector propio y transformación lineal, así como las implicaciones que dicho enfoque genera en las concepciones de los estudiantes y en la que buscaron evitar el obstáculo del formalismo del concepto transformación lineal. En palabras de estos autores: "El obstáculo del formalismo se manifiesta en los estudiantes que operan a nivel de la forma de expresiones sin ver que estas expresiones se refieren a algo más que a sí mismas" (Sierpinska et al., 1999, p.12).

En su investigación utilizaron el software Cabri-Géomètre II debido a sus características dinámicas y la posibilidad de realizar representaciones geométricas y aritméticas simultáneas de vectores y transformaciones lineales, lo que consideraron apropiado para la comprensión de dichos conceptos matemáticos. Al iniciar el experimento a los estudiantes nunca se les proporcionó la definición formal de transformación lineal. Se pretendía que al finalizar las actividades propuestas, los estudiantes tuvieran la capacidad de proporcionar una definición de transformación lineal.

Los investigadores reportaron que la conservación de la suma vectorial no apareció de manera explícita en la definición de los estudiantes del concepto transformación lineal e incluso la condición $T(v+w) = T(v)+T(w)$ fue interpretada como una especie de proporcionalidad.

Posteriormente, Uicab y Oktaç (2006) desarrollaron una investigación sobre el problema de extensión lineal, el cual consiste en determinar una transformación lineal dadas las imágenes de los vectores de una base. Se buscaba identificar el obstáculo del formalismo, identificar las características del pensamiento teórico en los estudiantes, haciendo mayor énfasis en la detección del pensamiento sistémico. El objetivo de la investigación se centró en: "Observar la presencia de conexiones entre conceptos y su naturaleza, basándonos en observaciones empíricas" (Uicab y Oktaç, 2006, p.471). La investigación incorporó el software Cabri-Géomètre II, y consistió de seis módulos. Los cuatro primeros se enfocaron en conocer los comandos del software, así como los conceptos de vector, coordenadas de un vector en una base y cambio de base en un ambiente geométrico, los módulos cinco y seis se enfocaron en el desarrollo del concepto transformación lineal donde se les proporcionó la definición formal.

Los resultados que obtuvieron fueron los siguientes: los estudiantes no establecieron una conexión entre los conceptos de base y transformación lineal e hicieron referencia a las transformaciones basándose en intuiciones relacionadas con su propia experiencia.

Con los resultados obtenidos encontraron evidencias del obstáculo del formalismo en un contexto geométrico, debido a que los estudiantes manipularon objetos concretos (vectores y construcciones geométricas relacionadas con ellos) pero que carecían de significado para ellos y sólo lo interpretaron como la necesidad de hacer algo.

En el trabajo presentado por Molina y Oktaç (2007) describen el tipo de concepciones sobre la transformación lineal adquiridas específicamente en un contexto geométrico basándose en las ideas planteadas por Fischbein (1987, citado en Molina y Oktaç, 2007, p.243) sobre la intuición y los modelos intuitivos. La conjetura central de su investigación fue que algunos estudiantes asocian la idea del movimiento con las transformaciones lineales. Lo que concluyeron fue que el concepto transformación lineal se degrada con el tiempo y solamente persiste la idea de transformación.

Como la mayoría de los cursos que se imparten en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, el de Álgebra Lineal se imparte de manera tradicional, siguiendo el índice de algún libro, mediante una clase expositiva y la resolución de ejercicios por parte de los estudiantes.

Con esta investigación nos propusimos identificar la forma en la que un grupo de estudiantes ha construido el concepto de transformación lineal, después de haber aprobado un curso de Álgebra Lineal impartido de manera tradicional. Nos apoyamos en la teoría APOE para analizar las estructuras y los mecanismos mentales de estos estudiantes. Específicamente, tomamos como base la descomposición genética propuesta por Roa (2008) y Roa y Oktaç (2010, 2012), así como algunos de los problemas que ellas presentaron para el diseño del instrumento de recolección de datos.

Marco teórico

APOE es el acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, es una teoría desarrollada por Dubinsky (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) basada en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget, para describir la construcción de objetos matemáticos específicos. Dubinsky considera cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales (Interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y generalización) que conducen a la construcción de las estructuras mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) las cuales no necesariamente ocurren de manera secuencial.
Un individuo posee una concepción acción de un concepto matemático si las trasformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo estímulos externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso del concepto si puede realizar la misma transformación enteramente en su mente, sin necesidad de realizar todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre él, se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto. Un esquema es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados en la mente del individuo de manera consciente o inconsciente en una estructura cognitiva coherente.

La investigación basada en la teoría APOE tiene incorporado un ciclo de investigación compuesto por tres etapas: (1) Análisis teórico del concepto. (2) Diseño e implementación de la enseñanza o de instrumentos para recabar información después de la enseñanza. (3) Observación, análisis y verificación de datos. La primera etapa toma en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores para determinar un camino viable en la construcción del concepto. Este camino describe las construcciones y mecanismos mentales que un estudiante puede realizar para la construcción de un concepto matemático. A esta descripción se le denomina descomposición genética del concepto. La segunda etapa consiste del diseño e implementación de la enseñanza, cuyas actividades están destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el análisis. En la tercera etapa la ejecución de la enseñanza permite la oportunidad de recolectar datos y analizarlos; los resultados obtenidos mediante la aplicación de los instrumentos deben ser analizados mediante la descomposición genética preliminar para detectar qué

elementos no fueron considerados y cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente en efecto son requeridas y cuáles no se perciben. Con esta información puede validarse o refinarse la descomposición genética, y tras sucesivas repeticiones del ciclo de investigación, se puede dar una descripción cada vez más apropiada de las construcciones mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico.

Metodología

Se siguió el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE. En la etapa 1 se utilizó la descomposición genética refinada propuesta por Roa y Oktaç (2010), ver la figura 1. En la etapa 2, el cuestionario propuesto por los mismos autores, pero con algunas modificaciones que se explican más adelante. En la etapa 3 se analizaron las producciones de los alumnos para detectar las estructuras y los mecanismos mentales propuestos en la descomposición genética.

El instrumento se aplicó en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la BUAP durante el semestre de otoño de 2016. Participaron 42 estudiantes que estaban cursando la materia de Programación Lineal y que ya habían aprobado un curso de álgebra lineal; 24 pertenecen a la Licenciatura en Actuaría y 18 a la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Todos contaron con 120 minutos para responder.

El cuestionario está compuesto por seis problemas con incisos y puede consultarse en Pérez (2016). El primer problema tiene como finalidad detectar si los estudiantes presentan una concepción acción del concepto transformación lineal; la finalidad de los problemas dos, tres y cinco es mostrar si los estudiantes presentan una concepción proceso del concepto; con el ejercicio cuatro pretendemos observar la percepción geométrica que tienen los estudiantes cuando se aplica una trasformación lineal con dominio y codominio en R^2. Finalmente, el ejercicio seis fue diseñado explícitamente para detectar si los estudiantes poseen una concepción objeto del concepto transformación lineal; para ello indagamos si los estudiantes consideran las transformaciones lineales como elementos de un espacio vectorial.

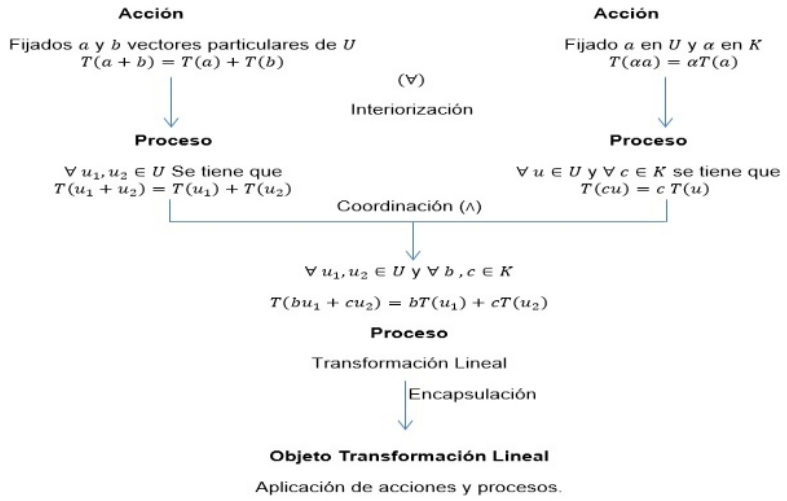


Figura 1. Descomposición genética refinada (Roa, 2008, p.112)

El ejercicio seis se compone de tres incisos; en el primero se proporciona una trasformación lineal y se pide que el estudiante busque otra transformación lineal que al sumarse con la que se le proporcionó, también sea una trasformación lineal. En el segundo inciso se cuestiona si se puede concluir que los sumandos son transformaciones lineales cuando la suma es una transformación lineal. En el tercer inciso se cuestiona si se puede concluir que un sumando es una transformación lineal cuando el otro lo es y la suma de ambas transformaciones también. En todos estos incisos se requiere que el estudiante sea capaz de reconocer la estructura y características generales de las transformaciones que se le aportan, y se espera que sea capaz de proponer transformaciones con características similares, así como de realizar operaciones con ellas. Al reconocer su estructura, pensar en cualquier otro elemento que comparta sus propiedades y operar con ellas, el estudiante demuestra una concepción objeto de las transformaciones lineales. En particular, que las percibe como elementos de un espacio vectorial de transformaciones del mismo tipo.

Resultados

Como ya se había señalado con anterioridad los resultados empíricos fueron analizados con la ayuda de la descomposición genética. Los criterios utilizados durante el análisis fueron los siguientes:

Consideramos que un estudiante tiene una concepción acción si puede encontrar las imágenes de los vectores dadas las funciones, pero consideran que la preservación de la suma de dos vectores particulares del dominio y la multiplicación de un vector por un escalar particular del campo son condiciones suficientes para afirmar que la transformación dada es lineal.

Para el análisis de la concepción proceso consideramos dos etapas de abstracción: la concepción proceso de las propiedades de una transformación lineal, como primera etapa, y la concepción proceso del concepto en sí, como segunda. Consideramos que un estudiante posee una concepción proceso de las propiedades si demuestra la linealidad de una transformación mediante el cumplimiento de las dos propiedades de manera individual, o en caso de no ser una transformación lineal si demuestra que no se cumple alguna de las dos propiedades, ya sea con un contraejemplo o de forma general. Afirmamos que un estudiante cuenta con una concepción proceso del concepto cuando demuestra la linealidad de una transformación mediante el cumplimiento simultáneo de ambas propiedades. Es decir, demuestra que una función es una transformación lineal si preserva combinaciones lineales. Diremos que un estudiante posee una concepción objeto del concepto, si considera las transformaciones lineales como elementos de un espacio vectorial.

El análisis de los datos mostró que las concepciones de los estudiantes varían según la carrera que estudian, por lo que, a pesar de que no era un objetivo de la investigación el comparar el desempeño de los estudiantes según su formación académica, consideramos adecuado y útil presentar los resultados por separado. Las evidencias encontradas sobre la concepción que lograron los estudiantes se resumen en la tabla 1.

Tabla 1. *Tabla comparativa de la concepción construida por los estudiantes según su carrera de estudio*

Concepción construida	Estudiantes de Actuaría	Porcentaje (%)	Estudiantes de Matemáticas Aplicadas	Porcentaje (%)	Participantes totales	Porcentaje general (%)
Acción	3	13%	1	6%	4	10%
Proceso	14	58%	10	56%	24	57%
Objeto	7	29%	7	39%	14	33%
Total	24	100%	18	100%	42	100%

Como se puede observar en la tabla, es mayor el porcentaje de estudiantes de la Licenciatura en Actuaría que permanecieron en una concepción acción del concepto transformación lineal que el de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

De igual manera hay más estudiantes de Actuaría que de Matemáticas Aplicadas que lograron una concepción proceso. Sin embargo, es importante señalar que la mayoría de ellos evidencian solo una concepción proceso de las propiedades y no del concepto. Un 60% de estudiantes de Matemáticas Aplicadas evidenció la concepción proceso del concepto, mientras que un 14 % de los de Actuaría se ubicó en este nivel (estos porcentajes no aparecen en la tabla 1). Por lo que debemos resaltar que la concepción lograda por los estudiantes de Matemáticas Aplicadas es más abstracta que la conseguida por la mayoría de los estudiantes de Actuaría. Esto se respalda al observar que un mayor porcentaje de estudiantes de Matemáticas Aplicadas logró una concepción objeto del concepto, comparado con el de estudiantes de la carrera de Actuaría que lograron esta concepción. Dichos estudiantes respondieron solo uno de los tres incisos del problema 6, con lo que en realidad muestran que su concepción objeto es incipiente; y solo dos estudiantes de Matemáticas Aplicadas fueron capaces de responder con argumentos sólidos el resto de los incisos, con lo que demostraron una concepción objeto más robusta.

Los datos ponen en evidencia que tras haber aprobado un curso de álgebra lineal bajo una instrucción tradicional, la concepción construida por la mayoría de los participantes no les permitió pensar las transformaciones lineales como elementos de un espacio vectorial que pueden ser operados dentro de éste como entes abstractos sin perder sus propiedades. Esto impidió que pudieran realizar acciones sobre ellas y pensar en sus propiedades de forma estructural y no únicamente operativa para casos particulares.

En la figura 2 se puede observar la respuesta al primer inciso del ejercicio 2 de un estudiante de actuaría con etiqueta EA20, quien muestra una concepción acción del concepto transformación lineal. Este estudiante no logró interiorizar las propiedades que caracterizan a este objeto matemático ni generalizarlas a elementos arbitrarios del espacio vectorial.

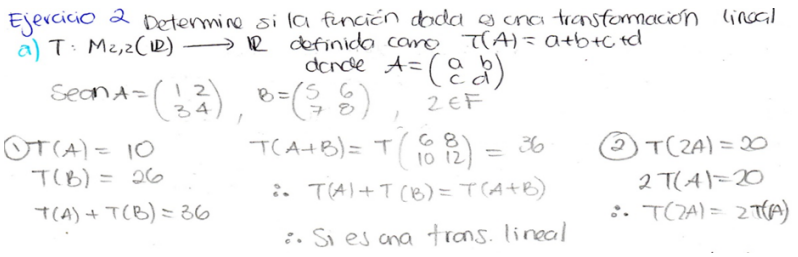


Figura 2. Ejemplo de la respuesta de un estudiante con una concepción Acción.

En la figura 3 se muestra otro ejemplo de una respuesta al mismo ejercicio 2 inciso a del estudiante etiquetado como EMA41 quien da evidencia de una concepción proceso de las propiedades. Finalmente, en la figura 4, la respuesta de un estudiante (EA4) quien logró una concepción proceso del concepto.

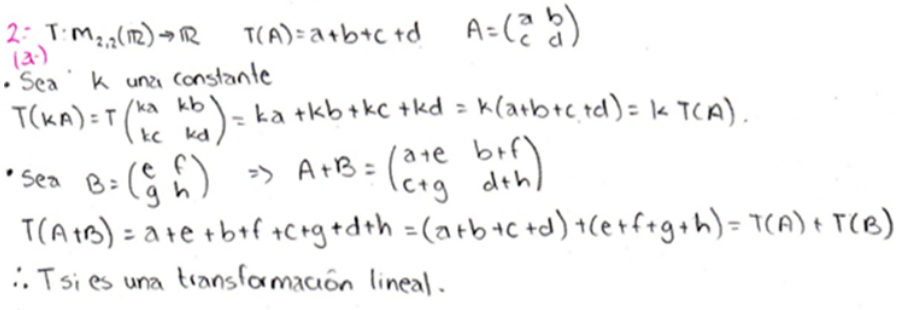


Figura 3. Ejemplo de estructura mental concepción proceso de las propiedades

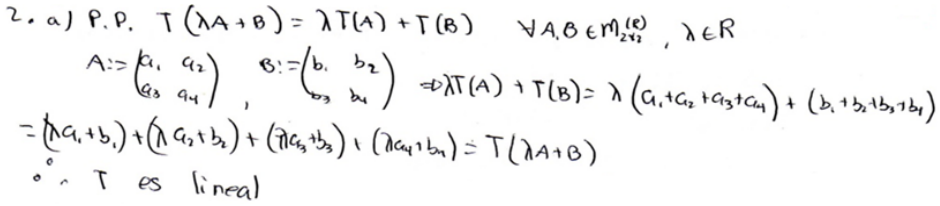


Figura 4. Ejemplo de estructura mental concepción proceso del concepto

Conclusiones

Afirmamos que la descomposición genética que consideramos en nuestra investigación es, en general, una buena herramienta de análisis debido a que describe adecuadamente la manera en que los estudiantes encuestados construyeron el concepto transformación lineal.

El grupo de estudiantes encuestado mostró diferencias en el nivel de abstracción alcanzado, lo cual podría explicarse por los objetivos y cantidad de materias teóricas propias de cada carrera. Al momento de cursar la materia de Álgebra Lineal los estudiantes de la carrera de Matemáticas Aplicadas a tuvieron que haber aprobado dos materias más de matemáticas puras que los de la carrera de Actuaria. Esto pudo haber

contribuido al desarrollo de habilidades que les permitieron interiorizar, generalizar y en algunos casos, encapsular el concepto en estudio.

A partir del análisis de las respuestas se sugiere que los estudiantes trabajen con distintas funciones lineales en las que se le permita verificar que el cumplimiento de las dos propiedades de una transformación lineal, para la totalidad de los elementos del dominio, y no solo de casos particulares, es equivalente a la preservación de combinaciones lineales.
Finalmente, consideramos de suma importancia que los estudiantes tengan más oportunidades de reflexión que les permitan desarrollar una concepción objeto del concepto. Como trabajo a futuro se plantea el utilizar los resultados de esta investigación para el diseño de una secuencia de aprendizaje que permita la construcción de este concepto hasta la concepción objeto.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Dorier, J-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (ed.) *On the teaching of linear algebra*, (pp. 3-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.L. & Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. In D. Holton et al. (eds.) The *Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Molina, J, G., & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.

Pérez, A. (2016). *Construcciones mentales del concepto transformación lineal bajo la teoría APOE en estudiantes de ciencias exactas*. Tesis de Licenciatura no publicada, FCFM, BUAP.

Roa, S. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV- IPN.

Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.

Roa, S. & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 199-232.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. and Hillel J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), pp.7-40.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Uicab, R. y Oktaç, A. (2006) Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 459-490.

MODELIZACIÓN MATEMATICA: ANALISIS DE UNA EXPERIENCIA AULICA EN LA SECUNDARIA

Valeria Vanesa Alvarez, Ivone Anahí Patagua
Universidad Nacional de Salta. Facultad de Ciencias Exactas (Argentina)
valeria.alvarez89@gmail.com, ivonepatagua@gmail.com.com

Resumen:

La Modelización Matemática llevada al aula, en un contexto donde el estudiante es el propio modelador y constructor de sus conocimientos, se transforma en una herramienta didáctica que relaciona otras disciplinas con la Matemática desde la aplicación.
En esta comunicación, presentamos una experiencia realizada con alumnos de la Escuela Secundaria Obligatoria de una Institución Técnica de nivel medio de la carrera Maestro Mayor de Obras, en la misma, utilizamos la Modelización Matemática como herramienta para resolver situaciones de la vida diaria relacionadas con la programación lineal.

Palabras clave: matemática, modelización, modelo, programación lineal.

Abstract

Mathematical Modeling implemented in the classroom setting, in a context where the student is the modeler and builder of his own knowledge, becomes a didactic tool that relates other disciplines to Mathematics from its implementation. In this report, we show an experience carried out in a compulsory secondary school at a Technical Institution of Middle Level with students majoring in Master Builder. In this major, we use Mathematical Modeling as a tool to solve everyday situations related to linear programming.

Key words: mathematics, modeling, model, lineal programming.

Introducción

Diferentes trabajos en la bibliografía (Biembengut, M. y Hein, N. 2004; Bassanezi, 2002) coinciden en que la Matemática es una ciencia poco motivada en el aula, debido a factores tales como: vinculación limitada con problemas del mundo real, escasa articulación horizontal y vertical con otras materias, mecanización de algoritmos para la resolución de problemas, entre otros. Logrando como resultado el rechazo entre los estudiantes para la materia en cuestión. Es por ello, que tenemos la obligación/motivación de buscar alternativas pedagógicas que nos permitan mitigar estas problemáticas para lograr mejores resultados en el aprendizaje dentro del aula.

En la actualidad existen diferentes enfoques que tienen como objetivo minimizar estas problemáticas, particularmente un enfoque altamente aceptado es la Modelización Matemática llevada al aula debido a sus resultados positivos.

El objetivo de este trabajo es analizar las producciones de los alumnos desde las etapas de Modelización para abordar problemas de programación lineal, identificando las dificultades de los estudiantes al trabajar desde la Modelación Matemática.

Marco de Referencia

Analizando las definiciones que existen de la Modelización Matemática, podemos observar que para autores como

1. Bassanezi, R (2002) la Modelización Matemática, es el arte de transformar problemas de la realidad en problemas que se puedan resolver interpretando sus soluciones en lenguaje coloquial o distendido.
2. Por su parte Morten Blomhoj (2004), nos dice que la Modelización presupone una comprensión de las Matemáticas involucradas en ellas, siendo vista como una práctica de enseñanza que la coloca en estrecha relación con el mundo real y la Matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje.
3. Según Biembengut et al. (2004) podemos tan solo decir que es un proceso dinámico utilizado para la obtención y validación de Modelos Matemáticos.
4. Para Schmidt (2010) Modelización Matemática en general se refiere al uso de las matemáticas para resolver problemas reales y abiertos.
5. (Blum y Borromeo, 2009) la Modelización Matemática centrada en situaciones o fenómenos provenientes de la realidad es el proceso que traslada el mundo real a las matemáticas en ambas direcciones.

Estas definiciones se ajustan a nuestra forma de entender la Modelización Matemática. En este trabajo nos guiaremos por la definición propuesta por Bassanezi debido a su carácter más explícito.

Del mismo modo, cuando hablamos del concepto de Modelos Matemáticos, podemos navegar por varias definiciones. Según Morten Blomhoj (2004) un modelo matemático es la relación existente entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática.

Otros autores como Giordano F., Weir M., Fox W. (1997) lo definen como una construcción matemática orientada a estudiar un sistema o fenómeno particular del mundo real.

Biembengut, M; Hein, N; (1999) se refieren a modelo matemático de una situación problemática como el conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, la situación estudiada. Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio, & Ocampo (2009) definen un modelo matemático como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación.

Por otra parte, Blum y Niss (1991) lo consideran un triple (S, M, R), consistente en una situación problemática real S, una colección de entidades matemáticas M y una relación R entre los objetos y relaciones de S y los objetos y las relaciones de M.

Se hace notar en todas estas definiciones, la visión que se tiene de la matemática en relación con el mundo real; es por ello que su importancia radica en obtener un lenguaje conciso que exprese las ideas de manera clara y sin ambigüedades.

Para trabajar con la Modelización Matemática es necesario transitar por un proceso que permita tomar conocimiento de una realidad y poder mediante etapas crear un sistema matemático que la represente, esto es llamado Proceso de Modelización Matemático, para el desarrollo del trabajo usaremos el propuesto por Blomhoj y Hojgaard Jensen (2003) (Ver Figura 1).

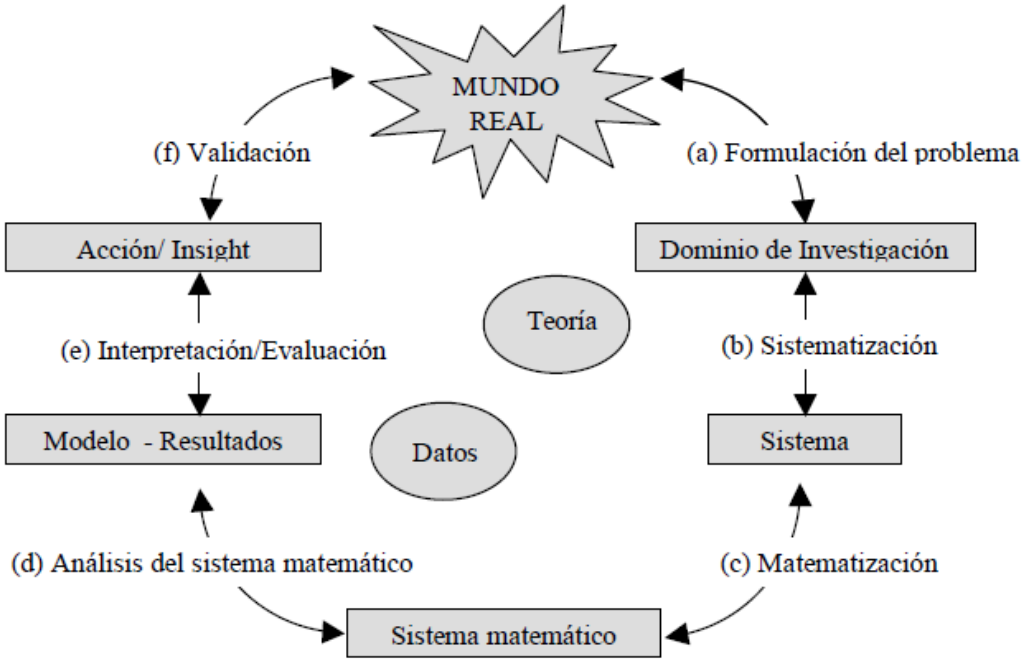


Figura 1: Proceso de Modelización Matemática propuesto por Blomhoj et al. (2003)

Modelización Matemática en el Aula

Se llama Modelación Matemática a la actividad que se realiza en la clase de matemática, cuya naturaleza se deriva de la actividad científica de la Modelización Matemática (Villa Ochoa, J. 2007), por su parte Blum et al. (2007) lo consideran también como un proceso que tiene origen en la conceptualización de una situación o problema de la realidad. Consideramos que ambas interpretaciones no se alejan de considerar a la modelación con la noción de realidad.

Creemos que los conocimientos matemáticos, no se presentan fragmentados, sino relacionados naturalmente a través de una situación problemática. Autores como Segal, S. y Giuliani D. (2008) plantean

que la actividad de Modelización reúne condiciones para poder realizarla en el aula, de una manera similar a un trabajo de investigación científica, centrado en la producción matemática de los alumnos, donde los conocimientos surgen de la propuesta del docente.

Experiencia y producción

En este trabajo se analizaron producciones de alumnos de 4° año, que cursaron la asignatura Análisis Matemático en una Institución de Nivel Medio de la orientación Técnico en Maestro Mayor de Obras. Salta. Argentina, focalizando en el tema Programación Lineal, para este análisis se tomó una muestra de 23 sobre un total de 30 alumnos.

La experiencia se desarrolló dentro del contexto áulico mencionado, a partir de la metodología del trabajo grupal, guiados con la conducción del docente mientras desarrollan cada una de las actividades propuestas, las mismas les fueron entregadas a los alumnos en formato papel, se les estimó un tiempo apropiado para la interpretación, desarrollo y socialización de las producciones. En casos puntuales fue necesaria la intervención del docente a través de recursos como afiche, software, entre otros, como complementos para afianzar conceptos.

Uno de los problemas propuestos es:

Problema de la Construcción de Viviendas

Una empresa constructora iniciara un proyecto urbano en un terreno de 4 hectáreas (recordar que una hectárea es igual a 10.000 m2). En él se construirán dos tipos de casas:

- Las viviendas familiares que ocupan una superficie de 270m^2 y tendrán un costo de $800.000.
- Los monoambientes que ocuparán una superficie de 200m^2 y tendrán un costo de $500.000.

Los estudios de mercado indican que la demanda máxima de viviendas familiares es de 100 unidades, mientras que para los monoambientes corresponden a 120 unidades. Además, la demanda máxima de posibles combinaciones de viviendas es de 170 unidades.

Ayuda a la empresa a disponer de un registro que le indique la mejor combinación de los tipos de casas a construir de modo que obtengan una mejor ganancia.

Los objetivos de proponer este problema, fueron:

- Utilizar la Modelización Matemática para resolver un problema de Programación Lineal.
- Modelizar situaciones problemáticas expresando las condiciones con ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

■ **Análisis de la Resolución teniendo en cuenta las etapas del Proceso de Modelización** (vistas en la Figura 1)**:**

Formulación del problema: Los alumnos destacaron del problema los datos más relevantes:

a. Superficie que ocupa la construcción de cada tipo de vivienda (ya sea familiar o monoambientes)
b. Cantidad total de superficie disponible.
c. Cantidad máxima de viviendas que se pueden construir.
d. Cantidad máxima de viviendas familiares que se puede construir.
e. Cantidad máxima de monoambientes que se puede construir.
f. Ganancia que se obtendrá de la construcción.

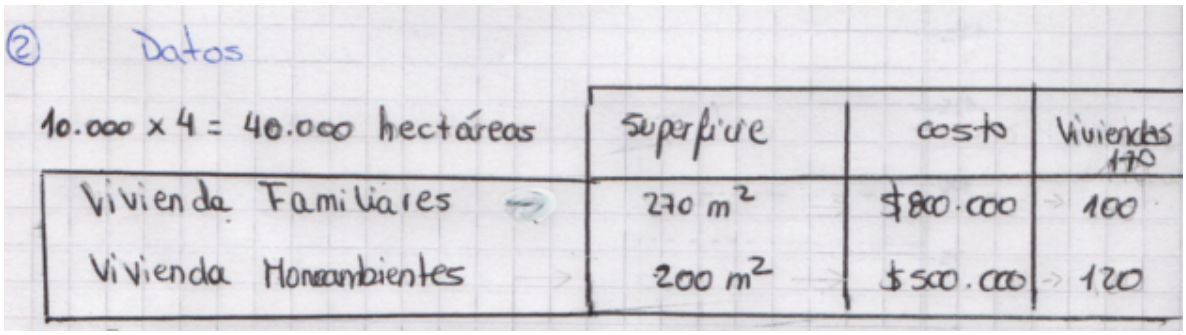
Sistematización: Analizando la situación planteada, pudieron identificar como variables:

$$x: Cantidad\ de\ viviendas\ de\ tipo\ familiar$$
$$y: Cantidad\ de\ monoambientes$$

Matematización: Destacaron del problema las siguientes restricciones:

- Restricciones 1: La empresa tiene un terreno de 4 hectáreas para ocupar (ni más espacio ni menos espacio).
- Restricciones 2: Solo se pueden construir 100 viviendas familiares.
- Restricciones 3: Solo se pueden construir hasta 120 monoambientes
- Restricciones 4: En el terreno como máximo se pueden construir 170 viviendas en total sin importar el número de cada una de los tipos disponibles (familiares y monoambientes)

Análisis del Sistema Matemático: En esta etapa trabajaron con las restricciones, para ello debieron tener en cuenta el dato del espacio en superficie necesaria para la construcción de una casa familiar y/o de un monoambiente. Esto condujo a la creación de una tabla (Ver Figura 2) que resume esas cantidades.


② Datos

10.000 x 4 = 40.000 hectáreas

	Superficie	costo	Viviendas 170
Vivienda Familiares →	270 m²	$800.000	→ 100
Vivienda Monoambientes →	200 m²	$500.000	→ 120

Figura 2: Tabla armada por uno de los participantes de la experiencia

En base a esto (Ver Figura 3), pudieron formular la función ganancia mediante la expresión:

$$800.000x + 500.000y = z$$

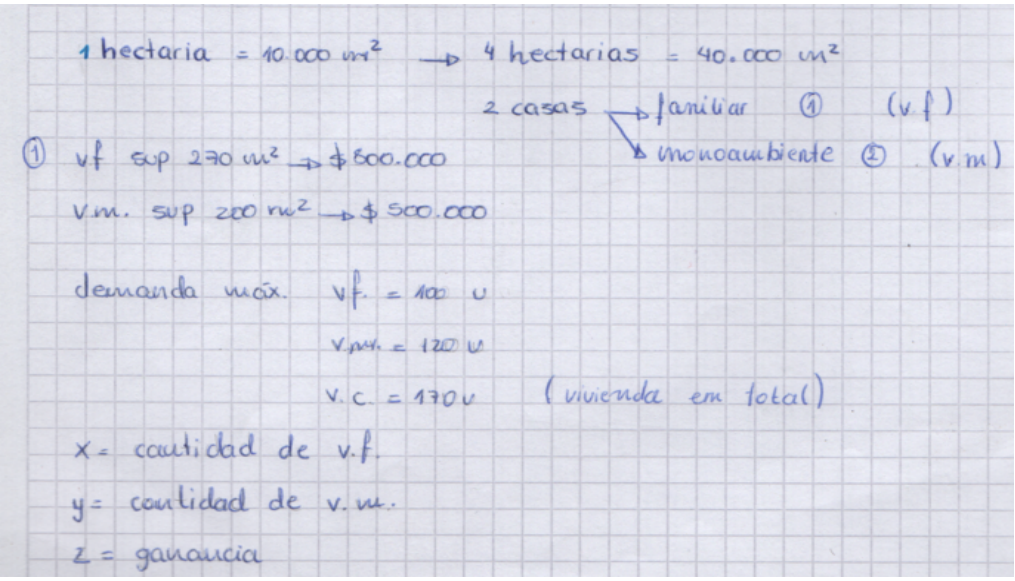


Figura 3: Planteo de las variables y restricciones teniendo en cuenta lo planteado en la Formulación.

Haciendo usos de las restricciones indicadas en la etapa de la Matematización, y relacionando cada una de ellas con las variables, pudieron expresarlas a través de inecuaciones del siguiente modo:

- Restricciones 1: $270x + 200y \leq 40.000$ (Disponibilidad de espacio)
- Restricciones 2: $x \leq 100$ (Cantidad de viviendas familiares que se podrá construir)
- Restricciones 3: $y \leq 120$ (Cantidad de monoambientes que se podrá construir)
- Restricciones 4: $x + y \leq 170$ (Cantidad de viviendas de ambos tipos que se podrá construir)

Validación/Interpretación: Debieron estudiar si el Modelo Matemático propuesto se ajusta al problema inicial, desde el análisis de las expresiones planteadas. Fue necesario realizar una representación gráfica de las restricciones (Ver Figura 4) aclarando que para las variables deberían establecer las restricciones de positividad para cada variable, es decir:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

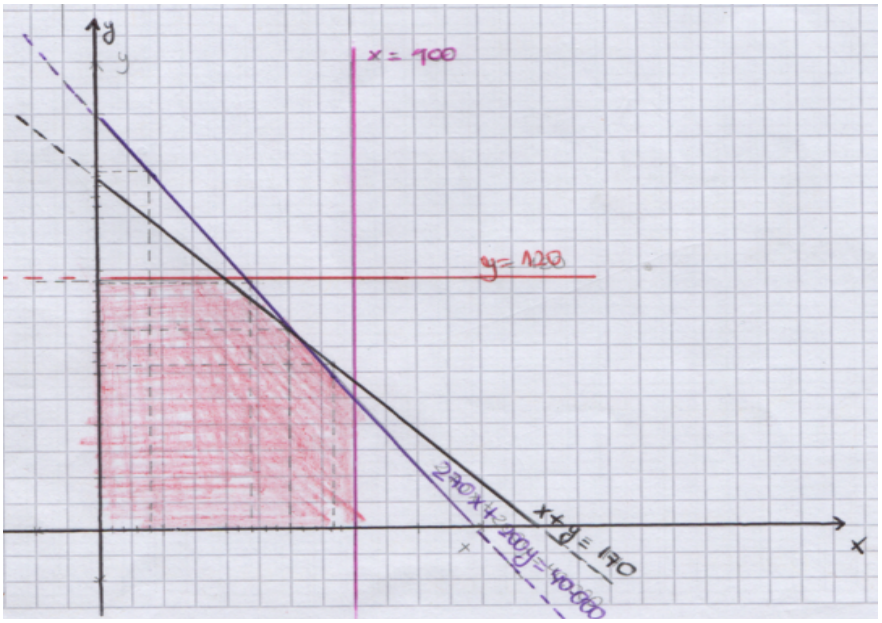


Figura 4: Representación gráfica del conjunto solución.

En un principio no se pudo llegar al análisis gráfico de lo que representa la solución obtenida del problema, pero mediante la guía de cómo construir una gráfica de este tipo y lo que significa el análisis de la situación mediante una representación se llegó a la construcción de la gráfica correspondiente. Pudieron realizar la gráfica de un sistema de inecuaciones. Se les explicó a los estudiantes, que la región colorada representa el conjunto solución del problema, este a su vez es un polígono que tiene como vértice los posibles puntos soluciones, el que cumple con todas las restricciones será el que al ser reemplazado en la función ganancia de como resultado el mayor número posible, esto se hizo a través del software matemático GeoGebra.

Se puede observar que, de las posibles soluciones (Ver Figura 5), la que hace obtener mayor ganancia y que además verifica todas las restricciones del problema es $x = 100$ e $y = 65$, es decir 100 viviendas familiares y 65 monoambientes; con una ganancia final de $z = 112.500.000\$$

x	y	$800.000x + 500.000y = G$ (Función Objetivo)
0	0	$800.000 * 0 + 500.000 * 0 = 0$
0	120	$800.000 * 0 + 500.000 * 120 = 60.000.000$
50	120	$800.000 * 50 + 500.000 * 120 = 100.000.000$
85,71	84,29	$800.000 * (85,71) + 500.000 * (84,29) = 110.713.000$
100	65	$800.000 * 100 + 500.000 * 65 = 112.500.000$
100	0	$800.000 * 100 + 500.000 * 0 = 80.000.000$

Figura 5: La tabla representa los posibles valores óptimos, la línea coloreada da la solución óptima al programa planteado por los estudiantes

Análisis de los resultados obtenidos

Se analizaron los resultados de todos los grupos de alumnos que participaron, según:

a) *Lectura e interpretación de los enunciados de los problemas:* Al 35% de los estudiantes se les dificulta la correcta interpretación de los problemas.
El 65% de los estudiantes lograron a través de la lectura comprender lo que el problema plantea.
b) *Búsqueda del modelo a través de la Modelización Matemática:* El 60% de los estudiantes encontraron mayor dificultad en la gráfica de inecuaciones, debido al escaso manejo de la representación gráfica de las mismas, no pudiendo completar el Modelo Matemático armado.

El 80% de los estudiantes lograron modelizar a través de ecuaciones e inecuaciones el problema, encontrando las respectivas soluciones en forma algebraica.
Un 20% de estos estudiantes lograron completar el Modelo Matemático con la interpretación gráfica.
c) *Con respecto a los contenidos trabajados:* El 30% de estudiantes les costó durante y después de la experiencia poder adquirir el conocimiento del tema propuesto.
El 70% de los estudiantes pudo relacionar e institucionalizar el tema que pretendíamos desarrollar a través de la experiencia (Programación lineal).

Conclusiones

La realización de la experiencia usando la Modelación Matemática como una herramienta en el aula propuesta en este trabajo fue en gran medida muy satisfactoria, ya que se observó en los alumnos:

(a) Predisposición al trabajo en grupo.

(b) Motivación en la búsqueda de la resolución de los problemas utilizando saberes previos.

(c) Concientización del rol importante que juega la matemática para resolver problemas de la vida real.

El trabajo con Modelización Matemática permitió a los alumnos reforzar capacidades en lectura y comprensión de problemas; buscar y proponer posibles soluciones a los mismos. El problema propuesto en particular, resultó de gran empatía y aceptación por parte de los alumnos debido a la relación directa con las actividades que ellos realizan a diario.

Para el análisis de las etapas del proceso de Modelización, se tuvo que hacer reajustes e intervenciones con el propósito de ayudar al estudiante a transitar por ellas para culminar con el modelo, por ejemplo, el uso del software GeoGebra para graficar las inecuaciones, interpretación geométrica y resolución de los problemas.

Referencias bibliográficas

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, uma nova estratégia*. Sao Paulo: Contexto.

Biembengut, M. y Hein, N. (1999). Modelación Matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. *Revista de Educación Matemática*, *11*(1), 106-110.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004) Modelación Matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Revista de Educación Matemática*, *16* (2), 105-125.

Blomhoj, M (2008). Modelización Matemática. Una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática,* 23 (2), 20-35. Traducción de María Mina del original Mathematical modelling - A theory for practice.

Blomhoj, M. y Hojgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its applications*. *22*(3), 123-139.

Blomhoj, M. (2004) Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. National Center for Mathematics Education, 145-159. Suecia.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues mathematics instruction, *Educational studies in mathematics*, *22*, 37-68. Kluwer Academic Publishers Ed. Dorfler

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45-58.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). Modelling and aplications in mathematics education. *The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Giordano, F., Weir, M. y Fox, W. (1997). *A first Course in Mathematical Modelling*. Published by Brooks/Cole.

Schmidt, B. (2010). *Modeling in the classroom motives and obstacles from the teacher's perspective*. Comunicación en el cerme 6 (11) Applications and Modelling 2066-2076.

Segal, S. y Giuliani D. (2008) *Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades.* Libros del Zorzal. Buenos Aires. Argentina.

Villa Ochoa, J (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *Revista TENCO-LOGICAS*, 19(1), 71-73.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C. A., & Berrio, M. (2010). Sentido de Realidad en la Modelación Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23*, 1087-1096. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL DEL ESTUDIANTE AL RESOLVER UN PROBLEMA DE CONJETURA

Carolina Barahona Sarmiento
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
carolinab.mat@gmail.com

Resumen

Se describe el trabajo matemático que realizan los estudiantes cuando conjeturan, al resolver el "problema de los apretones de manos", encontrando el número de saludos que se dan las personas asistentes a una reunión.
Se realiza una investigación cualitativa utilizando como marco teórico el Espacio de Trabajo Matemático, ETM, para analizar la experiencia implementada en dos grupos de estudiantes. Tras observar lo realizado por ellos para dar solución al problema, caracterizamos el trabajo matemático de los estudiantes, en relación a la activación de las génesis que articulan en su ETM personal.

Palabras clave: espacio de trabajo matemático, conjetura

Abstract

We describe the mathematical work that students do when conjecturing, when they solve "the handshakes problem", finding the total number of greetings that people attending a meeting do. We carried out a qualitative research using the Mathematical Spatial Work (MSW), as a theoretical framework to analyze the experience implemented in two groups of students. After observing what they did to solve the problem, we characterize the students' mathematical work, regarding the stimulation of the geneses that articulate in their personal MSW.

Key words: mathematical work wpace, conjecture

El problema de conjeturar

En Chile, los actuales programas de estudio para la enseñanza de matemáticas del nivel escolar Básico y Medio están organizados con base en cuatro habilidades, que son: resolver problemas, representar, modelar y comunicar, y argumentar, habilidades que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos, y en la aplicación de conocimientos en diversos contextos. Se espera que nuestros estudiantes sean capaces de resolver problemas, y muchas de estas situaciones requieren que ellos puedan conjeturar.

Los documentos ministeriales vigentes para el currículo chileno proponen de manera reiterada que los estudiantes deben conjeturar, en los distintos niveles de la educación escolar y en relación a variados saberes matemáticos, por ejemplo, se espera que sean capaces de fundamentar conjeturas dando ejemplos

y contraejemplos, para luego hacerlo usando lenguaje algebraico, comprobando o descartando la validez de los enunciados (MINEDUC, 2013).

Debemos desarrollar en nuestros estudiantes la capacidad de conjeturar, pero ¿cómo enseñar a nuestros estudiantes a conjeturar? Los documentos ministeriales, programas y textos de estudio, carecen de indicaciones explícitas sobre las tareas matemáticas que deben realizar los estudiantes y las actividades que deben proponer los docentes para lograr desarrollar esta habilidad.

Resolver problemas conjeturando

Una de las actividades que ha sido interés de investigaciones en el ámbito educativo, y en particular en la enseñanza de la matemática, es la resolución de problemas, como reporta Castro (2008). Una situación de enseñanza-aprendizaje será considerada un problema cuando su resolución represente un desafío para el estudiante, al no reconocer de manera inmediata la forma de abordarlo.

En trabajos sobre la resolución de problemas en educación matemática Pólya (1945) propone pasos para describir el trabajo del estudiante al resolver una situación propuesta. Define problema como una situación donde el individuo debe buscar de manera consciente una forma, una acción adecuada, para lograr un objetivo, el cual es reconocido pero no alcanzable de manera inmediata.

Complementa estas ideas Schoenfeld (1985) y afirma que hay factores que no han sido considerados sobre la resolución de problemas, como aquellos de carácter emocional-afectivo, sociocultural, psicológicos, entre otros. Plantea que el término *problema* es relativo, pues lo que para una persona es un problema puede no serlo para otra persona. Así la tarea matemática tendrá la característica de ser un problema en relación al individuo que la esté resolviendo.

Cuando los investigadores describen el trabajo que realizan los estudiantes que resuelven problemas nos encontramos con la idea de conjeturar, siendo importante comprender qué es una conjetura y cuál es el trabajo que realiza el estudiante al conjeturar. Conjetura se puede definir como "una proposición que se prevé verdadera pero que está pendiente de ser sometida a examen. Este examen puede tener como resultados su aceptación o rechazo" (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov, 2008, p. 8). Conjeturar no se limita a la obtención de una expresión algebraica, es un proceso que involucra un razonamiento inductivo.

El presente estudio tiene el objetivo de describir el trabajo matemático que realizan los estudiantes cuando conjeturan al resolver el "problema de los apretones de manos" (Figura 2). Para esto nos apoyamos del constructo teórico Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014), y en Duval (2004) en lo referido a visualización y razonamiento matemático.

El Espacio de Trabajo Matemático

En este constructo se consideran elementos y procesos cognitivos con el propósito de comprender lo que se pone en juego alrededor del trabajo matemático en contexto escolar, y en la medida que crece el

desarrollo teórico se amplía la mirada a otros dominios de la matemática (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014).

El espacio de trabajo así concebido designa un ambiente pensado y organizado para facilitar el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos en contexto educativo. Para definir el ETM se introducen dos planos, *epistemológico* y *cognitivo*, que caracterizan el trabajo de quien se involucra en la resolución de un problema.

Cada plano está compuesto por tres componentes en interacción, estos planos horizontales estructuran el ETM mediante la activación de génesis que configuran planos verticales.

Cuando el individuo resuelve un problema matemático, pone en juego elementos de naturaleza matemática y otros de naturaleza cognitiva, articulando una relación entre los dos planos horizontales que configuran este modelo (ver Figura 1). Esto se entiende como la activación de génesis, que pueden ser de carácter semiótico, instrumental o discursivo, dependiendo de las características u objetivo que tenga la tarea en cuestión.

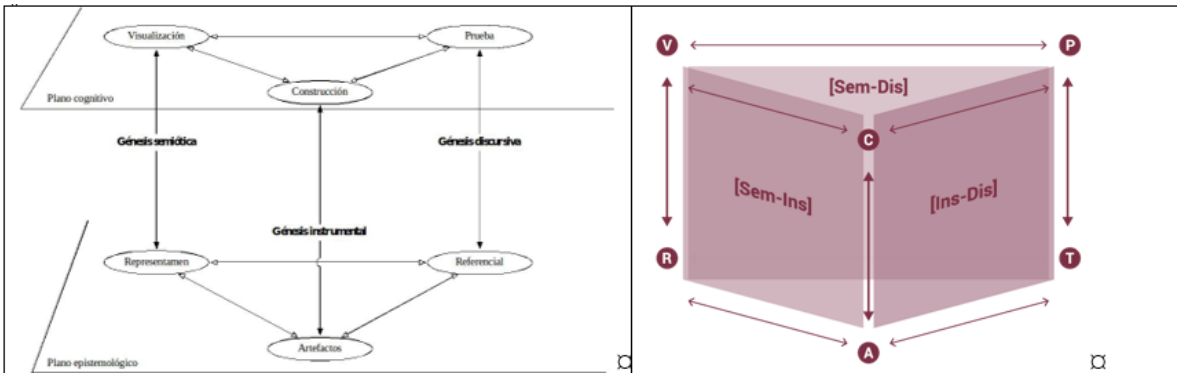


Figura 1: Génesis y planos verticales del ETM (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014)

Decimos que la génesis semiótica se activa cuando, mediante un proceso de visualización, el individuo puede representar los elementos matemáticos que están en juego en la situación. La activación de la génesis instrumental da cuenta de la manipulación de dichos elementos mediante artefactos que convierte en herramientas matemáticas. En la activación de la génesis discursiva se recurre a propiedades matemáticas para ponerlas al servicio del razonamiento y las validaciones.

La articulación entre los planos epistemológico y cognitivo no debe ser entendido como la unión individual entre las componentes de cada plano, sino más bien, como una relación activa, conjuntamente por dos o incluso tres génesis, que generan los llamados planos verticales (Kuzniak y Richard, 2014). En el plano [Sem-Ins] se privilegia la identificación y la exploración de los objetos, en el plano [Ins-Dis] se identifican razonamientos que provienen de la exploración del objeto, y en el plano [Sem-Dis] se identifican los razonamientos argumentativos.

La caracterización del ETM es llamado paradigma, el cual se constituye cuando "una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, privilegiando ciertas

herramientas o ciertas formas de pensamiento" (Kuzniak y Richard, 2014, p.5). En este sentido nos referiremos al paradigma del grupo de individuos que resuelven en conjunto este problema.

Se distinguen tres tipos de ETM (Kuzniak, 2011), a saber: ETM de referencia, definido según la relación con el saber matemático; ETM idóneo, que depende de una institución y se define según la manera que este saber se enseña; y ETM personal, que depende del individuo y se define por la manera en que él se enfrenta a un problema matemático.

El problema de los apretones de manos

Encuentro de Ex -Alumnos
a) En la primera reunión de ex alumnos de "*La generación 2007"* asistieron 20 personas al encuentro. Cada asistente, con mucha alegría, saluda a todos los demás con un apretón de manos. ¿Cuántos apretones se dieron en total en la reunión?
b) Si a la segunda reunión de ex alumnos de la generación llegaron 139 personas, y todas se saludan con un apretón de manos ¿Cuántos apretones se habrán dado esa vez?

Figura 2: Modificación de "problema del apretón de manos" (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov, 2008). Fase de Intervención (Barahona, Corrial y Vicencio, 2015).

Método

Se realiza una investigación cualitativa definida en dos fases: la primera es un estudio exploratorio donde se identifican descriptores para las situaciones clave del trabajo de los estudiantes, y en la segunda fase se profundiza sobre ellos.

Se plantea el problema a dos grupos de estudiantes pertenecientes a distintos niveles educativos esperado encontrar similitudes en sus trabajos a pesar de la diferencia en niveles y conocimientos. Los estudiantes fueron elegidos por poseer buen rendimiento en matemática, con la finalidad de que pudieran enfrentar la resolución del problema.

Se determinan distintas unidades de análisis con base en los registros de representación que han utilizado para expresar la información, es decir, registro tabular, aritmético, natural y algebraico, definiendo así algunos descriptores para caracterizar situaciones clave en el trabajo de los estudiantes.

Estos descriptores caracterizan su trabajo en relación a las génesis activadas del ETM personal de quien resuelve este problema, siendo cada uno de estos descriptores una categoría de análisis emergente, las que se profundizan en la segunda fase, incluyendo el análisis del registro auditivo y video del trabajo grupal.

En la primera fase el grupo de estudio corresponde a 4 estudiantes de 2º año de enseñanza media (15 años), llamados E1, E2, E3 y E4, y en la segunda fase a 4 estudiantes de 7º año (12 años) de enseñanza básica, llamados E5, E6, E7 y E8. Cabe señalar, que las producciones de E2 y E3 no se han incorporado en este trabajo pues son similares a otras producciones.

Resultados

La naturaleza del problema activó de manera inmediata la génesis semiótica, recurrieron a íconos mentales, kinestésicos, frases y dibujos como signos para representar las personas, al vínculo entre ellas, y la cantidad de vínculos realizados por cada una y el total de ellas.

Representaron y contaron los apretones de manos, los vínculos entre los individuos que se saludan. Esta situación activó su trabajo matemático desde un dominio aritmético, caracterizado por la forma en que se realizaron el conteo de los saludos.

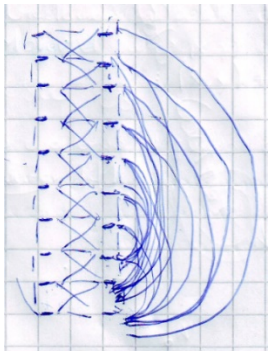


***Figura 3*:** Registro tabular-pictórico E6, segunda fase

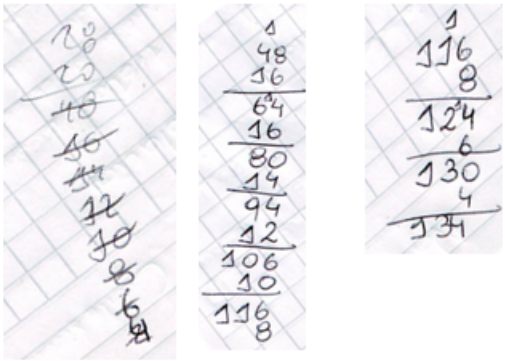


***Figura 4*:** Registro aritmético E5, segunda fase

E8: *Es que si lo hacemos con dibujo tendríamos que unir todos con todos.*

***Figura 5*:** Extracto registro auditivo E8. Evidencia activación de génesis semiótica.

Los estudiantes reconocen las limitaciones al querer representar el problema mediante un dibujo. Se explícita la idea de que todos los signos que representan a las personas deben vincularse mediante un signo para el saludo.

Organizan la información mediante un registro tabular, apoyando la estrategia de cálculo que establecen para el total de apretones. Sistematizaron u ordenaron los elementos para realizar dicho cálculo total, lo que requirió que generaran una representación que les permitiera realizar este trabajo, siendo así determinante para establecer una estrategia de cálculo mediante la suma y el producto.

***Figura 6*:** Registro tabular-aritmético E1 primera fase

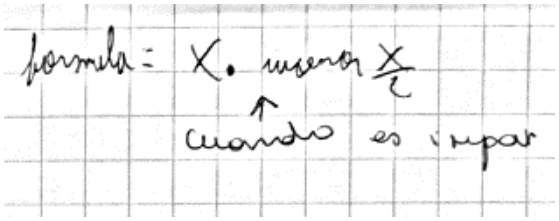


Figura 7: Registro algebraico E4 primera fase

Se activa la génesis instrumental, mediante la adición, el producto y el cociente. En la segunda fase se evidencia cómo esto se relaciona la forma de representar la situación mediante un dibujo, es decir, con las características de los registros que muestran en la activación de la génesis semiótica.

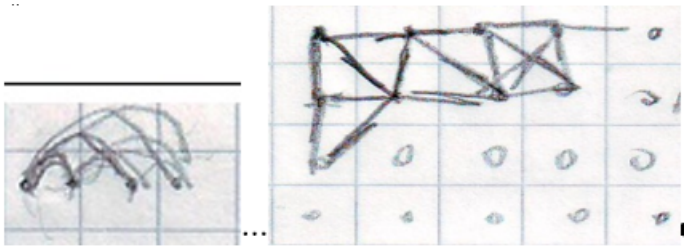


***Figura 8*:** Registro tabular-pictórico E7 segunda fase

Se evidencia que para determinar la cantidad de apretones que realiza cada persona, los estudiantes deben comprender las condiciones del saludo, una persona no se saluda a sí misma y dos personas no se saludan dos veces, idea que comunican a otros en su trabajo.

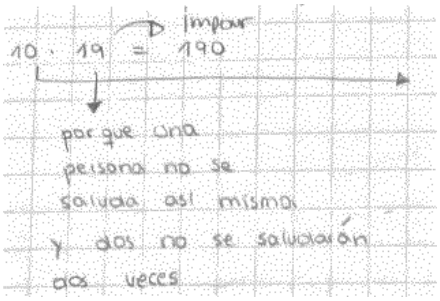


***Figura 9*:** Registro aritmético y condiciones del conteo E1 primera fase

En sus interacciones notamos que los estudiantes recurren a estas condiciones del saludo para argumentar sobre las cantidades que operan, por lo que realizamos una distinción entre la idea de expresar y argumentar dichas condiciones. Se evidencia la activación de la génesis discursiva.

Considerando lo observado del trabajo de los estudiantes y reconociendo lo que se moviliza en relación a la activación de las génesis semiótica, instrumental o discursiva, se identifican los siguientes descriptores rotulados S, I, o D haciendo referencia a la génesis que se identifica.

Tabla 1 : *Descriptores del ETM*

Descriptor	*Génesis Activada*
S_1: Utiliza un signo para expresar el saludo, el vínculo que debe contar. S_2: Utiliza un signo para expresar a los individuos. S_3: Utiliza un signo para expresar la cantidad de apretones que realiza cada individuo S_4: Utiliza un registro algebraico para expresar el cálculo total de apretones de manos.	*Génesis Semiótica*
I_5: Realiza el cálculo del total de apretones, por medio de la adición. I_6: Realiza el cálculo del total de apretones, por medio del producto.	*Génesis Instrumental*
D_7: Expresa las condiciones del saludo. D_8: Argumenta sobre los valores que involucra en el cálculo.	*Génesis Discursiva*

Conclusiones

Este problema tiene la potencialidad de activar las tres génesis que articulan el ETM personal del grupo de individuos que se involucran en esta tarea matemática.

Con respecto a la activación de la génesis semiótica, destacamos que en ambas etapas se reconoce el descriptor S4, recurriendo al lenguaje algebraico para expresar la conjetura. En la primera etapa se expresa de manera escrita, y en la segunda manera oral, y en ambos casos asociada a la palabra "fórmula". Se reconoce la activación de la génesis discursiva al expresar las condiciones del saludo y argumentar sobre

los valores involucrados en el cálculo. Se evidenciaron interacciones que propician la comunicación de resultados y el razonamiento matemático, lo que es una característica importante a destacar sobre el trabajo de los estudiantes y una de las riquezas de este problema. Respecto de la activación de la génesis instrumental, destacamos la importancia que posee el trabajo en torno a la división por dos. Este cálculo se abordó en la primera fase mediante la unión simétrica de los términos de la progresión, y en la segunda sólo se aborda desde la segunda condición del conteo, referida a la repetitividad del saludo.

Las conjeturas realizadas por los estudiantes se basan en la representación o traducción perceptual del problema (Cañadas, et al, 2008); se imaginan, sienten y realizan el saludo, poniendo en juego conocimientos provenientes de experiencias sensoriales y corporales. Podemos pensar que sus acciones son parte fundamental de sus procesos cognitivos. Alternativamente, para profundizar en el estudio, podemos considerar lo anterior desde la perspectiva de cognición corporizada, en la cual el cuerpo es más que sólo receptor de información, e interviene en el acto cognitivo: el conocimiento es enactivo (Lakoff & Nuñez, 2000), gestos y otros actos corporales no son sólo instrumentos de comunicación sino inherentes a la cognición.

El trabajo matemático observado posee la característica de ser aritmético-algebraico, por lo que estamos profundizando apoyados en el paradigma algebraico, ETM algebraico (Gamboa y Mena, 2015), que es una extensión del ETM a un dominio algebraico.

Reconocimiento: Financiado parcialmente proyecto FONDECYT 1171744.

Referencias bibliográficas

Barahona, C., Corrial, C. y Vicencio, D. (2015). *Situación didáctica: Generando instancias de conjetura*. Trabajo de Magíster no publicado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemáticas.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y Pasos. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 6*(3), 431-441.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. *Acta XII Simposio Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 113-140.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Gamboa, M. & Mena, A. (2015). Paradigmas Algebraicos. *Un aporte a la teoría del espacio de trabajo matemático*. Recuperado de http://villarrica.uc.cl/files/matematica/materialweb/CB%2032.pdf

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour L'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*(3), 283-312.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, *17*(1), 1-16.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. New York: Basic Books.

MINEDUC (2013). Ministerio de Educación Chile. *Bases Curriculares 2013. Matemática 7° básico a 2° medio*. Santiago: MINEDUC.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press. Traducción al castellano: J. Zugazagoitia, 1965, Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. *Cognitive Science and Mathematics Education*, *189*. University of California.

EJEMPLOS DE MIRADAS DIDÁCTICAS AD HOC EN PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE LA MATEMÁTICA EN CHILE

Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Se presenta un análisis desde una postura cognitiva, de distintos hechos didácticos específicos, a través de ejemplos. El primer y segundo ejemplo abordan desde la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska el concepto de cónicas y de Sistema de Números complejos, respectivamente. El tercer y cuarto ejemplo abordan, bajo el enfoque de la teoría APOE, los conceptos de raíz cuadrada y Fractal Triángulo de Sierpinsky. El Quinto ejemplo, muestra que teorías de la Didáctica de la Matemática se están utilizando para indagar en el aprendizaje de conceptos estadísticos, como el de variable aleatoria.

Palabras clave: análisis de actividades, teoría modos de pensamiento, teoría apoe

Abstract

This report shows an analysis of different specific didactic events from a cognitive stance, by using examples. The first and second examples address the concept of conics and Complex System of Numbers, respectively, from Anna Sierpinska's theory of modes of thinking. The third and fourth examples tackle the concepts of square root and Sierpinsky's Fractal Triangle, under the APOE theory framework,. The fifth example shows that mathematics education theories are being used to investigate the learning of statistical concepts, such as that of random variables.

Key words: analysis of activities, modes of thinking theory, apos theory

Introducción

En este reporte se presenta el análisis de cinco ejemplos (como casos de estudio (Stake, 2010)) desde dos referentes teóricos cognitivos de la Matemática Educativa –La teoría los Modos de Pensamiento de Sierpinska y la teoría APOE–, con la finalidad de mostrar a la comunidad cómo los elementos que constituyen estás teorías van explicando la comprensión y construcción de fragmentos de la matemática en los aprendices de Chile.

Marcos teóricos referenciales: Modos de pensamiento y Teoría APOE

La teoría de los Modos de pensamiento (MP) de Sierpinska (2000) y la teoría APOE (Arnon et al, 2014), son ambas de corte cognitivo, sin embargo, sus elementos y enfoques son diferentes. La teoría MP está interesada en hacer explícito el pensar teórico de la matemática y en propiciar que el aprendiz alcance la interacción entre lo teórico y lo práctico de tópicos matemáticos. En cambio, APOE está enfocada en explicar la construcción de fragmentos de la matemática a través de etapas previamente construidas y en ayudar a otros aprendices a que se apropien de los constructos que se precisan como previos, en el aprendizaje de nociones matemáticas específicas.

Con respecto a los elementos de ambas teorías, su razón de ser es que a través de ellos se pueden explicar obstáculos que se perciben en el proceso de enseñar y aprender la matemática, por ejemplo, la teoría MP atiende el obstáculo epistemológico de la convivencia de dos posiciones dogmáticas opuestas en la matemática *"una que rechaza los números dentro de la geometría (pensamiento práctico) y la otra que la geometría pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético (pensamiento teórico)"*. Entre tanto la teoría APOE, aborda el obstáculo de *"alcanzar en los aprendices niveles superiores de construcción en tópicos de la matemática"* a través de constructos previamente construidos, si el aprendiz no evidencia esos conocimientos –llamados previos–, es imposible que pase de un estado de construcción a otro superior.

Elementos de la teoría los Modos de Pensamiento

Los modos pensamiento de Sierpinska (2000) interpretan la comprensión de un concepto matemático, a través de sus elementos, estos son, el modo *pensamiento sintético-geométrico, el modo de pensamiento analítico-aritmético y el modo de pensamiento analítico-estructural*. Es precisamente estos dos últimos elementos, los encargados de hacer explícito el pensar teórico de un objeto de la matemática.

Cada uno de estos modos de pensamiento que es preferible considerarlos igualmente útiles, cada uno en su propio contexto, para propósitos específicos y principalmente cuando están interactuando.

En el modo de *pensamiento sintético-geométrico* (SG) los objetos matemáticos son atendidos directamente por la mente mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos, utilizando el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales. La visualización matemática (en el sentido de Zimmermann y Cunningham, 1991) juega un rol fundamental en lo que es la resolución de problemas en este modo de pensamiento.

En el modo de *pensamiento analítico-aritmético* (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas o simbólicas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de números reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como n-uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas, entre otros. Las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de "n-uplas" de números que satisfacen ciertas condiciones que son escritas.

El modo de *pensamiento analítico-estructural* (AE) va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Los objetos matemáticos son pensados a través de propiedades, o caracterizaciones a través de axiomas.

Para esta teoría comprender un objeto matemático, es poder abordarlo articuladamente (ir y venir) entre los modos de pensar: SG, AA y AE (Parraguez, 2012).

Elementos de la teoría APOE

La teoría APOE (Arnon, et al., 2014) es acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, y que en conjunto las etiqueta como construcciones mentales –existen variadas definiciones, pero en general se refiere a la organización de las ideas para intentar construir fragmentos de la matemática–, debido a su base piagetiana (Dubinsky, 1996), y constituyen una pieza fundamental, en la construcción de objetos matemáticos. Específicamente, una *construcción mental Acción* resulta de una operación mental, que obedece a un estímulo externo y repetible que transforma de alguna manera un objeto matemático, a través de la explicitación de todos sus pasos, y de cierta manera es algorítmica. La *construcción mental Proceso* resulta de la interiorización de una *Acción*. Esta construcción Proceso no se deja conducir por los estímulos externos, sino por los internos, y el estudiante ya no precisa hacer todos los pasos de una actividad matemática, explícitamente. También un *Proceso* es el resultado de la coordinación (como concatenación) de otros dos procesos. La *construcción mental Objeto*, resulta de la reflexión sobre las operaciones aplicadas en el proceso, que es dinámico inicialmente, y quien la posee puede actuar sobre el proceso, y también realizar transformaciones y pensarlo como algo estático, o como algo involucrado en sí mismo, es decir encapsulado. La *construcción mental Esquema***,** resulta de la organización de las construcciones acción, proceso, objeto y también otros esquemas previamente construidos en la mente de un aprendiz.

Ejemplos

Presentamos a continuación una descripción de 6 ejemplos (extraídos de los instrumentos diseñados para la de Fase de la Medición Inicial en el Proyecto Fondecyt Nº1180468), y analizados es este reporte como Casos de Estudio (Stake, 2010) a priori, a través de los referentes teóricos presentados.

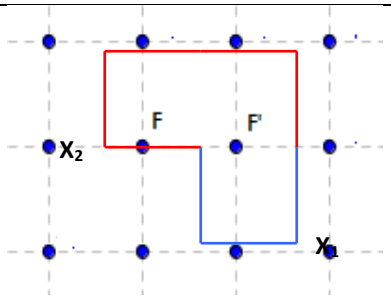
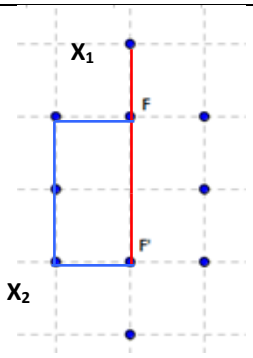
Primer Ejemplo: En la Geometría Discreta del Taxista

Justifica si la Cónica A y la Cónica B son elipses de focos F y F' en la Geometría Discreta del Taxista, donde la distancia se mide en cuadras horizontales o verticales.

Cónica A Cónica B

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este primer ejemplo se precisan en la Tabla 1, interpretadas desde los Modos de Pensar (Con base en Bonilla, Parraguez y Solanilla, 2014).

Tabla 1*: Respuestas del ejemplo 1 interpretadas desde los modos de pensar*

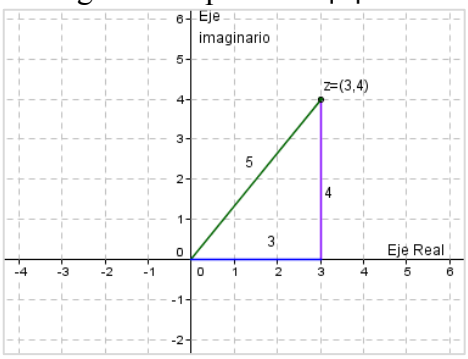
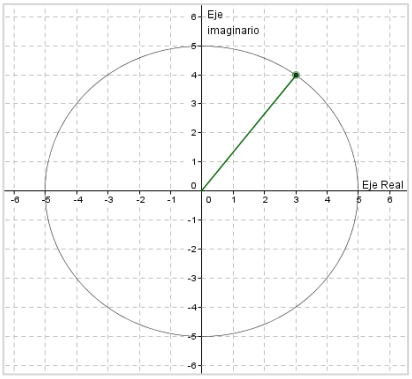
La Cónica A, no es una elipse, porque la suma de la distancia de cualquier punto digamos *X* a *F*, más la distancia de *X* a *F'* no es siempre constante.	**AA**
 Cónica A $d(X_1, F') + d(X_1, F) \neq d(X_2, F') + d(X_2, F)$  Cónica B $d(X_1, F') + d(X_1, F) = d(X_2, F') + d(X_2, F)$	**AA – SG**
La Elipse es el lugar geométrico de todos los puntos, cuya suma de las distancias de cualquier punto a los focos, es siempre una cantidad constante.	**AE**

Segundo Ejemplo: En el Sistema de los números complejos

Considere $Z \in \mathbb{C}$. ¿Qué números cumplen con $|Z| = 5$? Muestra tu resolución.

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este segundo ejemplo se precisan en la Tabla 2, interpretadas desde los Modos de Pensar (Con base en Randolph y Parraguez, 2015).

Tabla 2: *Respuestas del ejemplo 2 interpretadas desde los modos de pensar*

Determina casos particulares a partir de: $a^2 + b^2 = 25$, tales como $5i,\ 5,\ 3+4i,\ 4+3i$ (y sus opuestos).	**AA**
Trabaja casos particulares en el plano complejo, apoyándose en el triángulo rectángulo de hipotenusa $\|z\|$. 	**SG**
Relaciona que si $\|z\| = 5 = \sqrt{a^2 + b^2}$ y apoyándose del plano complejo, sostiene que la solución son los puntos de la circunferencia definida por $a^2 + b^2 = 5^2$. 	**AA – SG**

Tercer Ejemplo: En la Función raíz cuadrada

Supongamos que el Texto A afirma que $\sqrt{9} = \pm 3$, *y el Texto B afirma que* $\sqrt{9} = 3$.
¿Cuál de los dos textos afirma lo correcto?

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este tercer ejemplo se precisan en la Tabla 3, interpretadas desde los elementos de la teoría APOE (Con base en Gamboa, Parraguez y Vásquez, 2014).

Tabla 3: *Respuestas del ejemplo 3 interpretadas desde APOE*

$\sqrt{x}$ es una función de variable real, con dominio y recorrido establecidos. $\sqrt{\ }: \mathbb{R} \underset{x \to \sqrt{x}}{\to} \mathbb{R}_0^+$	**Función Raíz cuadrada como construcción mental Objeto**
Evaluando $x = 9$ en la función $\sqrt{\ }: \mathbb{R} \underset{x \to \sqrt{x}}{\to} \mathbb{R}_0^+$, se obtiene que $\sqrt{9} = 3$.	**Función Raíz cuadrada como construcción mental Proceso.**

Cuarto ejemplo: En el Fractal Triángulo de Sierpinsky

Etapa 1 *Etapa 2* *Etapa 3*

¿Cuál es la figura de la etapa 5?

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este cuarto ejemplo se precisan en la Tabla 4, interpretadas desde los elementos de la teoría APOE (Con base en Gutiérrez y Parraguez, 2015).

Tabla 4: *Respuestas del ejemplo 4 interpretadas desde APOE*

La figura de la Etapa 1, como iniciador de Fractal.	**Iniciador como construcción mental proceso**
La figura de la etapa 2, como Generador de Fractal.	**Generador como construcción mental Objeto**

La figura de la etapa 3, autosimilitud a escala.	**Autosimilitud proceso resultante de la coordinación entre los procesos iniciador y generador**.
La figura de la etapa 5, como generalización de la autosimilitud.	**Generalización del proceso de autosimilitud.**

Quinto ejemplo: En la Variable Aleatoria

Considera el experimento de lanzar dos monedas, no cargadas.
a) Escribe el espacio muestral del experiemnto.
b) Define una variable aleatoria para el experimento.

Posibles respuestas a la actividad matemática presente en este cuarto ejemplo se precisan en la Tabla 5, interpretadas desde los elementos de la teoría APOE (Con base en Salazar y Parraguez, 2013.

Tabla 5: *Respuestas del ejemplo 5 interpretadas desde APOE*

Se describen los elementos del espacio, de acuerdo a los elementos C (cara) y S (sello) de una moneda cualquiera: $E = \{(C,C),(C,S),(S,C),(S,S)\}$ La cardinalidad del espacio muestral está determinada por el principio multiplicativo.	**Espacio muestral como construcción mental Proceso.**
Se define una función, desde el espacio muestral E hacia el conjunto de los números reales (o bien intervalo $[0,1]$.	**Coordinación de los procesos Dominio de una función y Variable aleatoria, mediante el concepto de asociación única.**

A modo de conclusión

A través de estos cinco ejemplos, se ha mostrado cómo los elementos de estas dos teorías –
MP y APOE– explican e interpretan la actividad mental, cuando un aprendiz (hipotéticamente hablando) se enfrenta a una tarea de Matemática, lo que constituye el quehacer paradigmático e interpretativo de la Educación Matemática, desde marcos teóricos explícitos.

Cabe señalar que las respuestas dadas para cada uno de los ejemplos presentados, reúnen elementos dados a priori por un investigador que trabaja adherido a una u otra teoría, y para lo cual precisa describir la matemática desde los elementos de las teorías de la Matemática Educativa que operacionaliza en su investigación. Los ejemplos 1 y 2 interpretan el pensar práctico y el pensar teórico de un tópico matemático y los ejemplos 3, 4 y 5 muestran estados de construcción de conceptos matemáticos, según el investigador haga referencia a cuestiones estáticas o dinámicas del concepto, y que sintonizan con la intención de un instrumento investigativo, para que posterior a su aplicación se convierta en un documento de análisis, el cual podrá ser examinado por el investigador a través de la técnica mostrada, de acuerdo con los fines que se precise en el diseño metodológico trazado para tal o cual investigación.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido parcialmente subvencionada por el proyecto FONDECYT Nº1180468.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Bonilla, D., Parraguez, M. y Solanilla, L. (2014). Las cónicas: Una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 779-786. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática, 8*(3), 25-41.

Gamboa, M., Parraguez, M. y Vásquez, P. (2014). *Construcción cognitiva de la raíz cuadrada.* En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 191-198. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gutiérrez, X. y Parraguez, M. (2015). *Elementos para las construcciones mentales del Fractal Triángulo de Sierpinski.* En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 345-352. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática*. Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática-PUCV.

Salazar, R. y Parraguez, M. (2013). Diseñando una Descomposición Genética para el objeto variable aleatoria. *Revista de Educación Matemática RECHIEM*, *7*(1), 241-247.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. En *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Randolph, V. y Parraguez, M. (2015). Comprensión de los números complejos desde los modos de pensamiento. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 401-409. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. *Mathematical Association of America*, Notes, 19.

A COLA (IN)CONVENIENTE

Juliana Alves de Souza, Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. (Brasil); Universidade Estadual de Londrina. (Brasil)
jullyana_allves@hotmail.com, reginaburiasco@gmail.com

Resumen

Este trabajo es una parte de una investigación de doctorado en desenvolvimiento que busca aliar la copia tradicionalmente utilizada entre los estudiantes a un proceso de subversión, que parte de una conducta común de los estudiantes a una estrategia docente. El objetivo es investigar la utilización de la copia en una prueba-escrita-en-fases como estrategia docente que puede favorecer el aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemática. Para ello se toma la Educación Matemática Realística como enfoque de enseñanza y la evaluación como oportunidad de aprendizaje para viabilizar la utilización de la copia en la prueba.

Palabras clave: educación matemática; evaluación del aprendizaje; copia; estrategia docente.

Abstract

This work is part of an ongoing PhD research that attempts to link the cheat, traditionally used among students, to a process of subversion, starting from a common behaviour of students to a teaching strategy. The purpose of this work is to investigate the use of cheat in a phase-written-test as a teaching strategy that can facilitate learning in the initial training of mathematics teachers. For this, Realistic Mathematics Education is taken as a teaching approach and evaluation as a learning opportunity to avoid the use of the cheat in the test.

Key words: mathematical education. learning assessment; cheat; teaching strategy.

Introdução

A cola sempre está presente em dias de provas escritas de todos os níveis de ensino. Manifesta-se de forma silenciosa, ocorre de forma rápida e gera adrenalina pelo risco da descoberta que a acompanha. Tradicionalmente vista como aliada pelos alunos, mas como grande inimiga pelos professores, a cola é universal, é o que afirma Abrantes (2008) apoiado em relatos de cola em todos os países do mundo. Segundo ele, é estimado que cerca de 90% dos brasileiros já tenham colado ou usado artifícios não autorizados em provas ou trabalhos pelo menos uma vez na vida.

Como a prova desperta uma forte carga emocional no aluno, como ansiedade, medo da nota baixa e da reprovação, nervosismo, dúvidas, insegurança, esquecimento etc., a cola pode parecer um meio de diminuir a ansiedade, uma fuga ao fracasso ou uma porta de escape à prova que tem poder de gerar notas

baixas, reprovação além de refletir na imagem pessoal. Ou seja, para os alunos, ela pode ser entendida como uma estratégia de defesa.

Para os professores, a cola é tida como uma inimiga, uma vez que desafia seus métodos avaliativos, suas escolhas metodológicas, seu domínio de sala de aula e até mesmo sua presença nela. Um ambiente pautado no ensino transmissivo de conteúdos, no qual, cabe ao professor "passar" a informação e ao aluno captá-la e repeti-la, com a avaliação restrita à prova escrita e medidora, mostra-se favorável à manifestação da cola.

As estratégias de cola vêm sendo melhoradas com o tempo e as formas mais antigas perdem espaço para as mais modernas e criativas. Em consequência disso, para minimizar e evitar os casos, os professores tomam algumas medidas para inibir (tais como separá-los, aplicar provas diferentes) ou, punir o aluno que for apanhado colando (retirar a prova, atribuir nota zero).

Contudo, Krause (1997) analisa que os mais variados mecanismos de controle terminam por legitimar e convidar à prática da cola, pois um número pequeno de alunos, em relação ao número real de infratores, é "pego" colando, o suficiente apenas para manter a impressão de controle. "Se o aluno quiser colar, uma infinidade de procedimentos poderão estar a sua disposição. O problema, assim, estaria em definir quais medidas seriam necessárias para poder eliminá-la ou, até mesmo, refletir se a 'cola' poderia ter sua eliminação possível" (Iocohama, 2004, p. 27).

Por outro lado, essa prática acadêmica ainda permanece sem debate crítico dentro das universidades, desconsiderando-a como sinal de alerta e de discussão dos processo de ensino, de aprendizagem e avaliação.

Em outras palavras, a cola resiste às investidas de sua eliminação. As medidas preventivas e repreensivas tomadas por professores e instituições levam apenas a uma mudança de estratégia da cola e ao seu aperfeiçoamento, possibilitando conjecturar que não há efetividade de qualquer que seja o instrumento de vigilância e repressão. Então, uma vez que medidas de inibição não têm sido suficientes, novos olhares, sob outras perspectivas, têm mostrado caminhos e possibilidades, como por exemplo, tomar a cola como aliada, relativizar padrões, descriminalizá-la. A finalidade de sua utilização é a obtenção de nota, contudo propomos trazer esse recurso para ajudar o aluno a estudar, como um meio de ensino que pode oportunizar a aprendizagem.

A estratégia que lançamos é a de nos aliarmos à cola, num processo de subversão, isto é, de transformação de uma conduta comum dos discentes em uma estratégia docente. Utilizá-la como uma ferramenta a mais para o estudo e a aprendizagem. O intuito não é promover a cola tradicional, mas reformulá-la e utilizá-la, investigando potencialidades. A intenção é contribuir com a aprendizagem e a formação de futuros professores, já que, após leituras e releituras para a construção da cola, reflexões e análises, os envolvidos poderão construir ideias e conceitos do assunto em questão.

Perspectivas teóricas e metodológicas

A Educação Matemática Realística (RME) é tomada como abordagem para o ensino de matemática. Hans Freudenthal na década de 1960 na Holanda, em oposição ao Movimento da Matemática Moderna,

apresenta a RME uma abordagem que diz respeito a um conjunto de atitudes relacionado com a maneira de o professor trabalhar, de conduzir sua aula, na qual os alunos são guiados a elaborar seus conhecimentos (Silva, 2015).

Uma aula pautada nos princípios da RME não se inicia com exposição de conteúdos, mas com tarefas e situações nas quais o aluno possa chegar num determinado tipo de matemática e depois ter condições de aplicá-la em outras situações. Essa condução está presente nas atitudes do professor, na maneira como ele organiza a sua aula e faz questionamentos aos estudantes. O valor da produção do estudante está no que ele fez, e não no que deixou de fazer. O que ele fez torna-se um ponto de partida para que o professor encontre uma maneira de caminhar com ele. O erro e o acerto são utilizados como ponto de partida para o estudante avançar (Silva, 2015).

A atitude frente à produção escrita do aluno não é a de validar ou não, mas de provocá-lo, instigá-lo a dar mais um passo, quem sabe fazer uma nova descoberta. A avaliação não é engessada, mas tomada como oportunidade de aprendizagem em que o aluno é estimulado a pensar, pesquisar e estudar. A partir das situações trabalhadas, os estudantes podem caminhar rumo a um novo aprendizado. Uma intenção da avaliação como oportunidade de aprendizagem é constituir uma ocasião conveniente ao ato de aprender, aspirando a formação do estudante (Pedrochi Junior, 2012).

Até o momento, a cola foi utilizada em duas provas escritas com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. A primeira em 2015, na qual foi aplicada uma prova escrita, pautada em um texto, a 13 alunos do terceiro semestre do curso. Eles receberam o texto com antecedência e puderam elaborar uma cola manuscrita em um quarto da folha A4, frente e verso. A escolha do tamanho é arbitrária, nesse caso, ele foi assim delimitado para que o aluno seja levado a fazer escolhas, já que nesse espaço é possível escrever bastante coisa, mas não copiar todo o texto. Antes e depois da realização da prova, foram feitos questionamentos aos alunos sobre suas estratégias de construção da cola e de suas expectativas.

A segunda, em 2016, nos meses de março e abril, a cola foi utilizada em uma prova-escrita-em-fases com nove alunos do quarto semestre do curso, pertencentes à mesma turma da primeira. O principal objetivo era: investigar a utilização da cola em uma prova-escrita-em-fases como estratégia docente na formação inicial de professores de matemática.

A prova em fases consiste em uma prova que, inicialmente, o aluno resolve na sala de aula sem quaisquer indicações do professor e num tempo determinado. Nas fases seguintes, podem dispor de mais tempo e dos comentários que o professor formulou ao avaliar as resoluções anteriores. Pires (2013, p. 33) indica que esse formato de avaliação permite que o aluno volte a refletir sobre o que ele já escreveu apoiado nas observações do professor e, é possível, que com os questionamentos do professor, o aluno avance em algumas ideias oportunizando aprendizagem. Os questionamentos e comentários do professor (específicos para cada aluno) são trabalhados de modo que o aluno possa avançar para além do que produziu, num processo dinâmico e interativo.

A prova em fases permite, por um lado, que o aluno erre sem ser penalizado, favorece sua evolução tanto com o erro quanto com o acerto. Por outro lado, possibilita ao professor perceber se seus questionamentos fizeram sentido para o aluno, favorecendo a comunicação entre ambos. O aluno é avaliado por sua produção nas distintas fases, uma vez que com esse andamento, as questões acabam se modificando e também a produção. Isso decorre das intervenções do professor e da retomada do aluno. Além disso, a

dinâmica dessa prova favorece o uso da cola, a discussão fora da sala de aula e o diálogo do estudante com o professor enquanto é avaliado.

De acordo com Hadji (1994), o instrumento de avaliação formativa mais adequado é aquele que permite dialogar com o aluno enquanto este efetua a sua aprendizagem, numa perspectiva de avaliação como *feedback*. Ele é informado sobre sua produção durante o processo e não apenas ao final, quando nada mais poderá fazer (Pires, 2013). A avaliação formativa tem como principal característica ser integrada na ação de formação e no próprio ato de ensino. Seu principal objetivo é "contribuir para melhorar a aprendizagem em curso, informando o professor sobre as condições em que está a decorrer essa aprendizagem, e instruindo o aprendente sobre o seu próprio percurso, os seus êxitos e as suas dificuldades" (Hadji, 1994, p. 63). Ela oportuniza a aprendizagem com vistas à formação, permite ao estudante saber o que dele é esperado, para que possa se situar em função disso, compreender seus erros e ser capaz de ultrapassá-los (Hadji, 1994). O instrumento de avaliação prova em fases, vem ao encontro dessa perspectiva avaliativa.

A prova-escrita-em-fases realizada em 2016 foi composta por sete questões que envolviam conceitos de matemática do Ensino Fundamental e Médio (Educação Básica). Os alunos deveriam escolher apenas seis questões para resolver assim como a ordem na qual fariam. Puderam também produzir três colas: uma para a primeira e a segunda fases, outra para a terceira e a última para a quarta, quinta e sexta fases. A cola foi manuscrita ocupando um dos lados de um quarto de folha A4. Foram concedidos dez minutos para eles conhecessem as sete questões, escolhessem as seis que resolveriam e a ordem em que isso seria feito. Em cada fase eles recebiam as provas com os comentários do professor para que continuassem a produzir. Para diferenciar a produção de uma fase para outra, eles utilizavam uma caneta de cor diferente.

A cada fase intervíamos nas produções dos alunos de maneira a guiá-los para além de suas produções, tanto nos erros quanto nos acertos. A intenção das fases em conjunto com as colas, é que estas "evoluam" de uma fase a outra e que suas construções sirvam de disparador para o estudo dos discentes.

Ao final do processo foi realizada uma discussão com a turma com vistas a proporcionar um espaço de formação levando-os a pensar sobre seu processo de aprendizagem a partir da utilização da cola na prova-escrita-em-fases. Nesse espaço, alguns dos pontos discutidos foram: as estratégias mobilizadas para a construção da cola, o que foi incluído (o que se sabe ou que não se sabe); como ela foi utilizada; como o estudante avalia a cola produzida em relação ao que achava que precisava e ao que realmente precisou; se houve cópia ou cola de cola; se tal uso diminuiu a tensão ou o nervosismo no momento de realizar a prova; como eles analisaram a possibilidade de ver a prova antes de sua aplicação e poder produzir uma cola para a sua resolução; se isso tornou as "coisas" mais fáceis; o que eles tinham a dizer sobre a prova com cola em fases realizada; o que pensaram inicialmente sobre a proposta da prova com cola em fases e o que pensavam ao final; se as intervenções de cada fase serviram para estudo e pesquisa dos conceitos envolvidos; como eles lidavam de uma fase para a outra diante de uma pergunta ou questão que não conseguiam responder (procuravam os colegas para discutir, pesquisavam, estudar pra pôr na cola, as trocas e discussões sobre a prova entre eles); aspectos positivos e negativos percebidos nessa estratégia avaliativa.

Atualmente, tanto as produções dos alunos como a sistematização da discussão final estão sendo analisadas sob a perspectiva da pesquisa qualitativa, com ênfase na exploração das informações que envolvem a situação em estudo, as manifestações dos envolvidos, seguindo um processo de afunilamento, sem preocupação em comprovar ou refutar hipóteses, mas em conhecer e compreender um processo

(Ludke, Andre, 1986). Em pesquisas dessa natureza, o pesquisador procura compreender e, mais do que testar teorias, interessa-se em buscar novas formas de problematizar, entender e olhar a realidade (Garnica, 2004).

Referencias bibliográficas

Abrantes, J. (2008). *Quem não cola não sai da escola?*. Rio de Janeiro: Wak Ed.

Garnica, A. V. M. (2004). História Oral e Educação Matemática. In: M. de C. Borba, J. de L. Araujo (orgs.), *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática* (pp. 79-100). Belo Horizonte: Autêntica Editora, 9 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Hadji, C. (1994). *A avaliação, regras do jogo*. Portugal: Porto.

Iocohama, C. H. (2004). Reflexões sobre a "cola" nas avaliações do curso de direito e indicação de uma alternativa viável para sua superação. *Revista de Ciências Jurídicas e Sociais da Unipar* [*online*], 7(1), 25-40.

Krause, G. B. (1997). *Cola, sombra da escola.* Rio de Janeiro: EdUERJ, Escola Parque.

Lüdke, M. & André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

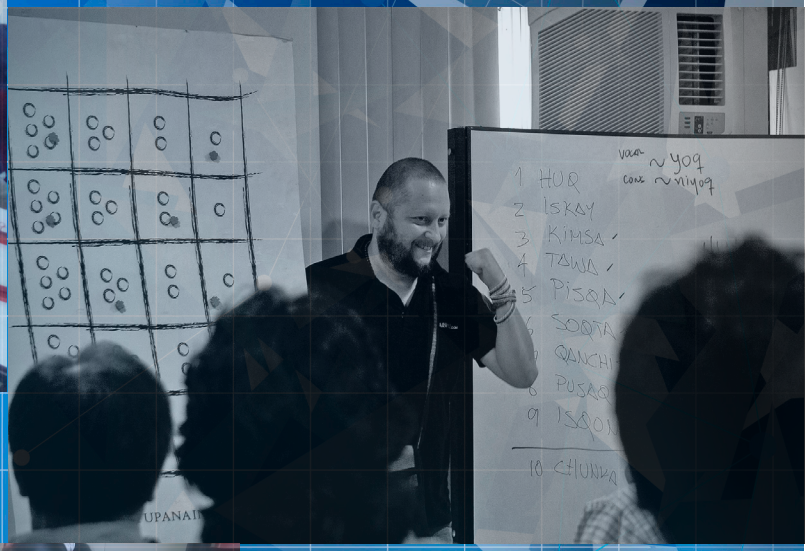
Pedrochi Junior, O. (2012). *Avaliação como oportunidade de aprendizagem em Matemática.* Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, Brasil.

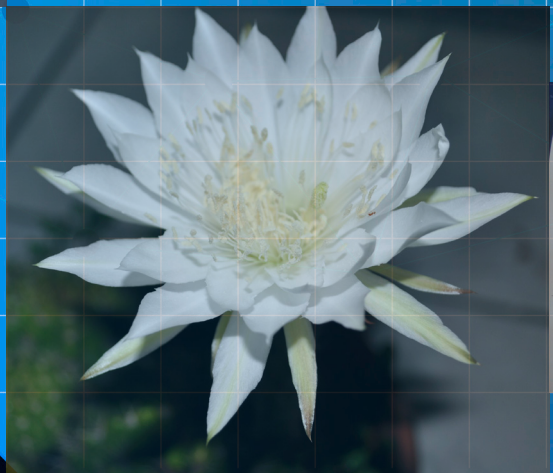
Pires, M. N. M. (2013). *Oportunidade para aprender: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases.* Tese de doutorado, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, Brasil.

Silva, G. dos S. (2015). *Uma configuração da reinvenção guiada.* Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, Brasil.

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR





LA ETNOMATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ZONA RURAL

Jesús Vilchez Guizado
Universidad nacional Hermilio Valdizán de Huánuco. (Perú)
jjevilchez17@gmail.com

Resumen

El presente informe está orientado a evaluar la implementación de la enseñanza-aprendizaje de la matemática sustentada en la exploración de los recursos etnomatemáticos con fines educativos. El objetivo del estudio fue determinar la incidencia de los recursos del entorno en el desarrollo del pensamiento numérico, algebraico y geométrico de los estudiantes en instituciones educativas de zona rural. La metodología utilizada fue la de investigación-acción; sustentada en el desarrollo de actividades de construcción del conocimiento matemático, a partir de los recursos naturales y artificiales existentes en el contexto donde se realiza el proceso didáctico. Los resultados se obtuvieron de un proceso de seguimiento sistemático de los estudiantes, sustentado en el registro de las clases, observación de actividades, aplicación de rúbrica y pruebas de evaluación. Esto permitió concluir que el aprendizaje de la matemática es más significativo cuando se aborda desde el contexto sociocultural a través de la interacción entorno-estudiante-profesor.

Palabras clave: competencia matemática, etnomatemática, recurso didáctico, aprendizaje significativo

Abstract

The present report is aimed at evaluating the implementation of the mathematics teaching-learning process based on the exploration of ethno-mathematical resources for educational purposes. The objective of the study was to determine the incidence of environmental resources in the development of numerical, algebraic and geometric thinking of students in rural educational institutions. The methodology used was that of action- research, based on the development of mathematical knowledge construction activities, from the natural and artificial resources existing in the context where the didactic process takes place. The results were obtained from a systematic follow-up process of the students, based on the records of the lessons, the observation of activities, the use of rubrics and proofs. This allowed us to conclude that mathematics learning is more significant when it is approached from the socio-cultural context through the environment-student-teacher interaction.

Key words: mathematical competence, ethnomathematics, didactic resource, meaningful learning

Introducción

La presencia de la matemática en el proceso educativo responde a tres tipos de argumentos: su *valor formativo* expresado en el desarrollo de capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción,

rigor y precisión; *su utilidad* en las formas de expresión humana que permiten codificar información y obtener una representación del medio social y natural, para realizar una actuación posterior sobre ese medio; la *formación intelectual* de los estudiantes, sustentado en un desarrollo continuo y progresivo, que se expresa en dos indicadores principales: su capacidad de expresión verbal, que se pone de manifiesto en su dominio del lenguaje, y su capacidad de razonamiento (Rico, 1998).

Con el transcurrir de los años, el reto que día a día enfrentan los docentes de matemática en las sociedades del siglo XXI es la heterogeneidad y la diversidad cultural cada vez más acentuadas en los estudiantes de los diversos niveles educativos. La multiculturalidad social va generando la adecuación a determinadas prácticas pedagógicas en el mundo de la enseñanza. Hasta la década de los 80 del siglo pasado, se creía que solo las ciencias humanas tenían influencia de los fenómenos culturales y del ambiente, y otras disciplinas como la matemática se consideraban inalterables ante el fenómeno de la multiculturalidad, es decir, como una ciencia libre de valores e influencias culturales.

Actualmente, para la realización de cualquier actividad, es fundamental tener como referencia los conocimientos ancestrales y la cultura de los pueblos (etnomatemática), que sirven como medio y recurso para gestionar y resolver problemas de la realidad desde una perspectiva matemática. Por ello, la UNESCO (2012) promueve el estudio de la equidad en la educación y sugiere que los curriculums deben ser sensibles a la diversidad cultural, emitiendo aportes de las nociones epistemológicas relacionadas con la visión sociocultural de las matemáticas en los esfuerzos que se realizan en los contextos socio políticos, teniendo en cuenta la diversidad cultural en un mundo globalizado.

Según lo afirmado, para plasmar un proceso de enseñanza-aprendizaje eficiente de la matemática en la educación de la zona rural, la etnomatemática se ha convertido en un medio y recurso importante para viabilizar el aprendizaje, logrando mucha vigencia en los últimos años, pues se ha convertido un agente catalizador del proceso didáctico. La puesta del proceso de aprendizaje contextualizado motiva a los docentes a crear y recrear sus propios medios y materiales para optimizar su acción docente, e invita a los estudiantes a reflexionar acerca del valor de los recursos de la comunidad que coadyuvan en el desarrollo de su capacidad de motivación y emprendimiento en la resolución de problemas, conducente al logro de aprendizajes significativos en el área de matemática, en los distintos dominios que se incluyen en el programa.

Planteamiento del problema

En la educación actual, las TIC son un fenómeno que permea cualquier actividad social y representa un reto para los docentes que han tenido que adaptarse a los nuevos procesos de la era digital. Esta adaptación se hace muy difícil para la mayoría de los docentes que aún no han incursionado adecuadamente en el mundo tecnológico y más aún en la integración de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ello, respecto a las TIC, es inevitable preguntarse: ¿es factible su uso en el aula de clase con fines didácticos?, ¿ayuda al profesor en la planeación, ejecución y evaluación de su práctica docente?, ¿ayuda al estudiante a resolver matemáticamente problemas de su contexto?, ¿cómo se deben utilizar los recursos del contexto en el proceso de enseñanza de la matemática?, ¿la etnomatemática puede ayudar a la construcción de conceptos matemáticos y a la resolución de problemas? Entre el dilema de las TIC y la etnomatemática, desde la perspectiva de la investigación, orientado al uso del recurso del entorno natural y cultural con fines de mejorar el proceso didáctico, el estudio estuvo pretende responder la pregunta:

¿Qué efectos produce el uso de la etnomatemática como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en los estudiantes del nivel de educación básico en la zona rural?
El objetivo del estudio fue implementar y valorar la etnomatemática como medio y recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en los estudiantes del segundo grado de educación secundaria en las zonas rurales de la provincia de Huánuco. Teniendo como objetivos específicos: (1) desarrollar los contenidos *conceptuales, procedimentales y actitudinales* en el área de matemática usando como recurso el entorno que propicien aprendizajes significativos de los contenidos curriculares y que refuercen en su desarrollo integral; (2) evaluar el logro de aprendizajes conceptuales, procedimentales y actitudinales en el área de matemática, a través de la etnomatemática, de los estudiantes del segundo grado de secundaria de zona rural; (3) plantear y resolver problemas que desarrollen el pensamiento numérico, algebraico y geométrico de los estudiantes del segundo grado de secundaria de la provincia de Huánuco, Perú.

Marco teórico

En la investigación se utilizaron elementos teóricos referidos a la matemática educativa y a la etnomatemática, teniendo como fundamento que la teoría y la práctica de matemática son parte de la cultura humana, por ende, todo lo que se descubra, se aprenda y se diga será heredado, por eso todo lo que se va a transferir a los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, eliminando el temor y teniendo en cuenta que la matemática no es ajena a la realidad, pues está en todos lados, en nuestro interior y exterior; sustentado en la conducta de los pueblos expresadas a través de sus respectivas tradiciones culturales (White, 1988).

La matemática es un producto natural, se trata de una idea a la vez sencilla y profunda, sencilla porque el sentido común nos dice que todo conocimiento tiene que ser un producto cultural; es una idea profunda a causa de su desarrollo potencial en el terreno de la matemática educativa, los aspectos significativos en la generación de nuevos conocimientos y el desarrollo de la ciencia (Bishop, 1999). Bajo esta premisa se habla de etnomatemática.

El surgimiento de la etnomatemática como planteamiento global de investigación tiene su origen documentado en el Quinto Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME5), celebrado en Australia en 1984, y más concretamente en la sesión plenaria coordinada por el profesor Ubiratán D'Ambrosio (1985) y titulada *Socio-Cultural Bases for Mathematical Education*. Desde este acontecimiento se puso de manifiesto la necesidad de producir trabajos de investigación que sirvan como fundamento para atender la Educación Matemática desde una perspectiva sociocultural y el desafío que suscita el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, en concordancia con el contexto donde se lleva a cabo el proceso, sea este rural o urbano.
Blanco (2008, p. 4) señala que para la etnomatemática

> …las matemáticas se consideran como un constructo social y humano, que responde a las necesidades particulares de una sociedad en espacios y tiempos diferentes. Es comúnmente aceptado que una comunidad desarrolla prácticas y reglas matemáticas con su propia lógica para entender, lidiar y manejar la naturaleza. En ella también es fundamental la presencia de

otras disciplinas como la sociología, la educación, la antropología, y la historia de las matemáticas.

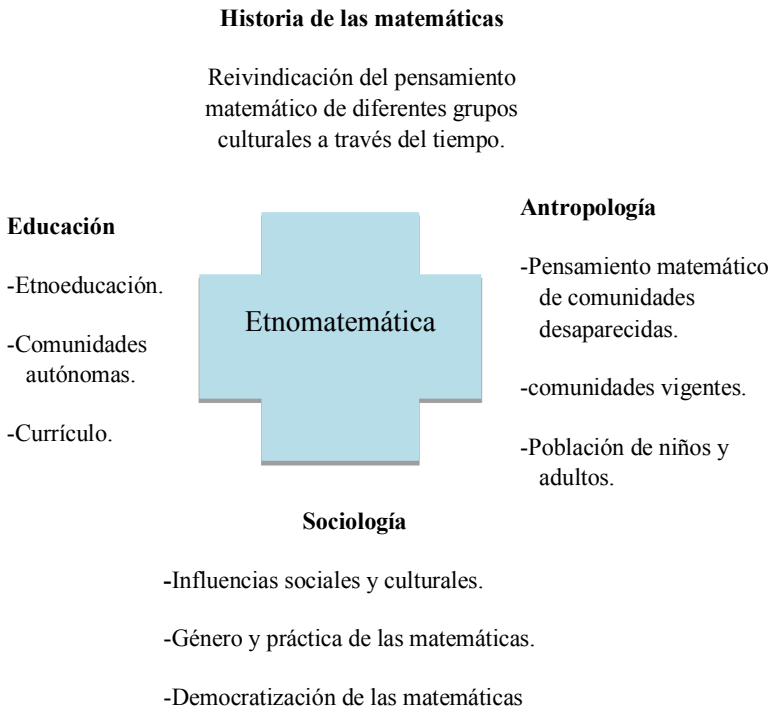


Figura 1. Relación de la etnomatemática con otras disciplinas, adaptación de (Blanco, 2008)

Por la intervención de otras disciplinas, la etnomatemática como un programa de investigación se ha enriquecido y complejizado cada vez más; debido a que el estudio desde este enfoque posee diferentes dimensiones, entre estas, la dimensión conceptual, histórica, cognitiva, epistemológica, política y educacional. En ésta última dimensión se plantea la propuesta educacional de la etnomatemática, que privilegia las inferencias cualitativas, relacionando las diferentes manifestaciones culturales como el arte o la religión, y está relacionada con una concepción holística y multicultural de la educación. A través de la etnomatemática se puede ofrecer la educación dotado de instrumentos comunicativos, analíticos y materiales para que las personas puedan generar capacidades críticas en una sociedad multicultural (D'Ambrosio, 2002). Con la propuesta pedagógica (uso de la etnomatemática como recurso didáctico), se busca hacer una matemática más vivencial, lidiando con situaciones reales en un tiempo y un espacio, constituyéndose en un camino para una educación renovada, capaz de preparar generaciones futuras para construir un mundo más feliz y en paz, desde lo individual, social y ambiental.

Por otro lado, D'Ambrosio (2005) considera necesario identificar y clasificar los conocimientos matemáticos, para generar materiales contextualizados para los entornos escolares de dichas comunidades. Este proceso requiere indagaciones de la naturaleza antropológica y etnológica, donde es posible mostrar diversos hallazgos etnográficos considerados como aportes a la dimensión histórica de los conocimientos

matemáticos, como un producto del quehacer humano; y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas surgidas desde la realidad. Desde esta perspectiva, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática establece conexiones entre cultura, matemática, historia, geografía, antropología y otras ciencias sociales; a partir del conocimiento matemático de los pueblos que se expresan a través de los cálculos y mediciones que realizan en sus diferentes actividades (caminos, árboles, diseños, cerámica, arte rupestre, rocas, sembríos, etc.).

Los recursos etnomatemáticos se constituyen en un recurso primario para el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática; y la investigación acción nos hace ver que un cambio en el currículo es una acción que implica una modificación intencional de la realidad. Esta acción conlleva a consecuencias que modifican esa realidad específica, independientemente de si la acción tiene éxito o no en términos de su intención de cambio (Kemmis y McTagart, 1988).

Metodología

El método de investigación predominante fue la cualitativa, a través del cual fue posible indagar, analizar e interpretar las ideas y conceptos matemáticos de los estudiantes su reflexión, su acervo cultural y social en donde actúa y se desarrolla. El estudio se realiza en la modalidad de investigación acción, con interacción permanente entre los sujetos de estudio (estudiantes) y el investigador (docente de la asignatura de matemática). La población de estudio estuvo conformada por los estudiantes de segundo grado de educación secundaria de las instituciones educativas rurales de la provincia de Huánuco. La muestra para el proceso investigativo estuvo conformada por 15 estudiantes de segundo grado de secundaria rural de la provincia de Huánuco, Perú.

Para abordar el proceso de enseñanza de la matemática en el segundo grado de secundaria se utilizaron los recursos naturales, artificiales y sociales existentes en las inmediaciones de la institución educativa rural de Huancanyacu-Huánuco, poniéndose en práctica el método de investigación acción durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. A través del método se tuvo una aproximación hacia el éxito del acto didáctico, debido a que los estudiantes encontraron una motivación intrínseca para realizar sus actividades de aprendizaje tanto individual como grupal. Para este propósito se planifica y ejecuta un diseño didáctico en el área de matemática, teniendo en cuenta el contenido del programa curricular (saber), el contexto sociocultural y físico (entorno), y la interacción docente-estudiante dentro del proceso didáctico; cuya finalidad fue dinamizar y reforzar la ejecución de actividades tendientes al desarrollo del pensamiento numérico, algebraico y geométrico.

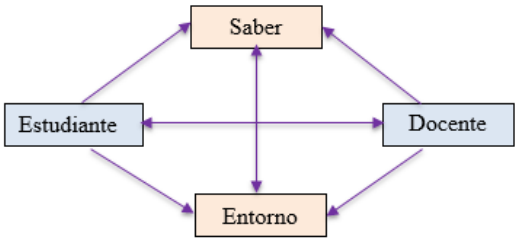


Figura 2. Estructura de la actividad didáctica en el contexto de la etnomatemática.

El uso de la Etnomatemática como recurso para el proceso de investigación-acción nos dio pautas para actuar en la institución y en el aula de clases, haciendo que nuestros intereses, valores, normas, metas y objetivos, planes y programas, recursos y evaluaciones, se hagan de manera contextualizada. De esta manera una acción realizada o una acción por realizar, fueron sometidas a un proceso de análisis que obligaron a reflexionar de manera más profunda y objetiva sobre el quehacer pedagógico en el área rural. Durante el proceso didáctico, se desarrollan contenidos dando prioridad al desarrollo del dominio numérico, algebraico y geométrico de los estudiantes, del contenido del programa. Observa figura 3.

Figura 3. Estudiantes del segundo grado de secundaria en proceso de estudio de las fracciones.

Respecto al desarrollo de *pensamiento numérico*, tuvo como propósito el desarrollo de:
Competencia: Resuelve problemas de cantidad
Capacidades: Traduce cantidades en expresiones numéricas, Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.

Problema: Juliana puede cosechar 15 arrobas de duraznos en 36 minutos. Ella quiere saber: (a) cuántos minutos tomará cosechar 45 arrobas de durazno si mantiene el mismo ritmo, (b) si vende a S/. 4.00 el kg, ¿a cuánto ascendería la venta de lo cosechado en 2 horas?

Datos

15 arrobas	36 minutos		15 arrobas	36 min
45 arrobas	¿…? 108		¿…?	120 min = 2 h

Respuestas:

a) $¿...? = \frac{45 \times 36}{15} = 108 \text{minutos.}$

Como 1 arroba equivale a … kg, una arroba cuesta 4×11,5 = S/.46.00

b) $¿...? = \frac{15 \times 120}{36} = 50$ arrobas. En consecuencia, la venta asciende a 50×46 = S/. 2300.00

Respecto al desarrollo de *pensamiento algebraico*, tuvo como propósito el desarrollo de:
Competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
Capacidad: Comunica comprensión sobre las propiedades algebraicas.

Problema: Anatolio, en su cosecha, vende 30 fanegas de trigo: a Metodio vende 7 fanegas más que a Demetrio; a Demetrio 6 fanegas menos que a Eleuterio, y a Eleuterio el doble de lo que le vende a Mauricio. ¿Cuántos kilogramos de trigo compró Martina?

Resolución

Compradores	Fanegas de trigo	Anatolio
Metodio	$(2x - 6) + 7$	30 fanegas
Demetrio	$2x - 6$	
Eleuterio	$2x$	
Mauricio	x	

¿Cuántas fanegas de trigo compró cada uno? ……

Respecto al desarrollo de *pensamiento geométrico*, tuvo como propósito el desarrollo de:
Competencia: Resuelve problemas de forma movimiento y localización
Capacidades: Modela objetos en formas geométricas y sus transformaciones, Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas. Con recursos de la figura 4.

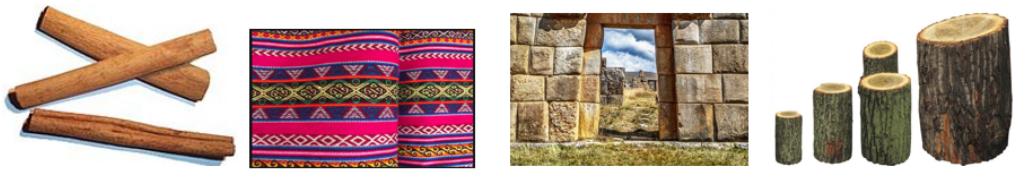


Figura 4. Recursos del contexto (para generación y resolución de problemas geométricos)

Resultados

La evaluación del aprendizaje se da en el sistema vigesimal (de 0 a 20), a través de la media aritmética de la nota grupal; mientras la opinión valorativa, de la experiencia, por parte de los estudiantes, se expresa en porcentajes. Bajo esta premisa, la implementación de la etnomatemática como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje, para:
El proceso de desarrollo del pensamiento numérico (traduce cantidades en expresiones numéricas y realiza cálculos y operaciones con números) que tiene como propósito proporcionar elementos didácticos para la implementación de clases más asertivas y dinámicas, enmarcadas dentro del contexto sociocultural de los estudiantes; en la evaluación de este rubro tuvieron como promedio la nota 17, y en la encuesta, correspondiente, más del 88% de lo califican de muy buena.
En el proceso de desarrollo del pensamiento algebraico (resolución de problemas, resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio y utilización de propiedades algebraicas) en los estudiantes de segundo grado de secundaria, fue considerada como muy buena por el 90% de los participantes; y en la evaluación de este rubro se tuvo como promedio la nota 16.
Mientras que, en el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico (modela objetos en formas geométricas y sus transformaciones, comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas),

sustentado en objetos de formas geométricas del entorno y sus medidas, en la resolución del cuestionario de evaluación se tuvo como promedio la nota 18, y más del 92% de los estudiantes califican de muy bueno el uso de la etnomatemática como recurso didáctico para su aprendizaje.
De los resultados expuestos, se puede deducir: los recursos didácticos para la implementación de clases asertivas y dinámicas, enmarcadas dentro del contexto sociocultural de los estudiantes (etnomatemática), facilitan el logro de aprendizaje de la matemática a través del desarrollo del pensamiento numérico, algebraico y geométrico que fueron significativos con un promedio de nota 17; asimismo, según la encuesta de opinión, la estrategia de enseñanza y aprendizaje de la matemática implementada fue considerada como muy bueno, aproximadamente por el 90% de los participantes.

Conclusiones

En términos generales, la mayoría de los estudiantes expresaron su conformidad respecto a la enseñanza recibida mediante el uso de la etnomatemática, reconociendo estos recursos como motivadores e importantes para su aprendizaje. Pues, la etnomatemática es parte de la cultura de los pueblos en general y fundamentalmente de las comunidades rurales, al igual que su lengua y sus costumbres, están conexos por siempre a su desarrollo en el contexto social donde se desarrollan.
El estudio de la matemática, en forma contextualizada, genera en los estudiantes compromiso y motivación para aprender, y el docente diseña actividades de aprendizaje de manera estratégica en función del desarrollo de los procesos cognitivos a partir de los conocimientos previos que el estudiante posee, respetando el contexto sociocultural y lingüístico.
El estudio de la matemática mediado por recursos del contexto conlleva a un aprendizaje objetivo y significativo, respetando la idiosincrasia y diversidad cultural de los estudiantes en colegios de zonas rurales, a partir de objetos concretos hasta proceso formales y abstractos, el mismo que refuerza en forma sostenida sus competencias, tecnológicas, y sociales.
La enseñanza de la matemática a través de recursos etnológicos con interacción directa de los estudiantes con el entorno social, cultural y físico, repercute en un proceso educativo con equidad y pertinencia, conduciendo al estudiante al desarrollo de su pensamiento numérico, algebraico y geométrico que fortalece el desarrollo de sus competencias matemáticas; haciendo que la mayoría se sientan satisfechos por los aprendizajes logrados en el tema estudiado y se motiven para el estudio de otros tópicos de la matemática utilizando como recurso didáctico los elementos de la etnomatemática.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

Blanco, H. (2008). *La integración de la etnomatemática en la etnoeducación. En encuentro colombiano de Matemática Educativa.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/ 8741/11Conferencias.pdf.

D'Ambrosio, U. (1985). *Socio-Cultural Bases for Mathematics Education.* Campinas, Brasil: UNICAMP.

D"Ambrosio, U. (2002). *Educació matemática, etnomatemática i pau. Perspectiva Escolar*, 284, 15-22.

D'Ambrosio, U. (2005). *O Programa Etnomatemática como uma proposta de reconhecimento de outras formas culturais. Yupana,* 2(5); 63-71.

Kemmis, S. y McTagart, R. (1988). *Como planificar la investigación acción*. Barcelona: Laertes.

Rico, L. (1998). *Concepto de currículum de desde la educación matemática*. Revista de Estudios del Currículum Vol. 1, Nº 4, pp. 7-42. (1998). Recuperado de file:///C:/Users/Compaq/ Downloads/488-1443-1-PB%20(1).pdf

UNESCO (2012). *Challenges in basic mathematics education*. París. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf

White, L. (1988). *La ciencia de la cultura: un estudio sobre el hombre y la civilización*. Barcelona: Círculo de lectores.

LA CULTURA, LA ECONOMÍA Y LO SOCIAL COMO FACTORES ASOCIADOS A LA I+D. LA PREVIA ASOCIACIÓN LINEAL ENTRE HABILIDADES MATEMÁTICAS E I+D

Gonzalo Pacheco Lay, Vladimir Mendoza Aguilar
Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (Perú)
gpachecol@unmsm.edu.pe, 0611314@unmsm.edu.pe

Resumen

Los estudios sobre crecimiento económico son de tiempo atrás. En los últimos lustros, los trabajos de investigación han incorporado el capital intelectual o, lo que es lo mismo, las habilidades cognitivas para entender las variaciones del producto bruto interno por habitante de los países. En la investigación se supone que analizar las diferencias en el número de investigadores implica abordar la habilidad matemática. Así, el estudio evalúa un modelo de factores asociados sobre investigadores en I+D (investigación y desarrollo) de un grupo de países. Incluyendo variables relativas a las dimensiones cultural, económica y social, los resultados son los esperados y, además, estadísticamente significativos.

Palabras clave: Cultura, Economía, Habilidad matemática, I+D, Social

Abstract

The studies on economic growth belong to some time ago. In recent years, the research reports have focused knowledge capital, or, in other words, cognitive skills to understand the variations in the gross domestic product per habitant of the countries. In the research, it is assumed that analyzing the differences in the number of researchers involves addressing mathematical ability. Thus, the study evaluates a model of associated factors about R&D (research and development) researchers in a group of countries. Including variables related to cultural, economic and social dimensions, the results are the expected ones; moreover, they are statistically significant.

Keywords: Culture, Economy, Mathematic skill, R&D, Social

Introducción

Desde inicios de la década de 1990, el Perú ejecuta un programa acelerado de cambios en lo económico, lo social y lo político. En el marco del ajuste estructural, los sucesivos Gobiernos identifican a la educación como uno de los factores para enrumbar al país por la senda del crecimiento económico y el desarrollo humano, es decir, el largo plazo.

A partir del siglo XXI, la educación peruana es caracterizada por tres sucesos. El primero está relacionado con el rendimiento del estudiante de 15 años representativo en las pruebas internacionales PISA. Como es

de dominio público, las pruebas PISA miden habilidades (matemática, comunicación y ciencias) para la vida y los resultados de Perú en cuatro evaluaciones de habilidad matemática son los siguientes: en el 2001+ (versión PISA extendida), el estudiante peruano promedio ocupó el puesto 41 de igual número de economías participantes; en el 2009, el puesto 63 de 65; en el 2012, la posición 65 de igual número de economías; y en el 2015, el lugar 62 de 70.

La economía peruana ha desarrollado un ritmo creciente de su producción en los últimos 65 años (1950-2015). Si se considera el producto bruto interno por habitante, el despegue económico arrancó a inicio del primer año del presente siglo. Al mismo tiempo, el país conoció de dos hechos internacionales: primero, el crecimiento sostenido del precio de las materias primas en el mercado mundial y, por tanto, un entorno económico favorable para la exportación de productos naturales; y, segundo, como ya sabemos, los resultados del estudiante promedio peruano en las pruebas internacionales PISA.

El tercer suceso está relacionado con el malestar social de la población peruana. Desde el 2003, los sucesivos gobiernos realizan esfuerzos por trasladar a la población su diagnóstico educativo: la «baja calidad» o, lo que es lo mismo, el nivel bajo del rendimiento académico estudiantil. Siendo preciso, el gobierno de Alejandro Toledo, a mediados del 2003, declaró en emergencia la educación a partir de la difusión de los resultados del país en la prueba PISA 2001+. Durante el periodo 2008-2015, sin embargo, la estadística de la protesta social en las diez regiones de mayor conflictividad del país demuestra un sector educativo con padres de familia y estudiantes sin expresión de malestar por el servicio recibido (Basombrío, Rospigliosi y Valdés, 2016).

Según lo escrito, los hechos demuestran lo siguiente: i) las habilidades matemáticas del estudiante peruano típico son escasas y su bajo nivel es, en el tiempo, sistemático; ii) la economía peruana crece sin necesidad del capital humano calificado; y iii) la demanda educativa pública, sobre todo, no revela malestar por un servicio de «baja calidad», calificación dada y difundida por las autoridades del Ministerio de Educación. En conjunto, el diagnóstico muestra un plano de la realidad educativa del país.

Problemas de investigación

A partir de los tres sucesos señalados en el Perú y considerando el ámbito internacional (país o economía) como un laboratorio de experiencias desarrolladas para aprender y extraer conclusiones, los problemas de investigación son los siguientes:

1. ¿Es posible asociar dimensiones analíticas, como las creencias y valores, que tengan sentido en el marco de la teoría del crecimiento económico?
2. ¿Qué factores (cultural, económico y social) asociados a investigadores en I+D presentan una relación directa y estadísticamente significativa?
3. ¿Tiene un papel central la habilidad matemática en la calidad de vida del habitante?

Resulta importante anotar que las tres preguntas están relacionadas a la matemática educativa. En palabras breves, habilidad matemática e investigadores en I+D son, probablemente, indicadores de diferentes dimensiones analíticas del «saber matemático» y, dependiendo de sus resultados, expresiones modernas

del «aprendizaje». Y las creencias y valores (cultura) serían uno de los lados del encuadre a los indicadores antes mencionados.

Antecedentes

La presente sección organiza información de trabajos de investigación centrados en cuatro temas: creencias y valores, social, investigadores en I+D, habilidades cognitivas y desarrollo humano. Comenzamos desarrollando el primero de ellos.

La idea de civilización universal es desarrollada por Huntington (2001). Según el autor, el concepto implica «la confluencia de la humanidad y la creciente aceptación de valores, creencias, orientaciones, prácticas e instituciones comunes por pueblos y personas de todo el mundo» (p. 49). Así, la cultura aparece como un elemento ordenador de la historia de la humanidad. Barro y McCleary (2002), por su parte, aportan información sobre religión y política económica basada en datos de panel (en el periodo 1981-1999 y una muestra de 59 países). Los resultados estadísticos demuestran el enlace participación y creencias religiosas - rendimiento económico e instituciones políticas.

Inglehart y Welzel (2008) encuentran evidencia empírica, a partir de la información de 80 países, de la «polarización entre valores tradicionales (la religión es central) y valores seculares-racionales (la religión es menos central)» (p. 6) y, además, revelan «la importancia del control tecnológico para minimizar (la creencia sobre) los poderes sobrenaturales» (p. 27).

Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014) aportan sobre la «construcción social del conocimiento matemático» (p. 92). En pocas palabras, la democratización del aprendizaje de la matemática conlleva a entender el «saber» desde tres fuentes: popular, técnica, y culta, y ello implica que «las matemáticas, como parte de la cultura, se construyen a partir de vivencias cotidianas de los individuos a través de prácticas socialmente compartidas» (p.112). Por consiguiente, el respeto a las distintas formas de prácticas matemáticas es parte de la construcción de la identidad de un «programa latinoamericano» (Cordero y Silva-Crocci, 2012, pp. 296-297).

Respecto del tema social, Heckman (2007) plantea la salud a temprana edad y, por ello, destaca la importancia del cuidado de la salud por sus efectos, a futuro, en las habilidades cognitivas y no cognitivas, como autorregulación, motivación, uso del tiempo, visión de futuro y otros más. Es menester mencionar que «la educación es también un importante predictor de las disparidades de la salud», según Grossman (2000) y Smith (2007), citados por Heckman (2007, p. 2).

A partir del primer lustro del presente siglo, abordando el tema investigadores en I+D, los jóvenes de quince años de un grupo creciente de países empezaron a ser evaluados periódicamente en tres competencias para la vida: matemática, comunicación y ciencias, en el marco de las pruebas PISA. Empleando la base de datos con información de 39 países, Pacheco, Vásquez e Inga (2009) aportaron evidencia de la asociación lineal (valor del coeficiente de correlación: $r=0.65$; nivel de significancia: $p<.01$) entre competencia matemática e investigadores en I+D.

Hanushek & Woessman (2015) presentaron los resultados de una investigación econométrica en torno al crecimiento económico de las naciones. Empleando el concepto capital intelectual o, lo que es lo mismo, habilidades cognitivas, los autores «explican gran parte de las diferencias en el crecimiento a largo plazo observado en el mundo durante el último medio siglo» (p. 2). Más aún, Pacheco (2016) aporta evidencia de los pares de asociaciones lineales establecidos mediante el coeficiente de correlación (r) entre los resultados de las pruebas de competencias para la vida (PISA) de los seis procesos desarrollados a la fecha (PISA 2001+, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015). El análisis de los datos revela una relación directa y, además, estadísticamente significativa ($p<.01$) en la totalidad de combinaciones. Por lo tanto, las habilidades (matemática, lectura y ciencia) conjuntas del estudiante promedio de un país o economía están interrelacionadas.

La calidad de vida es abordada por el desarrollo humano. Según el Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo (1990), el desarrollo humano es «un proceso mediante el cual se amplían las oportunidades de los individuos (…)» (p. 33). La oportunidad es, sin duda, la piedra angular de toda una nueva perspectiva teórica respecto a la manera de explicar al ser humano en las opciones de asignación de recursos de la economía pública, sobre todo.

Marco teórico

Suponga una economía que presenta la siguiente función de producción macroeconómica:

$$Q = f(F_1, F_2, \dots, F_n)$$

Según Weil (2006), la relación implica que los n factores especificados se transforman, en el tiempo, en producción (Q) nacional o macroeconómica. Todavía más, la función permite observar, adicionando algunos supuestos económicos y procedimientos matemáticos, las diferencias en el nivel y la tasa de crecimiento de la producción macroeconómica de las economías. A propósito, en el crecimiento económico a largo plazo, Hanushek & Woessman (2015, pp. 9-78) formulan la siguiente ecuación:

$$g = \gamma H + \beta X + \varepsilon$$

Así, la tasa de crecimiento macroeconómico por habitante de un país o economía (g) está influenciada por las habilidades de los trabajadores (H) y un vector (X) de variables que agrupa el nivel inicial de la producción macroeconómica por habitante, las instituciones económicas (apertura económica, fertilidad, protección contra la expropiación, entre otras) y el término estocástico (ε). Ahora bien, las habilidades de los trabajadores (H) son una variable del capital humano y aquella, en el tiempo, presenta una gama de aproximaciones métricas que incluye el nivel de escolaridad y, desde hace tres lustros, las habilidades en matemática y ciencia, principalmente, que se adoptan para la fórmula antes identificada.

Entendiendo que las habilidades de los trabajadores son un concepto general y reconociendo, por lo señalado, la dinámica de las medidas del capital humano resulta probable tener una aproximación a la noción de capital humano, en el corto plazo, desde la variable investigadores en I+D, toda vez que las economías o países están en un franco proceso de competitividad. Así, la variable investigadores en I+D puede devenir importante.

Modelo, hipótesis y resultados

El modelo, que representa una relación directa de la variable investigadores en I+D (Re: The World Bank, 2017) con cada uno de los factores asociados: valores y creencias secular/tradicional (VB: World Values Survey, 2009), productos exportados con alta tecnología (HTE: The World Bank, 2017) y esperanza de vida saludable al nacer (EVS: Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo, 2009), y las hipótesis nulas (H_o) del trabajo de investigación sometidas a análisis estadístico y prueba de significancia, respectivamente, son las siguientes:

$$\mathrm{Re} = f(\overset{+}{\mathrm{VB}}, \overset{+}{\mathrm{HTE}}, \overset{+}{\mathrm{EVS}}) \quad \{H_0: \alpha_1 = 0;\ H_0: \alpha_2 = 0;\ H_0: \alpha_3 = 0$$

La técnica estadística empleada para obtener los parámetros del modelo es mínimos cuadrados ordinarios. Mediante su uso, los datos formaron una matriz de 45 filas (países) y 4 columnas (variables). Las variables registran valores promedios (2001-2010) o un punto en el tiempo (2008 y 2009). Los resultados de la regresión pueden ser observados en la tabla 1.

Tabla 1. Factores asociados a investigadores en I+D

Variable	Coeficientes	
Constante	-4409.9	*
VB	408.3	*
HTE	38.6	**
EVS	57.1	*
Nota: n = 45 R^2 = 0.65 F = 25.83 *p<.01 **p<.05		

Fuente: Tabla 1A.

Para finalizar la sección, la asociación lineal entre el índice del desarrollo humano (Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo, 2009) y el número de investigadores en I+D es elevada (r=0.72) y estadísticamente significativa (p<.01).

Conclusiones

Las conclusiones del trabajo de investigación son las siguientes:
El capital humano es un concepto relevante de la teoría del crecimiento económico y, como se vio, la habilidad cognitiva (en matemática, sobre todo) es un indicador. No obstante, los Estados son soberanos y deciden graduar el contenido y la intensidad de conocimientos que los estudiantes aprenden (creencias y valores, en conjunto, es el factor decisor). Así, el capital humano está integrado por habilidades cognitivas, creencias y valores.

En torno al modelo I+D:

Los valores y las creencias tienen un papel importante en la decisión de formar a los investigadores en I+D. La sociedad industrial o posindustrial para su desarrollo necesita de la racionalidad (creencia) para estimular a sus ciudadanos a valorar la educación y un tipo particular de contenido (matemática) a desarrollar en aula.

La decisión institucional de producir y exportar bienes con elevado componente tecnológico también estimula a tener un mayor número de investigadores en I+D. La decisión de cada país, ante la disyuntiva de exportar materias primas o productos con alto valor agregado, tiene efecto directo en el número y la calificación de los investigadores.

Un potencial investigador en I+D no se desarrolla, desde que nace, en el vacío. En efecto, la necesidad de estimular políticas de un mínimo de garantía social permite que los ciudadanos tengan la mayor probabilidad de tener una esperanza de vida saludable. Un entorno social saludable genera competencias de tipos cognitivo y no cognitivo.

Al parecer, la condición previa al modelo I+D es entender la importancia de las matemáticas en la economía. En otras palabras, la creencia de una mayor racionalidad debe conducir, en el presente, a decidir por investigadores en I+D.

La calidad de vida o el desarrollo humano está asociado de manera directa a investigadores en I+D. Por ello, si el conocimiento —digamos, la matemática— tiene un uso, es por razones «heterodoxas» (Sen, 2001, p. 8).

Referencias bibliográficas

Barro, R., & McCleary, R. (2002). *Religion and political economy in an international panel* (Working Paper 8931). Massachusetts: National Bureau of Economic Research.

Basombrío, C., Rospigliosi, F., y Valdés, R. (2016). *Conflictos sociales en el Perú. Un análisis a profundidad a partir de la evidencia empírica*. Lima: Capital Humano y Social S.A. y Fundación Konrad Adenauer.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemática y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática educativa, identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(3), 295-318.

Hanushek, E., & Woessmann, E. (2015). *The knowledge capital of nations: Education and the economics of growth*. Massachusetts: The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology.

Heckman, J. (2007). *The economics, technology and neuroscience of human capability formation* (Discussion Paper 2875). Germany: Institute for the Study of Labor - IZA.

Huntington, S. (2001). *El choque de civilizaciones. Y la reconfiguración del orden mundial*. Buenos Aires: Paidós.

Inglehart, R., & Welzel, C. (2008). *Modernization, cultural change and democracy. The development sequence*. New York: Cambridge University Press.

Pacheco, G. (2016). *Análisis conjunto de las competencias para la vida en matemática, comunicación y ciencias*. Documento en proceso, Facultad de Educación, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Pacheco, G., Vásquez, A., e Inga, M. (2009). Asociación entre las dimensiones educativa, tecnológica, social y económica en un grupo de naciones de alto y medio desarrollo humano. *Investigación Educativa*, *13*(24), 59-89.

Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo – PNUD (1990). *Desarrollo humano. Informe 1990*. Colombia: Tercer Mundo Editores, S.A.

Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo – PNUD (2009). *Informe sobre desarrollo humano 2009. Superando barreras: Movilidad y desarrollo humanos*. México D.F.: Mundi-Prensa Libros, S.A.

Sen, A. (2001). History and the enterprise of knowledge. *Social Scientist*, *29*(1/2), 3-15.

The World Bank (2017). *Indicators*. Recuperado de http://data.worldbank.org/indicator

Weil, D. (2006). *Crecimiento económico*. Madrid: Pearson Educación, S.A.

World Values Survey (2009). *Wave 5. World values survey*. Recuperado de https://web.archive.org/web/20131019112321/http://www.worldvaluessurvey.org/wvs/articles/folder_published/article_base_54

Apéndice

Tabla 1A. Datos por países empleados en el modelo I+R y asociación lineal Re e IDH

País / Economía	Investigadores en I+D (Re)	Valores y creencias (VB)	Productos exportados con alta tecnología (HTE)	Esperanza de vida saludable al nacer (EVS)	Índice de desarrollo humano (IDH)
Argentina	870	3.68	7.92	69	0.866
Australia	4182	5.42	12.92	75	0.970
Brazil	567	3.04	13.22	66	0.813
Bulgaria	1358	7.26	5.50	69	0.840
Burkina Faso	47	2.36	6.95	43	0.389
Canada	4234	4.48	13.97	75	0.966
Chile	326	3.26	5.30	72	0.878
China	843	6.60	27.07	68	0.772
Colombia	147	1.26	5.27	69	0.807
Ethiopia	28	3.70	2.96	51	0.414
France	3416	6.26	21.22	76	0.961
Germany	3527	7.62	16.29	75	0.947
Ghana	28	1.12	1.85	50	0.526
Hong Kong SAR, China	2353	7.40	14.43	68	0.944
India	146	4.28	6.65	57	0.612
Indonesia	144	4.06	13.66	61	0.734
Italy	1439	5.26	7.75	76	0.951
Japan	5201	8.92	21.74	78	0.960
Malaysia	717	3.54	52.27	66	0.829
Mali	34	2.50	5.38	43	0.371
Mexico	327	2.06	19.28	69	0.854
Moldova	655	5.94	4.35	63	0.720
Morocco	670	2.36	9.14	63	0.654
Netherlands	2967	6.42	26.72	74	0.964
New Zealand	3205	5.00	9.39	74	0.950
Norway	4907	7.78	16.79	74	0.971
Poland	1566	3.44	4.01	70	0.880
Republic of Korea	4029	6.22	30.75	74	0.937
Romania	949	4.22	5.65	68	0.837
Russian Federation	3263	5.98	11.30	65	0.817
Rwanda	11	1.86	21.37	44	0.460
Singapore	5281	3.92	54.26	75	0.944
Slovenia	2803	6.46	5.64	74	0.929
South Africa	361	2.82	5.58	48	0.683
Spain	2491	5.18	6.64	76	0.955
Sweden	5445	8.72	15.16	75	0.963
Switzerland	3373	6.48	24.32	76	0.960
Thailand	305	3.72	27.47	65	0.783
Turkey	609	3.22	2.00	67	0.806
Ukraine	1410	5.60	4.67	64	0.796
United Kingdom	3863	5.12	25.63	73	0.947
United States	3792	3.38	28.00	72	0.956
Uruguay	419	4.26	3.75	70	0.865
Vietnam	114	4.40	6.46	66	0.725
Zambia	41	3.46	1.27	40	0.481

Nota. Re (unidad de medida=investigadores, valor promedio 2001-2010), VB ((unidad de medida=puntos, los datos de cada país son generados entre 2005-2009. El índice original (Io), en el intervalo [-2.5, 2.5], fue transformado a la escala [0, 10], mediante la fórmula ((Io/2.5) *5)+5), HTE (unidad de medida=tanto por ciento, dato promedio 2001-2010), EVS (unidad de medida=años, 2009), IDH (unidad de medida=puntos, 2007).

LA ANALOGÍA ENTRE EL CALOR Y LA ELECTRICIDAD. UNA BASE PARA CONFRONTAR EL OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO SUSTANCIALISTA EN LA ELECTRICIDAD EN ESCUELAS DE INGENIERÍA

Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
jesus.hinojos@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen

En el presente documento, pretendemos mostrar que, históricamente, en el desarrollo de la electricidad como ciencia existe un fuerte uso del recurso de la analogía como una forma de modelación, particularmente por medio de la similitud entre la electricidad y el calor, que en sus inicios tuvo como obstáculo epistemológico un paradigma sustancialista, pero al confrontarlo se dio un cambio a un paradigma no sustancialista, por lo que nos preguntamos, ¿es posible identificar elementos que permitan confrontar el pensamiento sustancial en las obras originales de científicos del siglo XIX?

Palabras clave: analogía en ingeniería, pensamiento sustancialista, pensamiento matemático avanzado

Abstract

In this paper, we aim to show that, historically, in the development of electrical sciences, the analogy as a resource for modelling is broadly used, in particular, by the similarity between electricity and heat, but in its origin, it was worked biased in a substances, and epistemological obstacle, that when confronted, it caused a shift from a substantial way of thinking to a non-substantial one, as such we ask ourselves: Is it possible to identify elements that would allow us to confront the substantial way of thinking in the original work of scientists/electricians from the 19th century?

Keywords: analogy in engineering, substancialist thinking, advanced mathematical thinking

Introducción

En el presente escrito se reporta un avance de una investigación doctoral en el marco de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013), donde tomamos como punto de partida el estudio de las nociones de estabilidad en una población particular: la comunidad de ingeniería en electrónica.

En Hinojos y Farfán (2017), mostramos de manera breve el denominado discurso matemático escolar, referente a la serie de Fourier en ciencias de la ingeniería e ingeniería aplicada. En ese momento nos

preguntamos, ¿por qué se utiliza la serie de Fourier en ingeniería electrónica?, y tras realizar una revisión de programas de estudio, identificamos que la serie de Fourier se encuentra, escolarmente, en el estatus de una herramienta de aplicación, es decir, se enseña como una matemática a aplicar en problemas específicos, de manera que se presenta como un conocimiento descontextualizado de su *origen*.
Lo anterior derivó a realizar una revisión bibliográfica, con la finalidad de identificar aquellos contextos, tanto escolares como no escolares, de la ingeniería electrónica donde se utiliza la serie de Fourier; de dicha manera encontramos que en los contextos no escolares se habla de la *noción de estado estacionario* de los sistemas electrónicos y las maneras de hacer más eficiente un sistema (que el estado estacionario sea alcanzado en un tiempo menor), sin embargo, en el contexto escolar, sólo encontramos la serie de manera explícita.
Preguntándonos acerca del *origen* del uso de la serie de Fourier en ingeniería electrónica, se estudió en primera instancia el trabajo de Farfán (2012), de donde se identifica el ambiente fenomenológico utilizado por Fourier: La propagación del calor; por lo que actualmente nos preguntamos ¿qué relación existe entre la propagación del calor y la electricidad?, esto nos llevó a identificar en Narasimhan (1999) que la obra de Fourier tuvo influencia en diversas disciplinas científicas durante el siglo XIX, en particular, para nuestro interés, nos enfocamos en los trabajos de electricidad desarrollados por Ohm, Thomson y Maxwell.

Además de lo anterior, damos evidencia de la presencia de un obstáculo epistemológico, denominado pensamiento sustancialista (PS), que según Bachelard (2000), consiste en atribuirle características a un fenómeno, a partir de la percepción directa de los sentidos, dándole un estatus de sustancia a cosas que no lo son.

Revisión de las obras de Ohm, Thomson y Maxwell

¿Qué encontramos en el libro de Ohm?

La revisión de las obras originales de científicos del siglo XIX consiste en una fase que, en Socioepistemología denominamos *problematización del saber*, donde identificamos la evolución pragmática del conocimiento matemático.

Acevedo (2004), menciona que durante el siglo XVIII, las ciencias eléctricas se encontraban arraigadas a un paradigma de pensamiento newtoniano, donde la atracción entre los cuerpos en el espacio se da de manera instantánea, sin necesidad de un medio material e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que los separa, este paradigma de pensamiento predomino en los trabajos de Charles Coulomb, donde estableció la manera de calcular la fuerza de atracción o repulsión entre cargas eléctricas; este paradigma de pensamiento predominó hasta los trabajos de Thomson y Maxwell, donde se adoptaron nuevos paradigmas, uno de ellos fue el de la teoría analítica del calor. El uso de la teoría analítica del calor se dio en el desarrollo de las ciencias eléctricas como una forma de modelación, a través de la analogía entre los fenómenos.

En el trabajo de Ohm, identificamos que la hipótesis de Fourier que dice que *el flujo de calor es proporcional al grado de temperatura*, le permitió comparar el efecto de la fuerza electroscópica (voltaje) con la temperatura y la conducción eléctrica con el flujo de calor.

En su libro *Die galvanische kette* (Ohm, 1827), menciona:

> Die Form und Behandlung der so erhaltenen Differenzialgleichungen ist denen für die Wärmebewegüng durch Fourier und Poisson uns gegebenen so ähnlich, dals sich schon hieraus, wenn auch weiter keine andern Gründe vorhanden wären, der Schluss auf einen innern Zusammenhang zwischen beiden Naturerscheinungen mit allem Rechte machen lielse, und dieses identitätsverhältnils nimmt zu, je weiter man es verfolgt (Ohm, 1827, p. 5).

Donde menciona que la estructura y forma de las ecuaciones diferenciales que obtiene al analizar el fenómeno eléctrico es similar a las de la teoría del calor de Fourier y Poisson, a tal grado que ambos fenómenos se vuelven más conexos y correspondientes conforme profundiza en su estudio.

Otra comparación que Ohm realiza entre ambos fenómenos es que el movimiento de la electricidad se da de una partícula a la inmediatamente adyacente a esta en una sola dirección y no a una más alejada antes (la misma consideración que Fourier realiza en su teoría del calor); además, al obtener la ecuación diferencial que modela a la difusión de la electricidad en un alambre, menciona:

> Wenn die Erfahrung lehrte, dafs verchiedene Körper von einerlei Ausdebnungsgrösse durch dieselbe Elektrizitätsmenge eine verschiedene Aenderung in ihrer elektroskopischen Kraft erleiden, so müsste zu vorigem Ausdrucke noch ein diese Eigenthümlichkeit der verschiedenen Körper messender Koeffizient γ gefügt werden. Die Erfahrung hat über diese aus dem Verhalten der Wärme zu den Körpern entlehnte Muthmalsung noch nicht entschieden (Ohm, 1827, p. 119).

Donde escribe que el coeficiente γ de la ecuación $\gamma \frac{du}{dt} = \chi \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{bc}{\omega} u$ es equivalente, según teoriza, con la capacidad calorífica de los cuerpos, sin embargo, experimentalmente no lo puede demostrar.
A lo largo de su trabajo, Ohm realiza ciertas consideraciones respecto a la naturaleza de la electricidad, entre ellas podemos identificar el uso de expresiones tales como: el movimiento de la electricidad, el fenómeno eléctrico actúa, la fuerza electroscópica (u) que depende de la distancia (x) que recorre la electricidad y el tiempo (t), entre otros. Estos argumentos al explicar la naturaleza de la electricidad dejan ver que la considera como una sustancia.
Finalmente, en cuanto a las consideraciones respecto a la naturaleza estable del fenómeno, una de las soluciones que da Ohm a la ecuación diferencial es la siguiente:

$$u = \frac{a}{2l}x + a\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i\pi}{i^2\pi^2 + l^2}\right) sen\left(\frac{i\pi(x+l)}{l}\right) e^{-\frac{\chi' i^2\pi^2 t}{l^2}}\right]$$

Que corresponde a la consideración de un circuito que no es independiente del tiempo y que recibe una cierta influencia de la atmósfera. La naturaleza estacionaria de esta solución consiste en que, cuando el tiempo tiende al infinito, el término que contiene a la sumatoria tiende a cero y el valor de la fuerza electroscópica (u) alcanza un valor estacionario en el circuito.

¿Qué encontramos en la obra de Thomson?

Acevedo (2004), menciona que los primeros trabajos de Thomson acerca de la electricidad se orientaban a la búsqueda de analogías matemáticas entre los fenómenos térmicos y eléctricos a través de la comparación tanto matemática como física de los fenómenos.
Thomson escribe en su artículo *On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium*:

> Corresponding to every problem relative to the distribution of electricity on conductors, or to forces of attraction and repulsion exercised by electrified bodies, there is a problem in the uniform motion of heat which presents the same analytical conditions, and which, therefore, considered mathematically, is the same problem (Thomson, 1872, p. 50).

Donde nos indica que para cualquier problema relativo a la distribución de electricidad en conductores o a las fuerzas de atracción/repulsión entre cuerpos electrificados, hay un problema relativo al movimiento del calor que puede ser considerado matemáticamente el mismo problema.
De lo anterior, Thomson da un ejemplo: Sea A un conductor cargado con una cantidad de electricidad determinada y aislado del exterior por medio de una carcasa conductora B no aislada del exterior. La superficie interna de B será cargada entonces con una cantidad de electricidad igual, pero de tipo contrario, de tal manera que la distribución de la carga eléctrica en B y de la carga eléctrica en A harán que la fuerza de atracción (u) resultante en cualquier punto se de en dirección de la normal a la superficie, esto se ilustra en la figura 1.

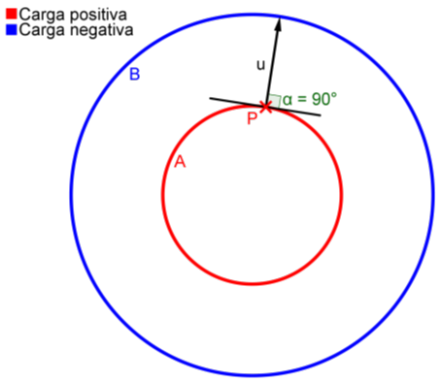


Figura 1. Interpretación del problema del equilibrio eléctrico de Thomson.

Como el conductor A recibiría fuerzas de atracción de igual magnitud en todas las direcciones, matemáticamente se expresaría como una condición de equilibrio (eléctrico en este caso), donde el potencial debe ser constante en cualquier punto sobre la superficie de A y cero en cualquier punto sobre la superficie de B; si se considera que A no tiene influencias del exterior, puede suponerse que cualquier punto de la superficie B está muy alejado de A, ahora bien, si el espacio entre las superficies de A y B es un medio dieléctrico (aislante), de acuerdo con el teorema de Coulomb, la intensidad del potencial en cualquier punto de A respecto a B, será igual a la fuerza de atracción dividida entre 4π.

Si consideramos ahora el caso, donde el espacio entre A y B es un cuerpo sólido homogéneo y se coloca una fuente de calor en A, existirá una distribución de calor entre los cuerpos, donde A tendrá una temperatura constante, mientras que en B se tendrá una temperatura cero, al igual que el potencial en el caso de la electricidad.
Si se consideran ahora diversos cuerpos cargados con diferentes cantidades, distribuidos en A, o diferentes fuentes de calor igualmente distribuidas en A, el problema es matemáticamente idéntico, de tal forma que la determinación del potencial en el caso eléctrico es igual que la determinación de la temperatura en el caso del calor en cada punto, y la fuerza de atracción es igual que el flujo del calor tanto en dirección como magnitud.
Dado esto, es posible utilizar teoremas determinados por Fourier en la *Theorié Analytique de la Chaleur* para la difusión del calor, como el sustento matemático relativo a la teoría de la electricidad (Thomson, 1872, p. 51-53).

Lo anterior, permite identificar que Thomson utiliza analogías entre los fenómenos físicos, de tal manera que a través de dichas analogías establece equivalencias matemáticas a través de las nociones del estado de equilibrio térmico y el equilibrio electrostático. Interpretamos en los argumentos de Thomson que él considera al flujo de calor y al efecto de la electricidad estática como fenómenos de la misma clase, el pensamiento de la electricidad como sustancia se presenta en la descripción del fenómeno, dando a entender que, el cuerpo electrificado ha sido imbuido (impregnado) con algo que le proporciona dichas características y que, la interacción del cuerpo cargado con otros cuerpos a su alrededor provoca que en ellos se muestren las características eléctricas.

¿Qué encontramos en el libro de Maxwell?

Maxwell, escribió un tratado acerca de la electricidad y magnetismo, con la finalidad de que este fuera utilizado como libro de texto en Cambridge, sin embargo, él murió antes de terminar de revisarlo y fue publicado *post mortem* por sus colegas de la universidad. En su tratado, Maxwell menciona algunas características de la electricidad, donde trata de explicar la naturaleza de los fenómenos provocados por cargas eléctricas estáticas y por el flujo de la electricidad, entre ellas menciona:

- La electricidad es una cantidad física medible, donde la totalidad de las cargas positivas o negativas de los cuerpos es igual a la suma algebraica de todas ellas, además de poder ser descrita cualitativamente (Maxwell, 1881, p. 36-37).
- No es posible asegurar que sea una sustancia o manifestación de energía o bien, que pertenezca a alguna categoría de cantidad física conocida actualmente (hasta 1881) (Maxwell, 1881, p. 37).
- La cantidad de electricidad no es una manifestación de energía, como si lo es el calor, esto es, porque la energía de un sistema de cargas eléctricas se obtiene mediante el producto de la cantidad de electricidad de cada parte y otra cantidad física denominada el potencial (Maxwell, 1881, p. 37).

Además, Maxwell establece su analogía entre el calor y la electricidad, tomando como punto de partida dos sistemas geométricamente iguales (Maxwell, 1881, p. 335):

- La conductividad del calor en el primero sea proporcional a la conductividad eléctrica del segundo.
- La temperatura en cualquier parte del primero sea proporcional al potencial en la parte correspondiente del segundo.

- El flujo de calor de una sección de área del primero sea proporcional al flujo de electricidad en el área correspondiente del segundo.

Con estas condiciones se tendría que, el flujo de electricidad corresponde al flujo de calor, el potencial corresponde a la temperatura, y, la electricidad fluye de los lugares con potencial mayor a aquellos con menor, como ocurre con el calor que fluye de lugares con mayor temperatura hacia aquellos con menor. Sin embargo, menciona que, a pesar de la analogía, en apariencia directa, existe una diferencia física fundamental entre el calor y la electricidad: Un cuerpo puede calentarse al suministrarle calor, dependiendo de sus características físicas (calor específico), mientras que la cantidad de electricidad puede incrementarse sin necesidad de que esta sea suministrada de manera externa (Maxwell, 1881, p. 335-336).

Además de lo anterior, Maxwell obtiene la ecuación diferencial que modela el comportamiento de la electricidad a través de un alambre transatlántico, por medio de la consideración del cable como una sucesión de placas conductoras paralelas, conectadas con resistencias eléctricas de manera infinita (Maxwell presenta las primeras 3 interconexiones), como se muestra en la figura 2:

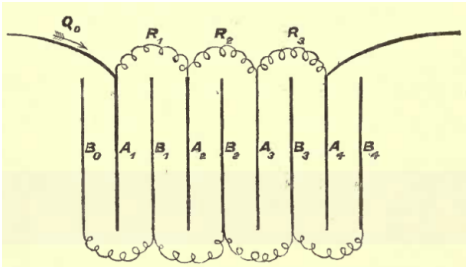


Figura 2. Esquema del cable transatlántico de Maxwell (Maxwell, 1881, p. 420)

Al analizar el circuito, Maxwell menciona que el objetivo del análisis consiste en encontrar la cantidad de electricidad que entra o sale en cada conexión del circuito, y que si existieran un número n de cantidades de electricidad por determinarse (Q_n), y si la fuerza electromotriz total o alguna otra condición equivalente se diera, la ecuación diferencial o sistema de ecuaciones para encontrar cualquiera de ellas sería lineal y de n variables. La consideración para el análisis se muestra en la figura 3, donde los parámetros de interés son la intensidad de corriente (I), la resistencia (R), la capacitancia (C) y los potenciales (P_n).

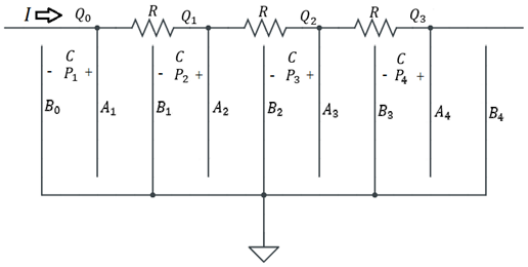


Figura 3. Esquema del cable de Maxwell en notación moderna con anotaciones de parámetros de interés.

A través de la consideración de la geometría del cable transatlántico, Maxwell obtiene una ecuación diferencial que simplifica el cálculo:

$$C\frac{dv}{dt} = \frac{1}{k}\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{1}{k_1}v$$

De la cual menciona lo siguiente:

> This is the partial differential equation which must be solved in order to obtain the potential at any instant at any point of the cable. It is identical with that which Fourier gives to determine the temperature at any point of a stratum through which heat is flowing in a direction normal to the stratum. In the case of heat C represents the capacity of unit of volume, or what Fourier denotes by CD, and k represents the reciprocal of the conductivity (Maxwell, 1881, p.422).

La ecuación diferencial es matemáticamente idéntica a la obtenida por Fourier para el calor, donde C es la capacitancia del circuito y corresponde a la capacidad calorífica de los cuerpos, y k el recíproco de la conductividad eléctrica y corresponde a la conductividad térmica.

Discusión

Fourier obtiene en su *Théorie Analytique de la Chaleur* la siguiente ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{hl}{CDS}v$; en sus trabajos Ohm y Maxwell utilizan una analogía para explicar el fenómeno de la difusión de la electricidad por medio del fenómeno de propagación del calor, obteniendo modelos matemáticos equivalentes al mostrado anteriormente.

A diferencia de Ohm, Maxwell indica que la acción de electrificación no es instantánea, sino que las condiciones del experimento lo aparentan, lo que llevó a afirmar que Ohm se autoengañó con su analogía (Maxwell, 1881, p. 422).

Así mismo, Maxwell enuncia en su libro:

> In most theories on the subject, Electricity is treated as a substance, but inasmuch as there are two kinds of electrification which, being combined, annul each other, and since we cannot conceive of two substances annulling each other, a distinction has been drawn between Free Electricity and Combined Electricity (Maxwell, 1881, p. 38).

Donde habla sobre fenómenos de electricidad libre y combinada, con el fin de no tratar a la electricidad como una sustancia, al contrario de otras teorías (refiriéndose a la teoría de dos fluidos y la de un solo fluido).

Estos elementos y confrontaciones de la obra de Maxwell nos dejan ver que su noción de carga eléctrica y de electricidad en general, ya no se relacionan de manera tan marcada con el PS; estos elementos pretenden retomarse en el diseño de una situación de aprendizaje que, esperamos, permita confrontar este obstáculo.

Referencias bibliográficas

Acevedo, J. (2004). El papel de las analogías en la creatividad de los científicos: La teoría del campo electromagnético de Maxwell como caso paradigmático de la historia de las ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias 1(3)*, 188-205.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. Argentina, México: Siglo XXI.

Cantoral, R (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Farfán, R. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. España: Gedisa.

Hinojos, J. y Farfán, R. (2017). Breve recorrido por el discurso matemático escolar de la serie de Fourier en el contexto del ingeniero en electrónica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 838-846.

Maxwell, J. (1881). *A Treatise on Electricity and Magnetism volume 1*. Reino Unido: Cambridge University Press.

Narasimhan, T. (1999). Fourier's heat conduction equation: History, influence, and connections. *Reviews of Geophysics 37(1)*, 151-172.

Ohm, G. (1827). *Die Galvanische Kette Mathematisch Bearbeitet*. Alemania.

Thomson, W. (1872). *Reprints of Papers on Electrostatics and Magnetism*. Reino Unido: Macmillan & Co.

IMPACTO DE UN PROGRAMA DE DESARROLLO PROFESIONAL PARA PROFESORES DE SECUNDARIA DE MATEMÁTICAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES EN EL ECUADOR. EL CASO DE LA FUNCIÓN LINEAL

Mónica Flores Marin y Vicenç Font
Universidad Espíritu Santo. (Ecuador), Universitat de Barcelona. (España)
mfloresm@uees.edu.ec, vfont@ub.edu

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo determinar cuáles propuestas de Trabajos Finales de Máster (TFM) constituyen una mejora de la enseñanza de las funciones lineales en comparación con los textos de matemáticas oficiales. Se trata de un estudio de caso que analiza 27 TFM sobre la función lineal de la Maestría de Formación de Profesorado de Educación Secundaria en Ecuador (2014-2016) de la especialización matemática. Los resultados muestran que la mitad de los TFM presentan un diseño e implementación más contextualizada y constructivista en comparación a los textos oficiales, lo cual se puede considerar una mejora.

Palabras clave: función lineal, innovación, formación de profesores

Abstract

This paper aims to determine which proposals of the Final Master's degree Research Works (FMRW) constitute an improvement in the teaching of linear functions compared to the standard mathematics books. This is a case study which analyzes twenty-seven final reports focused on linear function, in the Master's Degree of Secondary Education Teacher Training (of mathematics specialization), in Ecuador (2014-2016). The results show that half of the FMRW present a more contextualized, and constructivist design and implementation compared to the standard books, therefore, it can be considered an improvement.

Keywords: lineal function, innovation, teacher education

Introducción

Este trabajo presenta resultados parciales de una investigación sobre el impacto que produjo un programa de maestría sobre la enseñanza de funciones en el Ecuador. Se trata de un estudio de caso naturalista de tipo múltiple cuyo objetivo es determinar qué propuestas de unidades didácticas contempladas en los Trabajos Finales de Máster (TFM) de los profesores ecuatorianos que cursaron la Maestría de Formación del Profesorado de Educación Secundaria en Ecuador (2014-2016) en la especialización Matemáticas, impartida por la Universidad de Barcelona, representan un cambio para la mejora de la enseñanza de las funciones lineales, cuando se comparan con los libros de texto distribuidos por el Ministerio de Educación.

Marco Teórico

Como herramienta teórica se utiliza el constructo configuración epistémica, propuesto por el Enfoque Ontosemótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2008). En el EOS se considera que para la realización de una práctica matemática se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema vemos el uso de *lenguajes*, verbales, gráficos y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones que componen la práctica son satisfactorias. En consecuencia, cuando una institución matemática realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado articulado de situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, llamado en el EOS *configuración epistémica de objetos primarios*.

Para el caso del objeto matemático función, un estudio histórico epistemológico, muestra que dicho objeto se presenta en forma de cuatro configuraciones epistémicas (tabular, gráfica, analítica y conjuntista). Según Font (2007, 2011), estas cuatro configuraciones que, en cierta manera, resumen el desarrollo de la noción de función, se han transpuesto a los libros de texto mediante dos tipos de configuraciones epistémicas, por una parte, tendríamos las configuraciones epistémicas formales (o intra matemáticas) y las empíricas (realista o extra matemáticas). Las primeras tendrían como referente la configuración epistémica que se ha llamado conjuntista, mientras que las segundas tendrían como referente una combinación de las otras tres. Estos dos tipos de configuraciones epistémicas son las que podemos encontrar en los manuales universitarios y en los libros de texto de la media y del Bachillerato. En Font (2007, 2011) se considera un tercer tipo de configuración epistémica que es una degeneración de la configuración epistémica formalista. Se refiere a las unidades didácticas inspiradas en lo que se llama instrumentalismo, mecanicismo, etc. Se trata de una presentación descontextualizada de los conceptos y reglas matemáticas, que se supone que se aprenden con la práctica y no mediante un aprendizaje significativo.

En los vértices del triángulo de la figura 1 representamos los tres modelos de configuraciones epistémicas de las funciones (formalista, mecanicista y realista). Las configuraciones reales que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas pueden representarse mediante puntos interiores del triángulo y estar más o menos próximas a estas configuraciones teóricas. Por otra parte, las configuraciones epistémicas de los libros de texto aprobados y distribuidos gratuitamente por el Ministerio de Educación de Ecuador se sitúan más cerca de las propuestas formalista y mecanicista a pesar de lo que señalan las orientaciones curriculares, claramente orientadas a la propuesta realista.

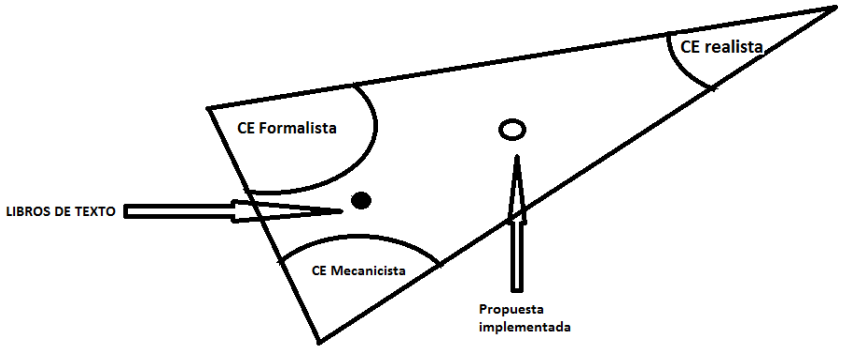


Figura 1. Configuraciones Epistémicas de referencia

Partimos del supuesto de que en la secundaria las configuraciones epistémicas realistas presentan a priori mayor idoneidad didáctica (Breda, Font y Lima, 2015; Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006) que las formalistas y las mecanicistas. Por esta razón consideraremos que las unidades didácticas que se aproximan más al modelo de configuración epistémica realista presentan una innovación y una mejora con relación a las que siguen el libro de texto oficial.

Metodología

Se trata de un estudio de caso naturalista de tipo múltiple que estudia las unidades didácticas diseñadas e implementadas en los 114 TFM presentados por los profesores que cursaron el Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria en el Ecuador en la especialización Matemáticas de la Universidad del Barcelona (2014 - 2016).

Se comenzó efectuando fichas de cada TFM, donde se encuentra un resumen de las mismas; los cuales 42 se dedicaron al tema de funciones y de éstos, 27 utilizaron el tema de función lineal. Se ha realizado la configuración epistémica de la unidad didáctica presentada en el TFM para su posterior comparación con la configuración epistémica de la misma unidad presente en los libros de texto oficiales suministrados por el Ministerio de Educación. Se valora en una escala de 1 a 3 el cambio que representa la unidad diseñada e implementada con base a la comparación con la unidad didáctica de los libros oficiales.

Análisis de Resultados

En el caso de los 27 profesores que diseñaron e implementaron una unidad sobre funciones lineales (Anexo 1) utilizamos la unidad didáctica del profesor N. J. que imparte a primero de BGU para ejemplificar el tipo de análisis comparativo con libro de texto realizado en las seis unidades didácticas de la Tabla 1.

Tabla 1. Resumen de la CE del Libro de Texto para 1 BGU

Situaciones-Problema
Existen problemas contextualizados solo para la función afín, al inicio y final del capítulo
Lenguaje
Verbal, simbólico, gráfico y tabular
Definiciones
Previas Relaciones *Emergentes* Representación de una función
Procedimientos
Previos Se expone teóricamente el concepto de relación. *Emergentes* Se expone con tabla de valores, gráfica y expresión algebraica.
Proposiciones
No existe
Argumentos
Argumentos de tipo: ejemplo a seguir

La propuesta del profesor N. J. que se visualiza en Tabla 2 es más constructivista que la del libro ya que presenta los problemas contextualizados al inicio de la unidad con el objetivo de que su resolución permita continuar con los contenidos que se pretenden enseñar. Por otra parte, los argumentos no se limitan a ejemplos a seguir. Por esta razón la valoración de innovación que representa su propuesta con relación a la del libro la hemos valorado con un 3 en una escala de 1 a 3.

Tabla 2. Resumen de la CE del TFM de N.J.

Situaciones-problema
Expone problemas iniciales contextualizados
Lenguaje
Verbal, simbólico, gráfico y tabular
Definiciones
Previas Menciona que se repasa los conocimientos previos, pero no se indica cuáles son

Emergentes Función lineal, proporcionalidad directa, función afín, ordenada al origen, pendiente
Procedimientos
Cálculo por medio de punto y pendiente y dos puntos, tabla de valores Representación de gráficas de funciones lineales a partir de tablas y el software Geogebra
Proposiciones
No existe
Argumentos
Argumentos de tipo inductivo y visual

Conclusiones

Tres TFM se valoraron con un tres, once con un 2 y trece con un uno. Vemos que solo la mitad se aleja del libro guía del ministerio, considerado en esta investigación como poco constructivista. Una posible explicación es que los profesores no asimilaron la formación del máster, que los había preparado para hacer propuestas de unidades didácticas más constructivistas. Ahora bien, también es posible que las condiciones del contexto de la institución donde impartieron su propuesta didáctica fuesen determinantes para no separarse de la propuesta del libro. Con relación a esta última explicación hay que decir que, si bien tanto el currículum oficial como la formación del máster les impulsaba hacia propuestas constructivistas, la inspección, la dirección del centro, etc. les impulsaba a no distanciarse demasiado de la propuesta del libro.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE).

Referencias bibliográficas

Breda, A., Font, V. y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *10*(2), 419–434.

Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *56*, 86-94.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10*, 7-37.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhemi, M. R. (2006). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Paradigma*, *XXVII*(2), 221-252.

Anexos

Anexo 1. Datos y puntuaciones de los TFM que incorporan una unidad didáctica sobre funciones lineales

Nº Ficha	Nombre Alumno	Puntuación	Curso	Título
1	A.A.	1	8 EGB	Funciones de primer grado
3	B.G.	2	1 BGU	Función lineal
5	B.R.	2	1 BGU	Los números y las funciones lineales
7	C.F.	1	1 BGU	Función Lineal
8	C.F.	2	1 BGU	Secuencia Didáctica de la Función Lineal
9	C.H.	2	3 BGU	Propuesta de unidad didáctica. Funciones elementales: lineales, afín y cuadrática
11	C.L.	2	1 BGU	Función lineal y sistemas de ecuaciones
12	E.J.	1	1 BGU	Función lineal
13	G.A.	1	10 EGB	Funciones
14	H.A.	3	1 BGU	Función lineal y afín
15	H.C.	3	1 BGU	Funciones lineales
17	J.G.	1	3 BGU	Funciones reales
18	J.V.	2	10 BGU	Funciones lineales
21	M.N.	1	1 BGU	Aplicaciones de funciones en situaciones de la vida práctica
22	M.M.	1	1 BGU	Funciones lineales
23	N.J.	3	1 BGU	Funciones lineales
24	N.P.	1	10 EGB	La función lineal y cuadrática
30	Q.S.	1	2 BGU	Funciones lineales y cuadráticas

31	R.J.	1	1 BGU	Funciones lineales y cuadráticas
34	R.W.	1	3 BGU	Aprendizaje de la función lineal
35	S.L	2	1 BGU	La Función
36	S.L.	1	2 BGU	Funciones lineales
37	T.H.	1	10 EGB	Función lineal
38	T.J.	2	10 EGB	Funciones lineales
39	T:R.	2	10 EGB	Funciones lineales aplicados a la vida cotidiana
41	U.C.	2	1 BGU	Funciones lineales
42	V.M.	2	1 BGU	Funciones y gráficas

LA MATEMATIZACIÓN DE LOS PROCESOS DE TOMA DE DECISIONES; UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Andrea Vergara Gómez, Lianggi Espinoza Ramírez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile), Universidad de Valparaíso. (Chile)
andrea.vergara.gomez@gmail.com, lianggi.espinoza@uv.cl

Resumen

Tomar decisiones en contextos de incertidumbre es un aspecto inherente a lo humano. Sin embargo, la matematización de este tipo de procesos ocurre recién en siglo XIX, principalmente desde la Economía como práctica de referencia. Con el propósito de identificar y recuperar categorías epistémicas de interés para repensar la enseñanza actual de algunas nociones fundamentales asociadas a la probabilidad, se realiza un estudio socioepistemológico de la obra *Exposition de la théorie des chances et des probabilité*s (1843) de Antoine Augustin Cournot, mediante el método de análisis de contenido. Esta obra representa el primer intento sistemático por aplicar conocimiento probabilístico a los procesos de toma de decisiones que tienen lugar en diversos contextos de la vida social y natural. Los análisis, correspondientes a una investigación en curso, apuntan a una concepción amplia e integradora de la probabilidad como medio para elaborar juicios respecto de la realidad.

Palabras clave: probabilidad, incertidumbre, binomial, Economía, epistemología

Abstract

Making decisions in contexts of uncertainty is an inherent aspect of human beings. However, the use of mathematics in this type of process began in the nineteenth century, mainly from the Economy as a reference practice. In order to identify and recover epistemic categories of interest to rethink the current teaching of some fundamental notions of probability, we carried out a socio-epistemological study of the A. A. Cournot's work "*Exposition de la théorie des chances et des probabilities*" (1843), by using the content-based analysis method. This work represents the first systematic attempt to apply probabilistic knowledge to the decision-making processes that take place in diverse contexts of social and natural life. The analyses, corresponding to an ongoing research, point to a broad and integrative conception of probability as a means of making judgments about reality.

Key words: probability, uncertainty, binomial, Economy, epistemology

Introducción

A lo largo de la vida, todas las personas tomamos una gran cantidad de decisiones, mientras más incertidumbre nos ofrezca la situación más difícil se vuelve decidir. Toda vez que se considera la enseñanza de nociones asociadas a la incertidumbre, se contempla la organización de una serie de temas matemáticos y estadísticos que, de acuerdo con Moore (1997), suelen incluir el estudio de la variación en los procesos y su cuantificación, el reconocimiento de la incertidumbre y el error en las mediciones,

técnicas de representación, descripción e interpretación de datos, etc. Sin embargo, cuando se considera la enseñanza y aprendizaje de modelos probabilísticos a nivel de estándares internacionales (OCDE, 2013), no suele problematizarse la relación entre la necesidad de tomar una decisión en condiciones de incerteza con la factibilidad de referir matemáticamente un fenómeno mediante el uso de la probabilidad desde una perspectiva amplia.

En el ámbito de la psicología cognitiva, existen diversas investigaciones que analizan la forma en que las personas elaboran juicios y toman decisiones en contextos de incertidumbre (Kahneman y Tversky, 1979; Gigerenzer y Gaissmaier, 2011; Gigerenzer y Todd, 2012; Kruglanski y Gigerenzer, 2011, entre otros). Sin embargo, son exiguos los estudios que reportan el vínculo entre las la necesidad de tomar decisiones en situaciones cotidianas de incertidumbre y la emergencia de pensamiento probabilístico. En Nilsson (2007), por ejemplo, se expone cómo la comprensión probabilística de jóvenes de entre 12 y 13 años varía según las condiciones de contexto en las que deben realizar una decisión concerniente a un juego con dados.

Actualmente es posible identificar distintas áreas que estudian los procesos de toma de decisiones bajo incerteza, con enfoques multidisciplinarios, como Teoría de la Decisión, Teoría de Juegos o Teoría de Expectativas Racionales. Estas perspectivas se han desarrollado fuertemente a partir de la segunda mitad del siglo XX. No obstante, lo anterior, el origen de esta preocupación la hallamos en el siglo XIX, la cual puede relacionarse con una actividad humana relativamente específica. Li Calzi y Basile (2004) afirman que la teorización matemática respecto de la toma de decisiones bajo incertidumbre comienza a surgir con la disciplinarización de la Economía. Siguiendo esta argumentación, Martin y Touffut (2007) señalan que Antoine Augustin Cournot fue el primero en reconocer y explicar la matemática tras los fenómenos sociales, contribuyendo especialmente al desarrollo de la economía matemática. A. A. Cournot, filósofo, matemático y economista francés del siglo XIX, posee una vasta obra, que tal vez debido a su carácter clarividente e innovador no estuvo al alcance de la comprensión de su época. El impacto de su trabajo fue póstumo y sus alcances continúan hasta nuestros días.

Dado lo anterior, es nuestro interés estudiar aquellos significados que preceden al desarrollo del saber matemático asociado a la toma de decisiones, con miras a contribuir a la construcción de un pensamiento probabilístico amplio a nivel escolar. Una de las obras de A. A. Cournot que intenta ejemplificar y sistematizar el uso de modelos probabilísticos en distintos fenómenos sociales y naturales, tanto para asistir la toma de decisiones como para renovar la comprensión del problema en sí, es *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843). Reconocemos en esta pieza matemática un germen para el tratamiento analítico de los procesos de toma de decisiones. Presentamos así, en este artículo, un análisis socioepistemológico de la obra mencionada. Este distingue, de manera preliminar, caracterizaciones relativas a las formas de significar la probabilidad en los procesos de toma de decisiones en contextos de incerteza. La reconstrucción de esta epistemología olvidada, esperamos permita repensar la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y los modelos probabilísticos.

Marco Teórico y Metodología

La Socioepistemología plantea el problema de la construcción social del conocimiento matemático desde un punto de vista sistémico, asumiendo los saberes matemáticos como procesos deliberados para el uso

compartido del conocimiento (Cantoral, 2013). De esta manera, la actividad matemática, siendo primeramente actividad humana, provee de saberes cuyos significados no se limitan a los objetos matemáticos preexistentes en la Matemática. Consideramos así que el estudio de la actividad humana relacionada con distintos fenómenos sociales, como la transacción de valores en el mercado económico o la elaboración de apuestas en juegos de azar, contextualiza y significa los procesos de toma de decisiones. Cantoral (2013) señala que una de las formas de abrir la reflexión en torno al discurso matemático escolar con miras a la sociedad del conocimiento, es problematizar al saber a través de su historización. La historización debe entenderse "más allá de lo cronológico factual, pues se interesa por la historia crítica del desarrollo conceptual" (Cantoral, 2013, p.57). Historizar el saber es un mecanismo fundamental que permite revelar los elementos mediante los cuales la matemática se constituye, de ahí que este proceso implica un examen epistemológico, crítico y situado tanto del saber cómo de las prácticas que acompañan su producción (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

Uno de los métodos que muestra la tradición socioepistemológica, para explicar la emergencia de un saber matemático, es el análisis de obras originales (Cantoral, 2013). Siguiendo esta idea, el presente estudio se estructuró bajo un enfoque cualitativo, específicamente a través del análisis de contenido de la obra *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843) de Antoine Augustin Cournot, en su versión original en francés de la edición de L. Hachette. Este análisis se complementó mediante la consulta de la versión en inglés con comentarios de Oscar Sheynin (2013). La elección de esta obra obedece, por una parte, a que fue escrita bajo una clara intencionalidad didáctica y, por otra, a que su contenido sistematiza varios de los conocimientos sobre probabilidad vigentes en la época. De acuerdo a Martin (2007) las preocupaciones de Cournot, aun las de tipo estrictamente matemático, siempre están acompañadas por una reflexión epistemológica e incluso histórica sobre el significado y alcance de los conceptos matemáticos y sus relaciones con otros campos del saber. Dado lo anterior, la obra del autor reviste especial interés para un estudio de corte socioepistemológico.

El abordaje de la obra se realiza mediante el análisis de contenido que, como explica Krippendorff (2004), es una metodología que permite una interpretación crítica, considerando la deconstrucción del relato desde los aspectos contextuales, culturales e históricos. Esta técnica de análisis nos provee algunas formas de proceder para obtener inferencias plausibles a partir de los extractos textuales de la obra. El análisis de los datos aún se encuentra en proceso, pero este está siendo llevado a cabo básicamente a través de dos tipos de acciones: 1) la identificación de unidades conceptuales, explícitas en la narrativa de Cournot, vinculadas a la probabilidad y 2) la resolución de los ejemplos propuestos mediante el uso de las estrategias explicadas por el mismo Cournot. A partir de estos elementos, se han levantado caracterizaciones preliminares que permiten fundamentar una epistemología para la probabilidad, las que son descritas a continuación.

Relación entre azar y aleatoriedad

Para Cournot no es la imperfección actual de nuestros conocimientos y métodos lo que nos hace considerar el azar en los fenómenos, sino que es la naturaleza de las cosas y las condiciones inherentes a nuestra constitución intelectual lo que nos obliga a considerar varias fuentes separadas e independientes de información: la experiencia, la deducción, la imaginación, el conocimiento que se tiene por válido, la intuición, etc. Esta independencia y variedad es la clave para comprender qué es el azar para Cournot; no

es la ausencia de causas, es la multiplicidad de causas sin dependencia o relación rastreable entre ellas. Como él mismo señala: "Il faut, pour bien s'entendre, s'attacher exclusivement à ce qu'il y a de fondamental et de catégorique dans la notion du hasard, savoir à l'idée de l'indépendance ou de l'absence de solidarité entre diverses séries de faits ou de causes" (Cournot, 1843, p.77).

Para Cournot, el azar tienen un papel notable en la manifestación de gran cantidad de fenómenos, pues este resulta más consistente con el plan general de la naturaleza, donde los sucesos obedecen mayoritariamente a distintas causas cuya solidaridad o relación vinculante no es manifiesta. Así lo declara en el capítulo 4, "il est juste de dire en ce sens (comme on l'a aussi répété si souvent) que le hasard gouverne le monde, au plutôt qu'il a une part, et une part notable, dans le gouvernement du monde" (Cournot, 1843, p.83).
Además Cournot enfatiza que, si bien en el lenguaje coloquial se suele usar la expresión azar cuando se está frente a sucesos raros o poco frecuentes, esta no es la condición intrínseca del azar. Lo raro o sorprendente no es la manifestación del azar, porque "le hasard les amène, entre beaucoup d'autres auxquels donneraient lieu des combinaisons différentes, qu'ils sont rares; et c'est parce qu'ils sont rares, qu'ils nous surprennent" (Cournot, 1843, p.76). El azar trae consigo muchas combinaciones posibles, algunas de las cuales pueden parecernos inusuales, pero también desencadena aquellas que nos resultan habituales o comunes.

En relación a lo aleatorio, este está sujeto o deviene de la variabilidad. Esta última puede o no tener un comportamiento conocido. Cournot definió un evento aleatorio como una intersección de dos o más cadenas independientes determinadas por otros eventos, es decir "les événements amenés par la combinaison ou la rencontre de phénomènes qui appartiennent à des séries indépendantes, dans l'ordre de la casualité, sont ce qu'on nomme des événements *fortuits* ou des résultats du *hasard* " (Cournot, 1843, p.73).

En los eventos aleatorios Cournot reconoce la factibilidad del cálculo de probabilidades para los estados posibles de acuerdo a la teoría matemática de las combinaciones, debido a la presencia de variaciones proporcionales. Cournot, considera, por ejemplo, el evento aleatorio resultante de realizar una serie de experimentos independientes e idénticos, cada uno de los cuales con dos resultados posibles. En este tipo de experimentos, lo aleatorio expresa una regularidad en la distribución cuando el experimento se repite una gran cantidad de veces. Supongamos que los eventos A', A'', …, A^n son repeticiones del evento A y B', B'', …, B^n son repeticiones del evento B. Si se asume que las probabilidades p y q de los eventos A y B respectivamente, permanecen invariantes durante el proceso, entonces para m intentos, el producto $(p+q)(p'+q')(p''+q'')$ … se convierte en $(p+q)^m$. Esta expresión es generalizada por Cournot a partir del uso del binomio de Newton, como se puede apreciar en la Figura 1.

$$(p+q)^m = p^m + \frac{m}{1}\cdot p^{m-1}q + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}p^{m-2}q^2 + \cdots$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)}p^n q^{m-n} + \cdots + q^m \cdot m$$

Figura 1. Uso del binomio de Newton para describir la probabilidad binomial, en Cournot (1843, p.47).

La suma de los términos del binomio hasta e incluyendo su término general expresa la probabilidad de que el suceso de probabilidad p llegue a ocurrir al menos n veces y que el suceso contrario no ocurra más de $m - n$ veces. De esta manera, la aleatoriedad, aunque consecuencia ostensible del azar, no está exenta de una regulación y la forma de su variabilidad puede ser descrita mediante una ley general.

Lo subjetivo y lo objetivo como unidad

Con base a lo anterior, Cournot se atreve a poner en discusión si la probabilidad se aplica a los acontecimientos mismos o a los juicios que hacemos sobre esos acontecimientos. Los capítulos 1, 2, 3 y 8 de la obra tratan explícitamente el tema de la significación objetiva y la interpretación subjetiva de la probabilidad.

Una vez que se admite la existencia efectiva de fenómenos aleatorios y, en consecuencia, se desestima la hipótesis del determinismo completo y universal, se puede aseverar que la probabilidad tiene una significación objetiva. Ahora bien, toda vez que se realiza un juicio probabilístico sin indagar si la estructura que lo sustenta existe o no, estamos frente a una concepción subjetiva de la probabilidad. Esto se debe a que, en la ruta matemática de las probabilidades, el acto de comparar, evaluar o medir las posibilidades de los eventos no conlleva una certeza absoluta ni en términos físicos ni en términos metafísicos. De esta manera, para Cournot la concepción subjetiva de la probabilidad se legitima debido a que el uso estricto de su valor teórico sólo es posible bajo condiciones muy restrictivas y poco comunes en sucesos producidos por combinaciones de causas independientes.

> … et qui se rectifient dès qu'on a présente à l'esprit la distinction fondamentale entre les probabilités qui ont une existence objective, qui donnent la mesure de la possibilité des choses, et les probabilités subjectives, relatives en partie à nos connaissances, en partie à notre ignorance, variables d'une intelligence à une autre, selon leurs capacité et les données qui leur sont fournies (Cournot, 1843, p.155).

La probabilidad subjetiva no remite al uso de sensaciones psicológicas para hacer vaticinios, sino que corresponde y refleja la cualidad intrínseca del azar. No se pueden hacer más que estimaciones de la posibilidad de ocurrencia de sucesos venideros cuando no se conocen todas las causas y condiciones que rigen su acontecer, no conocer tales causas es lo que nos lleva inevitablemente a considerar el estudio de las probabilidades.

En consecuencia, por una parte, para Cournot es mucho más conflictivo establecer que la probabilidad puede medir efectivamente la posibilidad de ocurrencia de un suceso que asumir su carácter subjetivo y, por otra, es indispensable admitir que la probabilidad no es sólo una representación hecha por el sujeto, que varía según el grado de conocimiento de este, sino la medición de una realidad efectiva, una cuya esencia no puede ser alcanzada mediante certeza absoluta. En su explicación no se remite a señalar bajo qué condiciones el concepto de probabilidad puede efectivamente medir una realidad fenoménica y, en consecuencia, imputarse un valor objetivo, sino que construye su visión desde una epistemología de la realidad que admite la cohabitación entre objetividad y subjetividad en la forma en que conocemos e intervenimos en nuestro mundo.

El principio de imposibilidad física

Cournot recurre al principio de imposibilidad física para facilitar la exposición de su teoría del azar. Los ejemplos incluyen situaciones tales como intentar equilibrar un cono por su vértice extremo o lograr que una determinada medida se ajuste rigurosamente a la norma. Dichos acontecimientos son de la misma naturaleza: se caracterizan no porque su probabilidad de ocurrencia sea muy baja, sino más bien por el hecho de que sólo tienen una oportunidad en favor para su realización frente a un infinito número de posibilidades en contra. Cournot lo metaforiza a partir de la extracción ciega de una bola blanca desde una urna que solo tiene una bola blanca e infinitas bolas negras. Así, un evento físicamente imposible no es lo mismo que un evento probabilísticamente imposible. Una cosa físicamente imposible puede ser concebida como matemáticamente o metafísicamente posible, aunque en los hechos nunca suceda.

> La probabilité mathématique n'est plus un simple rapport abstrait, tenant au point de vue de notre esprit, mais l'expression d'un rapport que la nature même des choses maintient, et que l'observation manifeste, lorsque, sous l'influence de causes indépendantes qui se combinent fortuitement, les épreuves des mêmes hasards se multiplient indéfiniment, comme cela arrive sans cesse dans l'ordre des phénomènes naturels et des faits sociaux (Cournot, 1843, p.155).

Esta forma de concebir lo posible y lo imposible en la realidad, proporciona una mayor comprensión del valor objetivo-subjetivo de la probabilidad, pues conjuga la noción general de la independencia de las causas y la multiplicidad infinita de posibles combinaciones con la noción empírica de nuestra percepción material del mundo.

Discusión y Conclusiones

Las nociones de azar y probabilidad son revindicadas desde la dimensión epistemológica que nos proporciona la obra de Cournot. Los usos, significados y constructos asociados a la probabilidad pueden enriquecerse si se realza la toma de decisiones y el valor del contexto. Lo fundamental, por ejemplo, en la noción de azar de Cournot es la idea de la independencia o la falta de solidaridad entre las distintas series de hechos o causas. Al contrario de lo que se creía en la época, y tal vez aún en nuestros días, para Cournot el azar no es la ausencia de causas sino la imbricación de esta; su huella predomina en todo lo que nos rodea.

Por otra parte, la visión de Cournot nos permite concebir a la probabilidad no como un abanico multifacético que eventualmente despliega distintas interpretaciones (frecuentista, bayesiana, laplaciana, intuitiva, etc.), sino como una unidad viva que es inherentemente objetiva y subjetiva a la vez, y no por ello menos válida o científica. Esto va más allá de lo que sugieren algunos autores (Torres y Parra, 2013; Carranza y Fuentealba, 2010; Rodríguez y Agnelli, 2009; Díaz y Batanero, 2006) en relación a atender los distintos significados de la probabilidad para mejorar su comprensión, pues la concepción de la probabilidad por sí misma no es el fin último. La probabilidad no es más que uno de los muchos aparejos epistemológicos que tenemos los seres humanos para realizar el constante acto de conocer.

En los albores de la matematización de fenómenos no determinísticos Cournot nos enseña que la expectativa no es hacer calzar forzosamente la realidad a la teoría matemática sino más bien aproximarse

modestamente mediante esta última a la elaboración de una racionalidad funcional. De este modo, como señalan Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) el significado deviene del uso situado que se le otorgue a los objetos y procesos de acuerdo a las actividades y situaciones en las que nos vemos involucrados.

La epistemología de la probabilidad sustentada en la obra que analizamos, consideramos refleja el principio de relatividad epistemológica de la Socioepistemología (Cantoral, 2013), puesto que denota claramente que la validez de nuestro pensamiento matemático no recae *per se* en mediciones absolutas y abstractas, sino que en la experiencia de una relación que existe entre las cosas mismas.

La restitución de estos usos y caracterizaciones de la probabilidad podría encausar el discurso matemático escolar hacia el desarrollo de una epistemología de prácticas asociadas a la toma de decisiones, y de este modo propiciar la resignificación de la probabilidad y sus nociones subsecuentes.

Referencias bibliográficas

Calzi, M. L., & Basile, A. (2004). Economists and Mathematics from 1494 to 1969. *Beyond the Art of Accounting*. Mathematics and Culture I, 95-107.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa*. Estudios sobre construcción social del conocimiento. México: Editorial Gidesa.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(1), 5-17.

Cournot, A. (1843) *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*. Librairie de L. Hachette, Paris.

Gigerenzer, G., & Gaissmaier, W. (2011). Heuristic decision making. *Annual review of psychology*, *62*, 451-482.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 263-291.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology*. London: Sage Publications.

Kruglanski, A. W., & Gigerenzer, G. (2011). Intuitive and deliberate judgments are based on common principles. *Psychological review*, *118*(1), 97.

Martin, T. (2007). Cournot ' probabilistic epistemology. En J.P. Touffut (Ed.), *Augustin Cournot: Modelling Economics* (pp. 1-7). Massachusetts: Edward Elgar Publishing Limited.

Martin, T., & Touffut, J.P. (2007). Introduction. En J.P. Touffut (Ed.), *Augustin Cournot: Modelling Economics* (pp. 1-7). Massachusetts: Edward Elgar Publishing Limited.

Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International statistical review, 65*(2), 123-137.

Nilsson, P. (2007). Different ways in which students handle chance encounters in the explorative setting of a dice game. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 293-315.

OCDE (2013). *El programa PISA de la OCDE: Qué es y para qué sirve*. Disponible en https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Todd, P. M., & Gigerenzer, G. (2012). *Ecological rationality: Intelligence in the world.* USA: Oxford University Press.

MANDALA ETNOMATEMÁTICA: FRUIÇÃO DO CICLO DO CONHECIMENTO

Olenêva Sanches Sousa
Secretaria da Educação do Estado da Bahia. (Brasil)
oleneva.sanches@gmail.com

Resumo

A Mandala Etnomatemática é pertinente a um Doutorado em Educação Matemática, que, numa abordagem qualitativa, investigou, nas perspectivas sócio-histórico-culturais, teórico-filosóficas e político-educacionais, possibilidades de interfaces conceituais etnomatemáticas, entendidas como promotoras da transcendência do Programa Etnomatemática para a Educação em Geral, reconhecendo a importância do caráter epistemológico-cognitivo deste Programa, enquanto teoria geral do conhecimento, passível de orientação a inovações pedagógicas. A Mandala Etnomatemática inseriu-se como um recurso, à Arte, para abordar o conceito etnomatemático de Ciclo do Conhecimento, buscando evidenciar o que lhe é essencial no visual e promover a fruição da sua complexidade, em vias da popularização do Programa Etnomatemática.

Palavras chave: programa etnomatemática, epistemologia, popularização científica

Abstract

Mandala´s Ethno-mathematics as part of a Doctorate in Mathematics Education is based on a qualitative approach. It investigated the socio-historical-cultural, theoretical-philosophical and political-educational perspectives, as well as the possibilities of conceptual ethno-mathematical interfaces as important aspects that foster the ethno-mathematics program for general education. This program has an important epistemological-cognitive character with respect to the theory of general knowledge theory, which is focused on pedagogical innovations. Mandala's ethno-mathematics is used as a resource in Arts to approach ethno-mathematics concept of Knowledge Cycle, attempting to show what is essential to it in what is visual, and also to promote its complexity function in order to socialize the ethno-mathematics program

Key words: program ethnomathematics. Epistemology, scientific popularization

Mandala Etnomatemática: concepção científica

A Mandala Etnomatemática é uma obra de arte, conceitualmente inspirada na epistemologia do Programa Etnomatemática, proposta por Ubiratan D'Ambrosio. Constitui-se em um produto de Doutorado em Educação Matemática, que, com uma abordagem qualitativa, reconheceu este Programa como uma teoria geral do conhecimento, cujo caráter epistemológico-cognitivo favorece orientar inovações pedagógicas.

A pesquisa partiu da suposição de que alguns conceitos etnomatemáticos provocavam diálogos com diversas áreas de conhecimento, - sócio-histórico-cultural, teórico-filosófico e político-educacional - especialmente as subáreas da Educação em Geral. Nesse sentido,

> o Programa Etnomatemática é uma teoria genérica, bem caracterizada como uma Teoria Geral do Conhecimento. É genérica, pois seu *corpus* conceitual decorre do estabelecimento de interfaces conceituais com diversas áreas e por ser genérica, está sempre passível a novas interfaces. Ao abrir-se ao diálogo teórico-prático, ultrapassou os limites conceituais da Educação Matemática e encontrou espaços e tempos de transcendência na Educação em geral. (Sousa, 2016, pp. 260-261).

Metodologicamente, Sousa (2016) faz uma análise de sua própria produção e uma revisão de literatura com base na obra de D'Ambrosio e em outros teóricos da Educação Matemática e Educação em geral, que tomam Etnomatemática como referência, em vias de compreender os diálogos estabelecidos. Desse modo, a pesquisa objetivou delinear um perfil contemporâneo do Programa Etnomatemática, a partir de conceitos-chave e de suas interfaces conceituais entre a Educação Matemática e a Educação em geral, elaborando alguns instrumentos supostamente contributivos à sua difusão e popularização. A Mandala Etnomatemática é um recurso à popularização.

O Ciclo do Conhecimento e a Mandala Etnomatemática

A Mandala Etnomatemática buscou evidenciar o que é essencial no ciclo do conhecimento e promover reflexões epistemológicas. O *Ciclo do Conhecimento* (figura 1) é um conceito-chave do Programa Etnomatemática, que o caracteriza como uma teoria geral do conhecimento, abrangente, genérica e flexível.

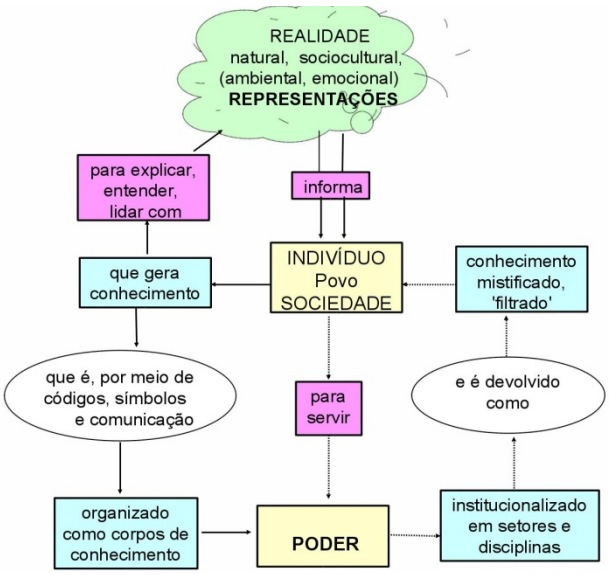


Figura 1: Ciclo do Conhecimento de D'Ambrosio

O esquema *Ciclo do Conhecimento* considera o conhecimento, elemento vital a todo indivíduo, o seu compartilhamento, e expressa todo o processo de sua geração, organização intelectual, organização social

e difusão, inclusive a ação filtrante do poder, na sua desapropriação, institucionalização e devolução do filtrado com objetivo de 'educar' para a ele ser subserviente. Para D'Ambrosio (1988, s.p.),

> las dinámicas culturales, que indudablemente subyace a la evolución de los procesos cognoscitivos, y ubica a la historia de las matemáticas en un marco teórico más amplio de la historia de las ideas y de la visión aún más amplia de la historia general.

Além disso, D'Ambrosio (2013) afirma que "a historiografia associada à fragmentação do ciclo não pode levar a uma percepção integral de como a humanidade evolui […] é particularmente inadequada para analisar o conhecimento matemático das culturas periféricas" (p. 39) e que a realidade sempre muda, pois "as informações são processadas pelo(s) indivíduo(s) e resultam em estratégias de ação. Como resultado das ações, novos fatos (artefatos e/ou mentefatos) são incorporados à realidade, obviamente, modificando-a, armazenando-se na coleção de fatos que a constituem." (p. 56). Assim, conclui Sousa (2016, p. 159) que o esquema *Ciclo do Conhecimento* é "factível à interpretação de fatores que influenciam essa relação, abrindo opções para fazer convergir de modo ampliado Educação e Vida, ou manter a condição limitada de convergência da escola e poder.".

Mandala Etnomatemática: a arte como recurso à popularização da ciência

A Mandala Etnomatemática é uma obra do artista plástico Polô Czermak, uma colagem de um metro quadrado. Na concepção do artista, a obra expressa um conceito epistemológico do Programa Etnomatemática e, na concepção de Sousa (2016, p. 235), além disso, tem "o propósito de estender os conhecimentos [...] a um grande número de pessoas, pela importância que atribuíamos a esses conhecimentos para a Educação.".
Czermak não é acadêmico, nem tem boas histórias a contar sobre sua experiência com a Matemática escolar, mas sua arte reflete multietnias, o que o motivou a aceitar o desafio. Inicialmente, com base na concepção hegemônica da disciplina Matemática, cujo caráter de universalidade e decorrente padrão de racionalidade são contestados pelo Programa Etnomatemática, conforme D'Ambrosio (2011), Czermak inferiu à Etnomatemática o significado de Matemática de etnias.

No entanto, como aspectos importantes da obra destacam-se ser também um produto acadêmico e sua concepção artístico-epistemológica ter emergido de um diálogo entre a pesquisadora e o artista, com a explicitação do conceito Etno+Matema+Tica, que, segundo Sousa (2016, p. 150) está "muito associado ao conceito de cultura pelo compartilhamento de conhecimentos por um determinado *grupo cultural bem identificado* [de D'Ambrosio, 1988]".

A contextualização histórica é, especialmente, importante à compreensão da epistemologia etnomatemática. Segundo D'Ambrosio (2011), a Ciência Moderna, que impôs um modelo de conhecimento racional, "repousa sobre conceituações dicotômicas de saber [conhecimento] e de fazer [habilidades]" (p. 111) e o Programa Etnomatemática, além de buscar eliminar essa dicotomia, não se limita ao

> estudo de "matemáticas das diferentes etnias". Muito mais que isso, é o estudo espacial e temporal diferenciado das várias *technés* ou *ticas* (= maneiras, técnicas, habilidades) de

> *matemá* (= explicar, entender, lidar e conviver) em diferentes *etnos* (= contextos naturais, culturais, sócio-econômicos). (D'Ambrosio, 2011, pp. 111-112).

Esclarecidos os aspectos conceituais do Programa, que justificam a "diversidade de situações geográfica e historicamente distintas que envolvem a relação do Ser Humano com o conhecimento, com certa ênfase para a colonização europeia" (Sousa, 2016, p. 241) da obra de Czermak, a Mandala Etnomatemática, como um recurso à popularização, intenta a promoção de reflexões epistemológicas a partir da fruição da complexidade e beleza da essencialidade do *Ciclo do Conhecimento*.

Além da construção de um instrumento de popularização do *Ciclo do Conhecimento* por um artista reunir olhares artísticos e teórico-filosóficos sobre o conhecimento, concordamos com Sousa (2016, p. 234) que o esquema d'ambrosiano não se mostra "exatamente atraente a ponto de despertar por si só a atenção de educadores em geral". A autora fundamenta-se em Moreira (2006), que defende a interação entre ciência, cultura e arte e a valorização de aspectos culturais e humanísticos da ciência para uma política pública de popularização da Ciência e Tecnologia, e no fato de que cabe à divulgação a tarefa da

> partilha social do saber, levando ao homem comum o conhecimento do qual ele historicamente foi apartado e do qual foi-se mantendo cada vez mais distanciado […]. O papel da arte neste processo seria o de permitir a abertura de visão de nosso mundo, da sociedade e do destino de cada indivíduo. […] o conhecimento científico ainda hoje é incapaz de pensar o indivíduo, de conceber a noção de sujeito, de pensar a natureza da sociedade e de elaborar um pensamento que não seja somente matematizado, formalizado, simplificante. […] Para manter viva a sensibilidade nos homens, é preciso refletir as questões científicas sobre a ótica das artes […] como uma importante tarefa filosófica. (Alcântara & Porto, 2011, p. 12).

A Mandala Etnomatemática, figura 2, explicita a arte multiétnica de Polô Czermak (n.d., para.1) e sua concepção de que "*la meilleure représentation de la culture d'un peuple est l'Art.*".

Figura 2: Mandala Etnomatemática de Czermak, em Sousa (2016)

A obra ainda pode facilitar a explicação da teoria geral do conhecimento para "educandos, sejam crianças, adolescentes, jovens e adultos em geral, considerando o seu caráter fruitivo e lúdico", segundo Sousa (2016, p. 238), que dá ênfase à consideração de D'Ambrosio, autor do esquema que lhe serviu de inspiração, de que a Mandala Etnomatemática ilustra "a complexidade, a transdisciplinaridade e a transculturalidade que são a quintessência da Etnomatemática" (p. 241).

Mandala Etnomatemática: convite à fruição do Ciclo do Conhecimento

No âmbito dessa abordagem acadêmica, buscamos trazer os aspectos conceituais do Programa Etnomatemática, que encontraram na arte uma expressão de sua epistemologia. No entanto, é nossa intenção que, ao público em geral, ocorra o caminho inverso, isto é, que a arte possa provocar uma fruição integral de aspectos sociais, culturais, históricos, geográficos, filosóficos, religiosos, acadêmicos, tecnológicos, econômicos, políticos, pedagógicos, que envolvem o conhecimento, implicando múltiplas reflexões acerca: da dinâmica do encontro de culturas que, como diz D'Ambrosio (1988), subjaz à evolução dos processos cognitivos, das necessidades de sobrevivência, das evidências de transcendência humana, dos diversos interesses que estão implícitos nesses processos, interferindo-se, contínua e mutuamente, na construção do *corpus* de conhecimento da humanidade.

Enfim, entendemos que a obra pode servir de recurso à formação de educadores, ampliando suas concepções de conhecimento e trazendo contribuições para inovações pedagógicas e, enquanto mandala, pode prestar-se como ponto focal de reflexão acerca do Ser Humano e da humanidade.

Referências bibliográficas

Alcântara, M. M., & Porto, C. M. A relação entre a arte e a ciência para a popularização do conhecimento. *Diálogos & Ciência,* 9(25), 1-14.

Czermak, P. (n.d.). *L'art multi-ethnique de Polô Czermak.* Recuperado el 23 de setembro de 2017 de http://www.poloczermak.com/Site/Bienvenue.html.

D'Ambrosio, U. (1988). *Etnomatemáticas: un Programa de Investigación en de lasIdeas y en la Cognición*. Recuperado el 23 de setembro de 2017 de http://web.nmsu.edu/~pscott/isgems41.htm.

D'Ambrosio, U. (2011). *Educação para uma sociedade em transição*. 2. ed. Natal, RN: EDUFRN, 2011.

D'Ambrosio, U. (2013). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. 5. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Moreira, I. C. (2006). A inclusão social e a popularização da ciência e tecnologia no Brasil. *Inclusão Social*, 1(2). 11-16. Recuperado el 2º de setembro de 2017 de http://revista.ibict.br/inclusao/article/view/1512/1707.

Sousa, O. S. (2016). *Programa Etnomatemática: interfaces e concepções e estratégias de difusão e popularização de uma teoria geral do conhecimento*. Tesis de Doctorado no publicada, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, Brasil.

DECISIONES EN EL CAMPO ECONÓMICO APLICANDO MODELOS MATEMÁTICOS

María Rosa Rodríguez, Sandra Noemí Franco, Gustavo Ariel Sota
Facultad de Ciencias Económicas - Universidad Nacional de Tucumán. (Argentina)
mrrodriguez@face.unt.edu.ar, sandranfranco@hotmail.com, gustavosota1@hotmail.com

Resumen

El lenguaje matemático aporta a las Ciencias Económicas relaciones entre variables, explicando fenómenos a través de modelos matemáticos que interpretan la realidad social. Estos modelos aportan la estructura conceptual necesaria para admitir predicciones de validez general. La Matemática es una herramienta fundamental para consolidar el conocimiento y tomar decisiones óptimas con el objetivo fundamental de todo empresario el de lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido
El propósito de este curso es mostrar la importancia de la Matemática y el requerimiento del Análisis Marginal para expresar su vinculación con decisiones en el campo económico – social, contextualizando los conceptos a través de formulaciones algebraicas que conducen de manera rápida y precisa a importantes decisiones e interpretaciones económicas.

Palabras Claves: contribución marginal, mark up, optimizaciones

Abstract

Mathematical language provides relations between variables to Economic Sciences, explaining phenomena through mathematical models that interpret social reality. These models provide the conceptual framework necessary to support predictions of general validity. Mathematics is a fundamental tool to consolidate knowledge and make optimal decisions with the fundamental objective of every entrepreneur: to achieve greater profitability considering the invested capital. The purpose of this course is to show the importance of Mathematics and the requirement of Marginal Analysis to express its connection with decisions in the economic - social field, contextualizing the concepts through algebraic formulations which lead quickly and accurately to important decisions and economic interpretations.

Keywords: marginal contribution, mark up, optimizations

Introducción

El inicio y el desarrollo de una actividad económica, está sujeto a la incidencia de factores endógenos y exógenos, al comportamiento de los mercados internos y externos, etc. Estos elementos, de manera aislada o concurrente, condicionan el quehacer económico.
La Educación Matemática hace hincapié en el desarrollo del pensamiento lógico-formal, procurando lograr personas competentes para la resolución de problemas. Esto es importante en el quehacer

económico, donde los empresarios deben adoptar decisiones óptimas para lograr mayores beneficios. Toda actividad requiere el uso de algoritmos, procesos lógicos, estimación de resultados, construcción de modelos matemáticos y utilización de procedimientos del cálculo.

La Matemática en las Ciencias Económicas es una herramienta fundamental para adquirir y consolidar el conocimiento. Porque necesita definir las variables de interés en cada problema; establecer las hipótesis sobre sus comportamientos y determinar las relaciones entre ellas. En segundo lugar, el lenguaje matemático explica los fenómenos económicos y formula modelos que interpretan la realidad social. Estos modelos aportan la estructura conceptual necesaria para obtener predicciones válidas. Cuanto más precisas sean las posibilidades de medir las variables de interés mayor será su contenido matemático.
La presente investigación tiene como propósito la descripción del proceso de análisis, implementación y resultados obtenidos de un tema económico basado en modelación matemática. Para ello se consideran dos aspectos. En el primero se detallan los fundamentos teóricos y las actividades en cada uno de los casos considerados en los diferentes dominios de modelación elegido. Luego, se describe el proceso de descripción e implementación de los casos (Rodríguez y Quiroz, 2014).

El Análisis Marginal es una herramienta fundamental para optimizar el beneficio de una empresa vinculado con la toma de decisiones en la formación de costos y precios. Estudia la generación de utilidades en una empresa, en función de los aportes individuales de cada producto tangible o intangible (servicio) elaborado. Además, modela situaciones sobre los diferentes niveles de producción que persigue el empresario a fin de lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido. Dichas decisiones serán racionales y convenientes sólo si el beneficio excede el costo adicional de hacerlo.

El objetivo de este Curso es mostrar la importancia de la Matemática y el uso del Análisis Marginal en la optimización del beneficio de una empresa cuando existen cambios en el comportamiento de los costos fijos o en los costos variables unitarios o en el incremento de las ventas debido a la disminución en los márgenes de marcación o Mark Up.
El cambio en los costos fijos produce sucesivos aumentos de la producción, el aumento en los costos variables unitarios puede deberse a incrementos en los incentivos a la producción y por último la empresa lograría aumentar sus ventas si aplica rebajas sistemáticas de precios. Se aplicaron las distintas situaciones en casos reales, solicitados por directivos de empresas con actividades en la provincia de Tucumán, Argentina.

Para optimizar el beneficio de las empresas se integró la teoría con la práctica y se construyeron modelos matemáticos que mostraron las variaciones en los costos y beneficios de una empresa frente a sucesivos cambios en los niveles de producción.
En este curso se procurará dar sentido y contextualizar los conceptos, a través de modelos matemáticos que aporten valiosa información y conducen de manera rápida y precisa a importantes decisiones e interpretaciones económicas.

Conceptos Económicos

Costo Total

Toda empresa tendrá una serie de costos fijos y de costos variables.

1. *Costos Fijos, Constantes o Estructurales*: son aquellos costos totales que se mantienen cuasi constantes ante cambios en el nivel de actividad. No dependen del nivel de producción y/o ventas de la empresa y son independientes del volumen del negocio..
   Los costos fijos no son permanentemente fijos, sino que llegado a ciertos niveles de actividad pueden variar.

2. *Costos Variables*: son los que aumentan o disminuyen frente a cambios en el nivel de actividad. Dependen del volumen de producción y/o ventas de la compañía.
   Esta clasificación de los costos no es absoluta. Algunos se mantienen constantes y otros experimentan modificaciones al pasar de un nivel de producción a otro. En cualquier caso existen modificaciones en los costos.
   El costo total es la suma del costo fijo total más el costo variable total: $CT = CF + cv \,.\, Q$ donde el costo variable total es el producto entre el costo variable unitario *(cv)* y la cantidad producida (Q).

Costos y Beneficios

El costo-beneficio es una técnica importante dentro de la teoría de decisión, basada en el principio de obtener los mejores resultados al menor esfuerzo invertido. Si los beneficios superan el costo son exitosos, caso contrario fracasan. Además, es útil en el análisis de las ventajas de un proyecto de inversión. El proyecto puede consistir en el desarrollo de nuevos productos, adquisición de nuevas maquinarias o cambios en los niveles de producción.
La decisión de aumentar la capacidad de una actividad depende de que el nuevo nivel de producción brinde mayor beneficio que el que se obtiene ocupando la capacidad actual.
El beneficio o utilidad se define: $B = I - CT$ donde el ingreso **I** es la cantidad que recibe una empresa por venta de productos o servicios.
Si pv es el precio de venta unitario: $B = pv \,.\, Q - (CF + cv \,.\, Q) \Rightarrow B = (pv - cv) \,.\, Q - CF$

Análisis Marginal

Una herramienta central de la investigación económica es conocida como *análisis marginal*, que analiza el cambio en los costos y beneficios frente a cambios en las acciones. La cuestión central es si los beneficios esperados de la acción superan el costo añadido.
El análisis marginal contribuye a equilibrar los costos y beneficios de las acciones adicionales, ya sea para producir más o consumir más, aumentando la utilidad.
Se recurre al análisis marginal cuando se presentan modificaciones en alguno de los términos de la expresión del Beneficio o cuando la nueva utilidad supera el costo añadido.

$$B = pv * Q - cv * Q - CF \qquad \text{ó} \qquad B = (pv - cv) * Q - CF$$

El factor $cm = pv - cv$ recibe el nombre de *contribución marginal unitaria* de un producto y muestra el modo en que contribuyen los precios de los productos o servicios para cubrir los costos fijos y generar utilidad.
Cuando se producen cambios en los costos variables unitarios y en los precios de venta, el estudio se reduce a las modificaciones en la contribución marginal unitaria. Su disminución se debe, especialmente cuando existe aumento de los costos variables unitarios o disminuciones de los precios de venta, que afecta a toda la actividad.
El producto de la contribución marginal unitaria por el número de unidades producidas o vendidas da la contribución marginal total (*CM*) del producto.

Aportes de la CM

Como $B = cm \,.\, Q - CF$ entonces $B = CM - CF$ y se pueden dar las siguientes alternativas:

1. Si la contribución marginal total absorbe el costo fijo, deja un "margen" para la utilidad o beneficio. $CM > CF$ $\Rightarrow B > 0$
2. Cuando la contribución marginal total es igual al costo fijo, no deja ganancia, la empresa está en su punto de equilibrio y su beneficio es nulo. $CM = CF$ $\Rightarrow 0$
3. Cuando la contribución marginal total no alcanza a cubrir los costos fijos, la empresa puede seguir trabajando a corto plazo ya que la contribución marginal absorbe parte de los costos fijos. $CM < CF$ Hay *Pérdida* $\Rightarrow$
4. La situación más crítica se da cuando la contribución marginal unitaria es negativa. En este caso extremo, se debe tomar la decisión de no continuar con la elaboración de un producto o servicio. $cm < 0$ o sea $pv < cv$

El concepto de contribución marginal es muy importante en las decisiones de mantener, retirar o incorporar nuevos productos de una empresa, por la incidencia que tienen en la absorción de los costos fijos y la capacidad de generar utilidades.
La disminución de *cm* surge cuando aumentan los costos variables unitarios o reducen los precios de venta, que afectan a toda la actividad o por tramos.
Las modificaciones pueden afectar a toda la actividad con la misma magnitud o bien afectar a distintos tramos de la actividad con magnitudes diferentes para cada tramo.
Se desarrollarán tres situaciones comerciales que requieren decidir sobre el aumento de producción de una actividad, cuando se presentan modificaciones en los costos fijos, disminución en la contribución marginal unitaria y rebaja del precio de venta o Mark Up.

Desarrollo de Aplicaciones

Como parte de la investigación, se realizó una consulta entre varias empresas de Tucumán, Argentina, interesadas en realizar cambios en la estructura de sus productos. Así, surgieron tres situaciones distintas a decidir: cuando existen sucesivos aumentos de la producción, aumento en los costos variables unitarios debido a incrementos en los incentivos a la producción y el aumento de sus ventas se debe a rebajas sistemáticas de precios.

1er Caso: Modificaciones de los Costos Fijos

Se construirán modelos matemáticos que muestran las variaciones en los costos y en los beneficios de una empresa frente a sucesivos cambios en los niveles de producción.
Entre las empresas consultadas en la provincia se seleccionó una fábrica de parquet que intenta modificar su estructura debido al gran incremento en la demanda de pisos y estima que la adquisición de nuevos equipos le permitirá incrementar su producción, generando consecuentemente un aumento en los ingresos. No obstante, las decisiones tomadas llevarían inevitablemente a un aumento en los costos de estructura, los cuales deberán analizarse para evaluar la ampliación más conveniente.
En la situación actual la fábrica de parquet produce $Q_1 = 1000$ unidades, mientras que la compra del nuevo equipamiento le permitiría duplicar sus niveles de producción a $Q_2 = 2000$. Los Costos Fijos actuales son $CF_1 = \$150.000$ y se calcula que los Costos Fijos con la nueva estructura alcanzan a $CF_2 = \$250.000$. El Precio de venta unitario es *pv* de \$250/unidad, el Costo variable unitario *cv* de \$50/unidad. Por lo tanto la Contribución marginal unitaria *cm* es de \$200/unidad.
La inversión quedará plenamente justificada si el nuevo nivel de producción permite superar el beneficio derivado de la producción actual y cubrir los nuevos costos fijos.
El beneficio con la máxima producción actual es $B_1 = 1.000 * 200 - 150.000 = 50.000$

Frente a un cambio en el nivel de producción, la cantidad mínima es $\mathbf{Q = \frac{B + CF}{cm}}$

Entonces, el nivel mínimo que justifique una inversión que incremente el nivel de producción actual, de 1000 unidades, es $\mathbf{Q_{n_1} = \frac{B_1 + CF_2}{cm}}$ donde

Entonces: $\mathbf{Q_{n_1} = \frac{B_1 + CF_2}{cm}} = (50.0000 + 250.000) / 200 = 1.500$

La nueva estructura debe superar la cantidad de 1.500 unidades y el beneficio que aporta esa producción es**:** $\mathbf{B_{n_1}} = 1.500 * 200 - 250.000 = 50.000$

Que es el mismo beneficio que se alcanza usando al máximo la estructura actual. La compra de nuevo equipamiento se realizará, sólo si aumenta el beneficio esperado (\$50.000), que se logrará cuando se produzcan y vendan más de 1500 unidades.
El resultado obtenido de producir 1500 unidades se denomina *Punto de Resultado Indiferente (PRI)* que representa el nivel de actividad que arroja un beneficio igual al que se consigue usando al máximo la capacidad de la estructura anterior.
Para sucesivos aumentos de la estructura se consideran las variaciones en costos e ingresos.
El Nivel de Producción máxima con un 2do aumento de la estructura $Q_3 = 3000$ unidades, un Costo fijo de la nueva estructura CF_3 de \$300.000 y sin cambios en la *cm* se calcula su beneficio. Para que sea conveniente abordar el segundo tramo, debe ser superado el Punto de Resultado Indiferente $\mathbf{Q_{n_1}} = 1500$

Con el primer aumento de la estructura, el beneficio usando la máxima cantidad (2000 unidades) es: $\mathbf{B_2 = Q_2 * cm - CF_2} = 2000 * 200 - 250.000 = 150.000$.

El PRI con el segundo aumento es: $\mathbf{Q_{n_2}} = \frac{\mathbf{B_2} + \mathbf{CF_3}}{\mathbf{cm}} = \frac{150.000 + 300.000}{200} = 2250$

La nueva estructura debe superar la cantidad de 2250 unidades y el beneficio que aporta esa producción es: $\mathbf{B_{n_2}} = 2250 * 200 - 300.000 = 150.000.$

Convendrá realizar cualquier inversión, sólo si aumenta el beneficio esperado ($150.000) que se logra cuando se fabrican y se venden más de 2250 unidades, que es el PRI.
En este último tramo, el beneficio obtenido usando al máximo este aumento de la estructura (3000 unidades) es: $\mathbf{B_3} = \mathbf{Q_3} * \mathbf{cm} - \mathbf{CF_3} = 3000 * 200 - 300.000 = 300.000$
Estos cálculos permiten visualizar el comportamiento de los distintos parámetros cuando se producen nuevas y mayores ampliaciones de la estructura.
Para el caso de los sucesivos aumentos de la producción de piso de parquet, se observa que el tramo del nivel de actividad entre 1100 y 1200 unidades no es conveniente, ya que el resultado se convierte en quebranto. Y aunque el beneficio se recupera a partir de las 1250 unidades, no supera al de las 1000, sino recién cuando excede el nivel de las 1500 unidades.
Si el nivel de actividad mínimo que justifica la nueva estructura está muy cerca del nivel máximo que ella permite, puede resultar desaconsejable la inversión, ya que, ante la necesidad de un pequeño aumento en la producción, sería necesario aumentar la estructura.

2do Caso: Contribuciones Marginales Decrecientes

Una fábrica de cosméticos de la provincia de Tucumán nos consultó sobre la toma de decisiones en la producción de una máscara de pestañas cuando aumenta el costo variable unitario, debido a incentivos a sus operarios.

Los dueños realizaron incrementos en el incentivo a la producción en sus operarios y quieren conocer si se incrementa el beneficio para la empresa, aumentando la producción.
Según sus directivos los costos fijos son de $70.000 mensuales y el precio de venta de su producción es de $250 cada unidad. El costo variable unitario se compone de $100 de materia prima más un incentivo a la producción cuyo valor por unidad producida aumenta de a $20 cada vez que son superadas las 400, 700 y las 1000 unidades.

Como el *pv* no experimenta cambios y los **cv** aumentan entonces las *cm* decrecen.
En la empresa de cosméticos, se presenta la producción en tres tramos, acorde a un costo variable unitario que aumenta. El concepto económico que prima es el de Punto de Equilibrio que es el nivel de actividad en el cual la empresa no tiene beneficios ni pérdidas.
Para determinar si se puede lograr beneficio en cada tramo, se calculan los Puntos de
Equilibrio en cada uno: $\mathbf{Q_1} = \frac{70000}{130} = 539 \qquad \mathbf{Q_2} = \frac{70000}{110} = 636 \qquad \mathbf{Q_3} = \frac{70000}{90} = 778$

El Punto de Equilibrio del primer tramo corresponde a 539 unidades, esto no es posible porque la *cm* ya no es de $130 sino sólo de $110. En el segundo tramo es de 636 unidades que corresponde a la *cm* de

$110; por lo tanto este Punto de Equilibrio existe en la realidad de la empresa. En el último tramo, el Punto de Equilibrio es de 778 unidades y también es un dato real porque la *cm* es realmente de $90. En consecuencia, existen dos puntos de equilibrio, uno en 636 unidades y el otro en 778 unidades. Por lo tanto, la empresa no puede operar en el primer tramo porque sólo obtendría quebrantos, mientras que en los siguientes tramos el beneficio sí es posible.

En el segundo tramo el máximo nivel es de 700 unidades con una contribución marginal unitaria de $110 por lo tanto su beneficio es: $B_2 = 700 * 110 - 70000 = \$7000$
Es importante saber si aumenta el beneficio de la empresa en el tercer tramo Para ello se recurre a la expresión $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{B} + \mathbf{CF}}{\mathbf{cm}}$ donde $\mathbf{Q}_{n3} = \frac{\mathbf{B_2} + \mathbf{CF}}{\mathbf{cm_3}} = \frac{7000 + 70000}{90} = 856$
Por lo tanto, convendrá aumentar la actividad para pasar al tercer tramo si se pueden superar las 856 unidades de máscara de pestañas. En este nivel se recupera el máximo beneficio posible dentro del segundo tramo.

3er Caso - Rebaja del Precio de Venta por Margen de Marcación (Mark up)

Margen o Márgenes es una palabra que se usa mucho en los negocios y está relacionado con el concepto de ganancia en la venta. El más sencillo es el margen de marcación o Mark Up, que es una estrategia de fijación y ajuste de precios.
El Mark Up es un índice que se aplica sobre el costo de adquisición de un producto y permite determinar con precisión el precio de venta cubriendo todos los costos y gastos y asegurando un margen de ganancia, aun cuando el cliente pida descuento.
Los comerciantes casi siempre fijan sus precios considerando el costo de adquisición más el margen de marcación (Mark Up). Si un comerciante compra a sus proveedores un producto a $1.000 y le aplica un Mark Up del 100%, significa que lo venderá a $2.000. Esto es costumbre en la mayoría de los negocios.

Un negocio de marroquinería que vende carteras para damas con costos fijos mensuales de $200.000, está evaluando la posibilidad de aumentar sus ventas a través de una política apoyada en ofertas sistemáticas a precios rebajados. Su margen de marcación sobre los costos de adquisición es del 100% y su venta total mensual asciende a $500.000. Algunos estudios de mercado le permitieron estimar las siguientes posibilidades: si se disminuye el margen al 90% podría aumentar sus ventas a $ 600.000; si disminuye al 80%, podría aumentar a $700.000. Nos solicitaron asesoramiento sobre la política más conveniente.
Para obtener el precio de venta, al costo se le agrega el margen $pv = cv\ (1 + m)$ donde m= margen de marcación. Luego $\frac{pv}{cv} = 1 + m \qquad (1)$

Se considera el Punto de Equilibrio: de $B = cm \cdot Q - CF$ y si $B = 0 \Rightarrow CF = cm \cdot Q$

De $cm = pv - cv \Rightarrow \frac{pv}{cv} cm = cm\ (1 + m) \Rightarrow pv\ (\frac{pv}{cv} - 1) = cm\ (1 + m)$

$pv \cdot m = cm\ (m + 1)$ luego $pv = \frac{m + 1}{m} \cdot cm$ resulta $pv \cdot Q = \frac{m + 1}{m} \cdot cm \cdot Q$

$I = \frac{CF\ (m + 1)}{m}$ es el Punto de Equilibrio en términos monetarios con Mark Up.

El Punto de Equilibrio en el primer tramo es $I_1 = \frac{200000 \,.\, 2}{1} = 400.000$

El Beneficio Máximo del 1er tramo $B_1 = \frac{\text{Ventas Máx Primer Tramo} \,.\, m}{1+m} - CF = 50.000$

El PRI del segundo tramo es $I_2 = \frac{(CF + B_1)\ (1+m)}{m}$ y resulta $I_2 = 527.778$

El Beneficio máximo en el segundo tramo: $B_2 = \frac{600000 \,.\, 0.90}{1.90} - 200000 = 84.211$

El PRI en el tercer tramo es $I_3 = \frac{(200000 + 84211)\ \ 1.80}{0.80} = 639.474$ y $B_3 = 111.111$

El negocio puede operar con beneficios a partir de $400.000 de ventas, situación que es posible dentro del primer tramo. Si el estudio de mercado es acertado, la alternativa de vender rebajando al 90% en el segundo tramo, es conveniente superando los $527.778 de ventas. Pues, a menores niveles el beneficio es menor que el que se obtiene operando al máximo en el tramo anterior. Análogamente, es conveniente disminuir al 80% si supera el nivel de ventas $639.474. El Mark Up es un caso de contribuciones marginales decrecientes por tramos porque estima cuánto podrían aumentar sus ventas si aplica rebajas sistemáticas.

Conclusiones

Con el estudio analítico se visualiza el comportamiento de los distintos parámetros frente a modificaciones en el nivel de actividad.
Con este Curso se procura dar sentido y contextualizar los conceptos y, sobre todo, revelar la inmensa lógica empresarial que tiene la sencillez de su origen y la facilidad de comprensión de sus modelos matemáticos. Estos modelos aportan una valiosa información, que lleva a importantes decisiones e interpretaciones económicas. También, muestran la significación y utilidad para el empresario, permitiéndole evaluar el impacto económico de sus decisiones, de manera rápida y precisa. El objetivo fundamental de todo empresario es lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido.

El Análisis Marginal es una herramienta muy útil para la toma de decisiones en el ámbito empresarial, tanto en el caso de producción simple como de producción múltiple. También estudia los casos de modificaciones en la contribución marginal unitaria debido a cambios en los precios de venta.

Este trabajo es parte de una investigación en curso y se continuará sobre los casos en que sufren modificaciones varios parámetros simultáneamente.
Otras herramientas que contribuyen a una mayor visualización, comprensión del problema e interpretación de los resultados son las representaciones en cuadros y gráficas. Son muy explicativas las representaciones gráficas de las contribuciones marginales totales vs los costos fijos, diferentes a las usuales de ingresos vs costos totales.
Este Curso proporciona a los docentes de Matemática del área económica una modelización accesible aportando valiosa información y promoviendo importantes decisiones, de manera rápida y precisa.

Referencias Bibliográficas

Camacho Peñalosa, E. et al. (2006). *Fundamentos de Cálculo para Economía y Empresa*. 1ra Edición. Madrid: Delta Publicaciones.

Rodríguez, R. y Quiroz S. (2015). Elementos de Diseño para una Clase de Matemática a través de Modelación Matemática. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*. 993-1000. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sydsaeter, K. y Hammond, P. (2006). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Madrid: Pearson Educación.

Yardín, A.; Rodríguez Jáuregui, H. y Bottaro, O. (2004). *El Comportamiento de los Costos y la Gestión de la Empresa*. Buenos Aires: La Ley

Yardín, A. (2010). *El Análisis Marginal, la Mejor Herramienta para Tomar Decisiones sobre Costos y Precios*. Buenos Aires: Osmar Buyatti.

EL CARÁCTER ESTABLE DEL CAMBIO Y SU ARTICULACIÓN CON LOS NIVELES DE CONSTANTIFICACIÓN: UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Jesús Enrique Hernández-Zavaleta, Ricardo Cantoral
CINVESTAV-IPN. (México)
jesus.hernandez@cinvetav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Esta investigación es parte del programa de investigación sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) cuyo objetivo consiste en caracterizar formas de significación de la variación en escenarios diversos. La *problematización del saber matemático* como metodología historiza y dialectiza en el análisis de textos originales, se presenta el análisis sobre la sección *De la Invención de las Fuerzas Centrípetas* de Newton (1687) y el trabajo sobre el problema colineal de los tres cuerpos tratado por Euler (1767), se muestra como *los niveles de constantificación* y *la búsqueda del carácter estable del cambio* son medios claves para tratar los procesos variacionales.

Palabras clave: socioepistemología, pensamiento-y-lenguaje-variacional, cambio, variación, problematización

Abstract

This work as part of a research program on Variation Language and Thinking is aimed at characterizing the variation meaning in different settings. We use problem-solving mathematical- knowledge as a methodology that provides a historical and dialectical character for the analysis of authentic texts. We present the analysis of Newton's "*From the invention of Centripetal Forces" (1687)* and the work on the co-linear problem of the three bodies by Euler (1767). So, we showed how the constant-levels and the search of the stable character of the change constitute key aids to work with variation processes.

Key words: sociepistemology, variational-language-and-thinking, change, variation, problematization

Introducción

El interés de este reporte es mostrar el análisis de los ejemplos que se han utilizado para la construcción y fortalecimiento de los mecanismos de *la búsqueda del carácter estable del cambio* y *los niveles de constantificación* (Cantoral, 1990; 2016). El primero tiene su origen en los *Philophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687), en la relación de lo que él llamaba las razones primeras, últimas y los momentos implican el uso de una forma de razonamiento que tiene como base la *pequeña variación*. El segundo encuentra su ejemplo en el artículo *Considérations sur le probleme des trois corps* (Euler, 1775) en la cual se describe la solución del problema colineal de los tres cuerpos y da argumentos de porqué

comenzar su estudio con esas consideraciones, como complemento se consultó *De Motv Rectilinium: Trivm corporvm se mvtvo attrahentivm* (Euler, 1767).

El contexto de este escrito se adscribe a una investigación en curso que tiene como objetivo la búsqueda de regularidades en las prácticas predictivas en el trato de situaciones variacionales de naturaleza errática o caótica (Hernández Zavaleta & Cantoral, 2017). La hipótesis de partida consiste en asumir que la articulación de elementos como la elección adecuada de las variables y los órdenes de variación anteceden a la predicción y los mecanismos: *niveles de constantificación* y *la búsqueda del carácter estable del cambio*; ambos en correlación directa con prácticas socialmente compartidas involucradas en los procesos de construcción de lo variacional. Lo anterior da lugar a una forma particular de razonamiento para tratar con el cambio y la variación.

Elementos metodológicos

Centrados en la dimensión epistemológica de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2016) que se ocupa de la naturaleza epistemológica de los conceptos matemáticos, dando respuesta a la pregunta ¿qué debe la producción del saber a la experiencia y al contexto? De esta forma en la problematización (como método) se realiza el análisis de textos originales o paradigmáticos de una época que resultan clave para el desarrollo del campo teórico de interés para un investigador, con ella, es posible identificar que los saberes matemáticos nacen con una práctica de referencia específica. La propuesta es *historizar* y *dialectizar* las obras matemáticas que dieron lugar a las matemáticas presentadas en propuestas didácticas actuales, es decir, no basta con la descripción temporal de la evolución de un concepto, sino, es imperante cuestionar las formas que toma en una época determinada y explorar su evolución hasta su génesis y mostrar su dinamismo en la forma de presentarlo. Posteriormente con base en esta información se está en posición para proponer instrumentos que permitan intervenir en el aula o recabar datos experimentales.

Existen cinco elementos que conforman la problematización del saber matemático, todos actúan de forma tal que brindan información sobre un concepto, sin embargo, dependiendo de la naturaleza del concepto, las obras estudiadas o el interés del investigador se evidencian unos más que otros. La

Figura 1 resume estos cinco elementos.

Figura 1. *Elementos para la problematización del saber matemático*

En la *génesis histórica* se plantea la génesis de los conceptos y los procesos asociados, no sólo como un enfoque epistemológico sino evidenciando las circunstancias sociales, culturales e institucionales que propiciaron la construcción de conocimiento a lo largo de su evolución histórica, en otras palabras, provee los elementos para la reconstrucción de la génesis de prácticas o la epistemología de prácticas.

El análisis de la *didáctica de antaño* se desprende de la forma como era concebida la enseñanza de la matemática, asimismo el grado de importancia de ésta en el panorama del conocimiento general y de su relación con otras áreas de conocimiento. Así a través de dicho análisis, es posible detectar concepciones de la enseñanza en las que se muestran diversas formas de difusión de la Matemática conformada por necesidades temporales y contextuales de los matemáticos de una época determinada.

La *fenomenología intrínseca* de los conceptos matemáticos es un constructo que restituye al significado actual mediante el conjunto de otros significados construidos a lo largo de la génesis conceptual y que la propia historia de las ideas y las prácticas eliminó. Resignifica al uso social de un concepto y lo dota de nuevas fuentes de significación que permiten elaborar nuevos discursos y formas de presentación de la matemática escolar.

Los *constructos característicos* se reconocen a través del análisis de los procesos "reales" por los que atravesó la construcción de cada concepto matemático; posibilitan la identificación de analogía y procesos inductivos que definen formas personales de aproximación al objeto. Así se llega a definir estilos de pensamiento matemático y se evidencian estructuras cognoscitivas que posibilitan la adquisición de nuevos conocimientos.

La *praxis educativa* se refiere a la reflexión sobre la práctica educativa, es la forma en que los resultados, conjeturas, modelos, teorías, métodos o técnicas develados por los análisis en los elementos anteriores inciden en el aprendizaje de la matemática por parte de los estudiantes, así la relación biunívoca entre la investigación y la praxis educativa asegura los aportes de la investigación afinados progresivamente en su aplicación e iteración con distintas poblaciones.

Sobre la elección de los textos analizados

La elección de los textos que se han analizado en esta investigación tiene su génesis en las ideas fundacionales de la TSME, es decir, I. Newton es referencia obligada debido a las aportaciones que se hicieron para el sustento de la teoría, aquí se retoma que una de las ideas centrales para la construcción de los elementos del Cálculo: las cantidades infinitamente pequeñas para la búsqueda de la ley. Luego L. Euler es una forma distinta de acuñar las cantidades infinitamente pequeñas, partiendo de los resultados en su trabajo sobre el problema de tres cuerpos que interactúan gravitacionalmente sobre la línea recta se obtiene que uno de los tres cuerpos es de masa infinitamente pequeña, esta idea es retomada para los estudios posteriores del problema, particularmente Poincaré (1898) la utiliza haciendo variar el tamaño de la masa en cantidades pequeñas.

Primer ejemplo: *De la Invención de las Fuerzas Centrípetas*

El primer ejemplo se sustenta en las leyes físicas que durante largo tiempo han dominado el quehacer de la Física, y en general el desarrollo científico, es la forma en que Newton concebía el movimiento de un

cuerpo sobre órbitas, en el cual pensar en las tangentes se vuelve de vital importancia debido a las fuerzas que actúan sobre él.
Proposición I, Teorema I, Sección II (*De la Invención de las Fuerzas Centrípetas):*

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Las áreas, descritas por cuerpos que giran sujetos a un centro de fuerza inmóvil por radios unidos a dicho centro, están en el mismo plano inmóvil y son proporcionales a los tiempos

Fuente especificada no válida.

Se debe demostrar que mismas áreas se recorren en tiempos iguales y se encuentran en el mismo plano. Newton recurre a la geometría haciendo el diagrama que aparece en la

Figura 2 (que hoy se diría de fuerzas, en su demostración no recurre a ninguna expresión vectorial).

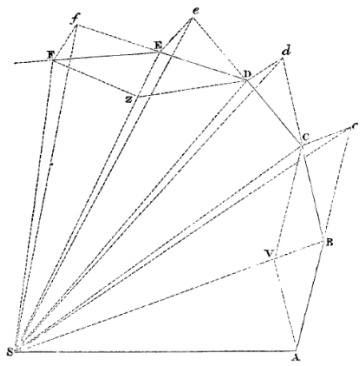


Figura 2 *Diagrama que muestra la interacción de fuerzas sujetas al centro S, la trayectoria del cuerpo es ABCDEF.*

La demostración comienza suponiendo el tiempo en intervalos iguales y un cuerpo moviéndose en línea recta, por su fuerza innata, en el primer tiempo de AB. Continúa, haciendo uso de la Primera Ley de movimiento que dice, todo cuerpo permanecerá en reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas aplicadas sobre él. Así el cuerpo seguirá su camino hasta el punto *c,* de tal forma que $AB = Bc$. Se trazan los radios SA, SB y Sc y escribe que los triángulos ΔASB y ΔBSc tienen áreas iguales por tener un lado con el mismo tamaño y compartir otro. Otra forma de verlo es que ambos triángulos comparten la misma altura, como se muestra en la
Figura 3 y al tener el mismo tamaño en la base sus áreas son iguales.

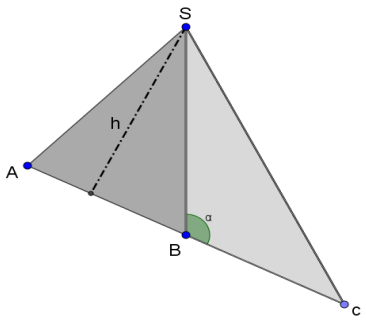


Figura 3 *Se muestra que ambos triángulos comparten la altura h y tienen la misma base, por lo tanto, sus áreas son iguales.*

Continua la demostración diciendo que cuando el cuerpo llega a *B* actúa sobre él una fuerza centrípeta instantánea que lo dirige hacia *S*, su trayectoria se modifica en la dirección *d,* así forma un paralelogramo trazando una recta desde *c* paralela a *BS* que interseca a *Bd* en *C*.

Para demostrar que las fuerzas están en el mismo plano recurre, al Corolario I de sus leyes, ahí plasma que la diagonal de un paralelogramo es la fuerza resultante de las otras actuando juntas en sus lados, entonces el cuerpo que inicia su movimiento en B se encontrará en C, por lo tanto, están en el mismo plano que el triángulo ΔASB. Con argumentos similares si una fuerza centrípeta actúa sobre C, D, E y F, demuestra que todas las trayectorias BC, CD, DE, EF están en el mismo plano y que los triángulos y que el área de los triángulos ΔCSD, ΔDSE, ΔESF, etcétera, son iguales. Por lo tanto, describen áreas iguales en tiempos iguales.
El *carácter estable del cambio* se presenta, cuando hace que el número de triángulos aumente y su área disminuya hasta el infinito, de esta manera el perímetro último de ADF pertenecerá a una curva. Entonces debido a la fuerza centrípeta, el cuerpo es continuamente separado de su tangente y siempre recorrerá áreas en tiempos proporcionales. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestra la demostración en latín y se encierra en un recuadro el texto que da indicios de como la búsqueda de la estabilidad del cambio permea en las ideas de Newton.

Este teorema dio pie al desarrollo del concepto de magnitud del momento angular y su conservación. Utilizando lo trabajado en la demostración de este teorema, Cantoral (1990, pág. 34) rescata la forma en que Newton prueba la ley del cuadrado inverso utilizando las leyes de Kepler. Poniendo énfasis en los movimientos rectos que hace el cuerpo, el inercial sobre la recta tangente y el de caída libre hacia el centro *S* y tomando al sistema Sol – Tierra como preliminar para llegar a ley de la gravitación universal y el planteamiento de la interacción gravitacional de dos o más cuerpos de masas diferentes.

Segundo ejemplo: *el problema colineal de los tres cuerpos*

En esta sección se mostrará las formas de expresión de los *niveles de constantificación* en la manera en que Euler (1767; 1775) plantea el problema de la interacción gravitatoria de tres masas de diferente tamaño y hace algunas acotaciones para obtener la primera solución particular homográfica (todas sus configuraciones son semejantes entre sí) conocida, también se retoman las interpretaciones que hace García (2007) sobre el álgebra y los conceptos actuales que se retomaron de estos escritos de Euler.

Primer nivel de constantificación: Euler (1775) comienza haciendo referencia al problema planteado por Newton y la dificultad que ha representado para los grandes geómetras de la época y comenta que aún no se ha llegado a la solución perfecta del problema. En los párrafos del 1 al 6 comenta que habrá de comenzar por el caso más simple, considerando el caso rectilíneo antes de comenzar a buscar en secciones cónicas y menciona que la solución general, debe esperar a encontrar una solución al caso de tres cuerpos que se mueven sobre una línea recta. Compara el caso con el problema de dos cuerpos que se atraen mutuamente de Newton y el caso de caída libre en el vacío planteado por Galileo; de esta forma plantea casos en los que existen variables que debe ser constantificadas para el manejo adecuado de los datos y proceder a una descripción de la ley que rige esos movimientos.

A partir del párrafo 7 comienza a plantear el problema y una matematización sintetizada, utilizando la notación propuesta en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se propone trabajar con tres cuerpos de masas $m_1=a$, $m_2=b$ y $m_3=c$ que se mueven sobre una línea recta, manteniendo una distancia proporcional entre ellos y sus posiciones dadas por $r_1(t)=x$, $r_2(t)=y$ y $r_3(t)=z$, donde $x < y < z$ como se ve en la

Figura 4, las distancias p y q son cantidades que deben permanecer constantes en las trayectorias, es decir, al saber cómo es su comportamiento se resuelve el problema.

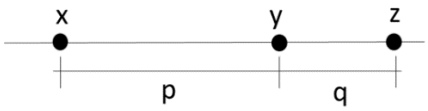


Figura 4 *Configuración sobre una línea recta del problema de los tres cuerpos.*

El problema al que se enfrenta Euler se matematiza mediante tres ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de las tres partículas, de esta forma, Euler convierte el problema en algo puramente analítico y sigue *constantificando* cuando propone que el sistema S puede ser reducido a otro de solo dos ecuaciones diferenciales en términos de las distancias p y q entre las partículas, es decir, $p = y - x$ mientras que $q = z - y$. Así hace que el sistema dependa de las distancias y sea manejable para los métodos conocidos en ese momento.

Segundo nivel de constantificación: Siguiendo el escrito (Euler, 1775), en el párrafo 9, hace una constantificación, sobre las variaciones, en la que considera un orden menor del problema que plantea, enfatiza que existe un caso en el que todas las dificultades desaparecen; cuando las distancias entre x y y conservan la misma relación entre ellas, es decir, cuando $q=np$, trabaja con el menor orden de variación que le permite transformar el problema de ecuaciones diferenciales en uno algebraico (y una ecuación diferencial de variables separables.

Ecuación 1

$$-(a+b)n^5-(3a+2b)n^4-(3a+b)n^3+(3c+b)n^2+(2c+2b)n+b+c=0$$

Ecuación 2

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{E}{p^2}$$

La Ecuación 1 es un polinomio de quinto grado y resolviéndola se obtiene el valor de n; asume la existencia de una raíz positiva, esto se comprueba por la regla de los signos de Descartes, ya que solo existe un cambio de signo en el polinomio. Por otro lado, el comportamiento gráfico de algunas condiciones iniciales de la

Ecuación 2 se muestra en

Figura 5, se observa que las condiciones iniciales en el cuadrante positivo decrecen conforme pasa el tiempo.

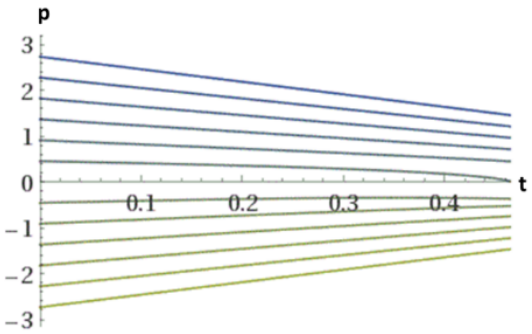


Figura 5. *Comportamiento gráfico de algunas condiciones iniciales, las positivas decrecen.*

En el párrafo 10 Euler habla del comportamiento de las soluciones, como $p = y - x$ dice que x se aproxima a y. La respuesta a cómo cambia la distancia entre estas dos partículas se ve en el comportamiento logarítmico de la función p, es decir, *crece cada vez más lento*, recurriendo a un segundo orden de variación se interpreta que la masa de y es *infinitamente pequeña* en comparación con un cuerpo de masa E debido a que su atracción gravitacional disminuye conforme se acerca. De esta manera se expresa el segundo momento de *constantificación* en el trabajo de Euler sobre el problema restringido de los tres cuerpos en su caso más simple. Este resultado es incorporado en los trabajos futuros de Euler sobre el Problema de los Tres Cuerpos y su uso se propaga en el tiempo hasta formar parte fundamental de la *búsqueda del carácter estable del cambio* en personajes como Langrange y Poincaré entre otros.

Reflexiones finales

La determinación del *carácter estable del cambio* es parte intrínseca de diversas *prácticas de referencia* en las que el cambio y la variación tienen un papel fundamental, así se debe considerar que la forma en que se expresa depende de las *prácticas socialmente compartidas*, que se dan en un contexto determinado; por ejemplo, un médico regula la cantidad de medicamento que se le aplica a un paciente dependiendo de su fisiología, así recurre a pequeñas variaciones que le permiten mantener un estado de salud viable para vivir. Otro ejemplo al que se puede recurrir es al balanceo de un péndulo invertido, que se puede construir fácilmente al poner sobre la palma de la mano un extremo de una barra con un peso en el otro, la mano debe hacer pequeñas variaciones en sus movimientos y en la dirección adecuada para mantener el estado de estabilidad de la barra.

Pensar en situaciones de comportamiento errático en contextos deterministas obedece, de cierta forma, a que los modelos matemáticos intrínsecamente presentan dinámicas no predecibles para todo tiempo, dicho de otro modo, en algún momento de tiempo no es posible saber cuál es el estado sucesivo. La fenomenología del sistema dinámico está llena de estados inestables, por lo que las prácticas matemáticas inmersas cambian en torno a la necesidad de evidenciar una aproximación al *carácter estable del cambio*, la emergencia de otras *acciones, actividades y prácticas* distintas a las que usualmente se encontraban en el paradigma mecanicista proponiendo una nueva relación con el saber y por lo tanto una forma de construcción social de conocimiento matemático y en conjunto con los *niveles de constantificación* conforman un sistema de elementos propios del estudio de la variación. Las formas de expresión de estos elementos han ayudado al estudio de la significación de la variación en la transición de casos de predicción a los no predecibles, en trabajos de Poincaré (1898), Lorenz (1963) y May (1976).

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1990). Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de “el Prædiciere y lo Analítico”. México: Tesis de Doctorado, CINVESTAV.

Cantoral, R. (2016). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático (Segunda ed.). México: Gedisa.

Euler, L. (1767). De motv rectilineo: trivm corporvm se mvtvo attrahentivm. *Euler Archive*, 144-151.

Euler, L. (1775). Considérations sur Probleme des Tois Corps. *Opera Omnia*, 194 -220.

García, A. (2007). Euler y la mecánica celeste. *Miscelánea Matemática, 45*, 67-86.

Hernández Zavaleta, J. E., & Cantoral, R. (2017). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1009-1017.

Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*, 130-141.

May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. *Nature*, 459-467.

Newton, I. (1687). Philophiae Naturalis Principia Mathematica. En P. N. *Mathematica, Bookman*, G. (edit).

Poincaré, H. (1898). Sur la stabilité du systéme solaire. *Scient*, 538-547.

LO QUE NOS DICEN LOS RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN EDUCATIVA SOBRE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN MÉXICO

Luis Cabrera-Chim, María Concepción Valdés-Parra, Olga Flores-Álvarez
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (México)
lcabrerac@inee.edu.mx, cvaldes@inee.edu.mx, oflores@inee.edu.mx

Resumen

Las investigaciones relativas al Pensamiento y Lenguaje Variacional han demostrado la importancia de éste en los procesos de construcción de conocimientos matemáticos. Sin embargo, también han demostrado la dificultad de los alumnos para enfrentar exitosamente situaciones variacionales. En este trabajo se analizan los resultados de las pruebas PLANEA, que se aplican en México, para indagar el grado de desarrollo del pensamiento variacional que demuestran los estudiantes mexicanos. Los resultados de estas evaluaciones y su análisis e interpretación a la par de la investigación educativa, puede transformarse en una importante base para tomar decisiones de política educativa y de práctica escolar, para mejorar el logro educativo.

Palabras clave: pensamiento variacional, evaluación, planea

Abstract

Researches on variational language and thinking have shown its significance in the construction of mathematical knowledge. However, students have shown difficulties to solve variation problems successfully. In this work, we analyze the results of PLANEA proofs, which are applied in Mexico, to investigate about the level of variation thinking development that Mexican students have. The outcomes of these proofs and their analysis and interpretation as well as the educational research can become an important basis to make decisions concerning the educational policy and the school practice in order to improve educational achievement.

Key words: Variational thinking, evaluation, planea

Introducción

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) tiene, por mandato constitucional, la tarea de evaluar la calidad, el desempeño y los resultados de la educación obligatoria del sistema educativo mexicano: la educación básica, que se compone de prescolar (3-5 años), primaria (6-11 años) y secundaria (12-14 años), y la educación media superior (15-17 años) (INEE, 2016).

Para dar respuesta al mandato legal referente a evaluar los resultados educativos, el INEE formuló el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes, mediante el cual evalúa, entre otros campos formativos

el de Matemáticas, a través de pruebas de opción múltiple (PLANEA). Éstas pruebas tienen como propósito conocer la medida en la cual los estudiantes logran dominar un conjunto de aprendizajes clave al término de cada nivel educativo y generar información pertinente y relevante que permita mejorar las prácticas de enseñanza, el aprendizaje de los estudiantes y tomar decisiones de política educativa (INEE, 2015).

Problemática y objetivo

El uso de los resultados de las pruebas estandarizadas puede ayudar a emprender procesos de mejora de la eficiencia de la educación. Esto siempre que no se pierda el foco de atención, el cual debe estar en realizar actividades educativas y de calidad con los estudiantes, por sobre el entrenamiento para obtener mejores puntuaciones en dichas pruebas (Fernández, Alcaraz y Sola, 2017). De este modo, se planteó como objetivo general de esta investigación, analizar los resultados de las pruebas PLANEA para generar información que pueda ayudar a las autoridades educativas y los profesores a tomar las acciones pertinentes para la mejora de los resultados educativos. En particular, no interesa comprender la situación de los estudiantes sobre el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Esto tomando en consideración los siguientes puntos:

- El pensamiento y lenguaje variacional es un elemento clave para la construcción de conocimientos asociados a la Matemática de la Variación (Maury, Palmezano y Cárcamo, 2012), en particular los relativos al Cálculo diferencial en el nivel medio superior.
- Su desarrollo requiere de un prolongado tiempo didáctico (Cantoral & Farfán, 2000). Por ejemplo, se requiere integrar diferentes campos numéricos y geométricos o romper con formas de pensamiento prevariacionales como el algebraico, entre otras acciones.
- Los estudiantes y profesores de diferentes niveles educativos presentan dificultades para enfrentar exitosamente situaciones variacionales (Montiel, 2008; Caballero, 2012; Maury, Palmezano y Cárcamo, 2012). Esta situación se vuelve de gran relevancia dada la importancia de estas situaciones desde el punto de vista didáctico para la construcción de los conocimientos matemáticos.

Por tanto, se estableció como objetivo particular el inferir el grado de desarrollo del pensamiento variacional que evidencian los estudiantes que cursan la educación obligatoria en México a partir de analizar su desempeño en las pruebas PLANEA. Con esto se busca establecer una base de información pertinente que permita tomar decisiones y acciones encaminadas a la mejora de la calidad de la educación y con miras a potenciar el aprendizaje de los estudiantes en el nivel medio superior.

Marco conceptual

El Pensamiento y Lenguaje Variacional, que es parte de la Teoría Socioepistemológica y que conforma el marco teórico del trabajo, pone su atención en el estudio y análisis del carácter variacional de los saberes matemáticos, por sobre el carácter simbólico y analítico con el que se tratan tradicionalmente en el discurso escolar (Cantoral y Farfán, 2000). El desarrollo de este pensamiento permite analizar, organizar y modelar matemáticamente problemas, situaciones o fenómenos que tienen como origen o parte sustancial a la variación.

Entendemos a la variación como el análisis cuantitativo o cualitativo del cambio de estado de uno o más fenómenos o situaciones. Así, por pensamiento variacional se entenderá el análisis de dichas variaciones con la finalidad de determinar sus características, sus comportamientos y/o las leyes que los rigen, con la finalidad de su comprensión y/o, en su caso, realizar estimaciones, anticipaciones o predicciones sobre tales fenómenos o situaciones (Cabrera, 2014). Así, es a partir de comprender qué cambia, cómo cambia, cuánto cambia, cómo cambia ese cambio y así sucesivamente, que podemos generar una comprensión profunda de las particularidades de dichos fenómenos o situaciones. Pero también permite reconstruir al fenómeno a partir de comprender sus variaciones. En cuanto al lenguaje variacional, se entenderá a aquellos medios que permiten comunicar el reconocimiento y/o el análisis del cambio y las variaciones de los fenómenos o situaciones de cambio en el sentido anterior (Cabrera 2014). Esto puede realizarse por medios gráficos o icónicos, analíticos, gestuales, numéricos, verbales, entre otros.

La puesta en funcionamiento del pensamiento variacional para enfrentar una situación o problema que demanda del estudio de la variación se pone en evidencia a través del desarrollo de estrategias variacionales, entre las que se pueden mencionar: la comparación, la seriación, la anticipación y la predicción (Caballero, 2012).

Metodología

Tomando en consideración que el pensamiento variacional no es un contenido curricular específico, se centró la atención en el desempeño que demuestran los estudiantes en los reactivos que evalúan contenidos relativos al análisis de relaciones funcionales. Para realizar esto, el primer paso consistió en la revisión de las tablas de contenidos de las Pruebas PLANEA 2015 de Matemáticas de primaria, secundaria y educación media superior. Cabe señalar que en 2015 no se aplicó la prueba de preescolar, mientras que en 2016 sólo se aplicó una versión diagnóstica de algunas de éstas y no se reportaron resultados. Posteriormente, se analizaron los reactivos asociados con dichos contenidos con la finalidad de determinar si para contestarlos se requería de la aplicación de alguna estrategia variacional. Como último paso se procedió a analizar el desempeño de los estudiantes para dichos reactivos. Esto a partir de los resultados reportados por el INEE (2017) y la SEP (2017).

Cabe mencionar que, al analizarse sólo los resultados de 2015 para las diferentes pruebas, no es posible hacer inferencias longitudinales o entre niveles educativos. Es posible generar hipótesis que expliquen ciertos hechos o fenómenos, pero deben tomarse con reservas. Estas sólo podrán verificarse con estudios más profundos y de largo plazo.

Análisis de datos

El análisis de las tablas de contenidos de las pruebas (Tabla 1) arrojó que en todas se evalúan contenidos relativos al análisis de las relaciones entre variables. El porcentaje de estos contenidos va en aumento a medida que se progresa en el nivel educativo (columna 3). No obstante, el porcentaje de los contenidos cuyos reactivos requieren la aplicación de estrategias variacionales para ser contestados, es similar en las tres pruebas (columna 4).

Prueba	Contenidos que tratan sobre la relación entre variables	% contenidos: relaciones entre variables	% contenidos: estrategias variacionales
Primaria Sexto año	Sucesiones aritméticas, geométricas y especiales; razones de cambio de cantidades continuas y discretas; problemas de valor faltante de proporcionalidad directa.	10.8%	10.8%
Secundaria Tercer año	Sucesiones; proporcionalidad directa, inversa y mixta; analizar, modelar e interpretar fenómenos o situaciones que presentan variación lineal o cuadráticas*; variación de parámetros de funciones lineales. *Provienen de funciones polinomiales de segundo grado.	22%	13%
Media Superior Tercer año	Sucesiones; proporcionalidad directa e inversa; modelar e interpretar problemas o fenómenos empleando funciones lineales y cuadráticas: expresiones algebraicas, tablas y gráficas; resolución de problemas empleando funciones lineales; análisis de diferentes representaciones de funciones.	31.6%	11.6%

Tabla 1: Contenidos objeto de análisis en el estudio. Elaboración propia.

Al analizar los reactivos de los contenidos indicados en la tabla 1 e indagar cuáles implicaban el empleo de estrategias variacionales para ser respondidos, se pudieron determinar las relaciones establecidas en la Tabla 2.

Estrategia variacional	Contenido general
Comparación	• Comparar razones • Comparar gráficas de funciones lineales
Seriación	• Describir la regla general de una sucesión. • Determina la tabla o gráfica que presenta una relación de proporcionalidad directa o inversa, variación lineal o cuadrática. • Poner en correspondencia diferentes registros de variación lineal.
Estimación	• Determinar la gráfica formada por segmentos de recta y/o curvas que representa a un fenómeno. • Analizar dos funciones (lineal y cuadrática) presentadas en diferentes registros para estimar intervalos donde se presentan resultados comunes.
Predicción	• Calcular sucesiones o términos de tablas de variación lineal (proporcional o no). • Determinar la expresión algebraica (lineal o cuadrática) que representa una situación, tabla o gráfica. • Analizar dos funciones lineales presentadas en diferentes registros para determinar qué sucede en un momento en común.

Tabla 2: Relación entre las estrategias variacionales y algunos de los contenidos evaluados en las pruebas PLANEA de 2015. Elaboración propia.

Antes de discutir el desempeño que tuvieron los estudiantes en los reactivos asociados con los contenidos de la Tabla 2, cabe mencionar que los resultados de las pruebas PLANEA se presentan a partir de describir los conocimientos y habilidades generales que alcanzan los alumnos de acuerdo con cuatro niveles de logro: insuficiente (I), indispensable (II), satisfactorio (III) y sobresaliente (IV). Los alumnos de un determinado nivel pueden realizar lo descrito en el correspondiente y en los anteriores. El porcentaje de estudiantes en cada nivel para cada nivel educativo puede verse en la Figura 1. Un dato que llama la atención es el porcentaje de alumnos que se encuentra en el nivel I: 60.5% para primaria, 65.4% para secundaria y 51.3% para media superior (INEE, 2017; SEP, 2017).

Alejandro compró 8 chocolates por 24 pesos. Juan, Jaime, Hugo y Ricardo compraron de los mismos chocolates en otras tiendas. ¿Quién de ellos compró los chocolates más baratos que Alejandro?

A) Hugo compró 8 chocolates por 30 pesos.
B) Juan compró 16 chocolates por 44 pesos.
C) Ricardo compró 10 chocolates por 48 pesos.
D) Jaime compró 24 chocolates por 72 pesos.

(b)

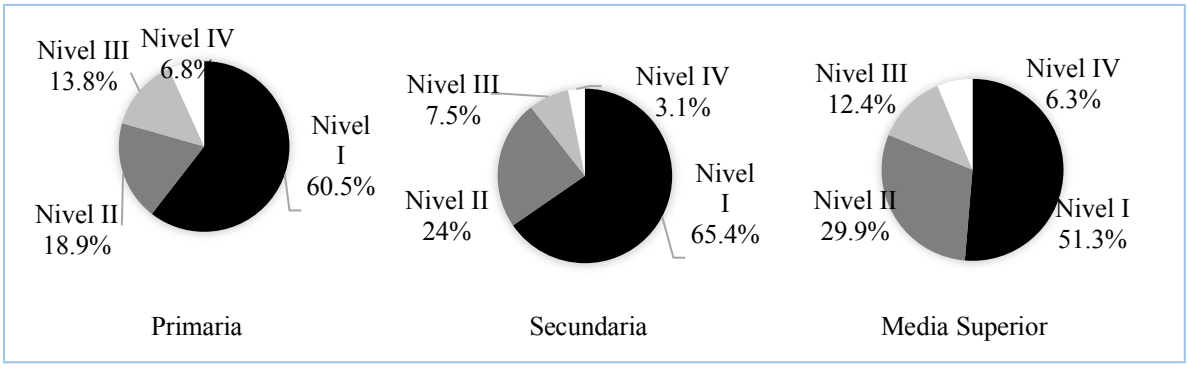


Figura 1: Porcentajes de los estudiantes en cada nivel de logro para primaria, secundaria y media superior. Fuentes: INEE (2017) y SEP (2017).

Al determinar el nivel de logro en el que se ubican los contenidos que tratan con la relación entre variables y que exigen el empleo de estrategias variacionales, se tiene lo siguiente:

- En primaria, los alumnos del nivel II (18.9%) son capaces de reconocer la regla de una progresión aritmética o calcular su término siguiente, así como responder problemas de valor faltante con razones enteras. Pero solo hasta los niveles III (13.85) y IV (6.8%), pueden responder problemas de razones y de valor faltante con razones fraccionarias.

La siguiente tabla muestra el tiempo en que una fábrica tarda en llenar las botellas de jugo.

Cantidades de botellas	Tiempo (segundos)
4	108
7	189
9	

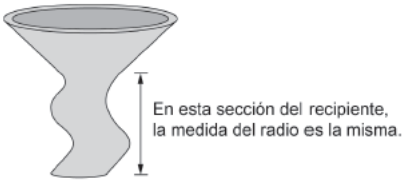
¿Cuántos segundos tardará la máquina en llenar 9 botellas de jugo?

A) 147 C) 243
B) 198 D) 270

(a)

Figura 2: Ejemplos de reactivos de los niveles de logro III (a) y IV (b) de la prueba PLANEA 2015 de Matemáticas de Primaria (SEP, 2017).

El siguiente dibujo representa un recipiente en el que se vierte agua, de manera constante.



¿Cuál de las siguientes gráficas representa la altura que va alcanzando el agua dentro del recipiente, con el transcurrir del tiempo?

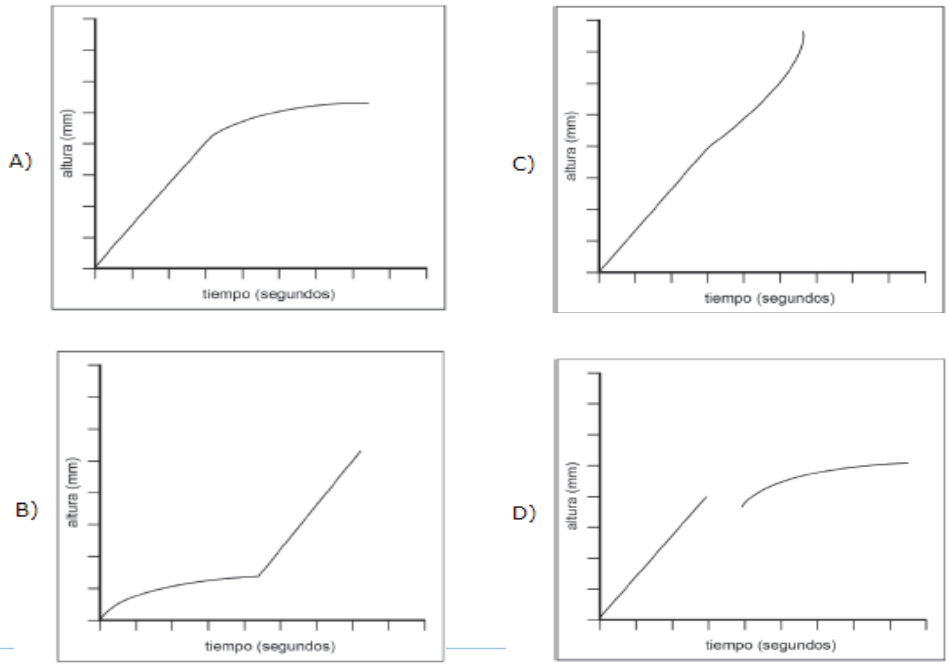


Figura 3: Ejemplo de reactivo del nivel de logro IV de la prueba PLANEA 2015 de Matemáticas de Secundaria (SEP, 2017).

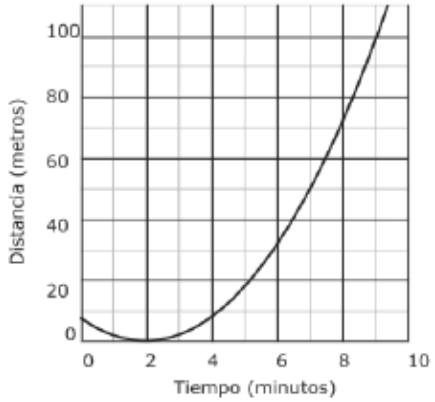
- Para secundaria, los alumnos del nivel II (24%) son capaces de responder problemas que involucran gráficas y tablas de proporcionalidad. No obstante, solo hasta los niveles III (7.5%) y IV (3.1%) puede responder problemas que involucran analizar la variación de un fenómeno y determinar si es o no lineal, así como problemas con sucesiones que requieren plantear algebraicamente sus expresiones generales.
- Por último, para medio superior, los alumnos del nivel II (29.9%) son capaces de describir el comportamiento de sucesiones numéricas, pero solo hasta los niveles III (12.4%) y IV (6.4%) pueden analizar las relaciones entre dos o más variables e interpretar, inferir, abstraer y poner en correspondencia información de gráficas, tablas y sucesiones, para resolver problemas contextualizados.

Jaime sale de la escuela en bicicleta hacia la escuela al mismo tiempo que Pedro, su vecino, sale en automóvil de su casa hacia la misma escuela; sin embargo, este último pasa primeramente por una amiga que vive colina abajo.

El desplazamiento de Jaime se muestra en la siguiente tabla:

Jaime	
Minutos	Metros
0	11
3	32
6	53
9	74

Mientras que el gráfico que muestra el desplazamiento de Pedro es el siguiente:



Encuentre el intervalo de tiempo en el cual los dos amigos coincidirán en el camino.

A) 2 a 3
B) 5 a 6
C) 7 a 8
D) 9 a 10

Figura 4: Ejemplo de reactivo del nivel de logro IV de la prueba PLANEA 2015 de Matemáticas de Educación Media Superior (SEP, 2017).

Conclusiones

En todos los niveles educativos se evalúan contenidos relacionados con el estudio de la variación que requieren poner en juego estrategias variacionales. No obstante, se puede observar que en primaria todos los contenidos se evalúan a partir de la aplicación de estrategias variacionales, mientras que en el nivel medio superior estas dan paso a procesos o procedimientos más algebraicos, los cuáles se relacionan con la parte institucional de los contenidos y la cual está asociada al Discurso Matemático Escolar. Esto no significa que en principio esta exigencia sea incorrecta. Sin embargo, sería importante analizar cómo se enseñan dichos proceso o procedimientos y si esto potencia su comprensión, toda vez que más del 50% de los estudiantes posee conocimientos considerados insuficientes para el nivel educativo correspondiente.

De acuerdo con el análisis, los contenidos cuyos reactivos requieren la aplicación de estrategias variacional se ubican a partir del nivel de logro II (este nivel se considera el mínimo deseable de los estudiantes). Es decir, en promedio 4 de cada 10 alumnos de los diferentes niveles educativos demuestra habilidades para aplicar dichas estrategias. Pero, en promedio, solo 2 de esos 4 alumnos demuestran conocimientos y habilidades satisfactorios en esas mismas habilidades (niveles de logro III y IV). Además, las estrategias variacionales de estimación y predicción se ubican en niveles de logro superiores dentro cada nivel educativo. Esto acentúa aún más la importancia de que los estudiantes desarrollen un pensamiento variacional y que esto se promueva desde los niveles iniciales.
Si no se suscitan cambios importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje actuales, bajo la situación del logro educativo reportada para 2015, se vislumbra complejo que los estudiantes de educación

media superior de los próximos años, egresen de la educación obligatoria con los conocimientos y habilidades necesarios para hacer frente a sus desafíos futuros. Así como proveerles una educación de calidad y acorde con el perfil de egreso propuesto por la Secretaría de Educación Pública de México.

Referencias bibliográficas

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato.* (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Cabrera, L. (2014). *El estudio de la variación en la práctica del profesor de Cálculo. Un estudio de caso.* (Tesis de doctorado inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Cantoral, R y Farfán, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R.M. Farfán, F. Cordero, J.A. Alanís, R.A. Rodríguez y A. Garza (Eds.) *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, DF: Trillas.

Fernández, M., Alcaraz, N. y Sola, M. (2017). Evaluación y Pruebas Estandarizadas: Una reflexión sobre el Sentido, Utilidad y Efectos de estas Pruebas en el Campo Educativo. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 10*(1), 51-67.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2015). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA). Documento rector.* México: Autor.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2016). *Panorama Educativo de México 2015. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Educación Básica y Media Superior.* México: Autor.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2017). *Informe de resultados Planea 2015. El aprendizaje de los alumnos de sexto de primaria y tercero de secundaria en México. Lenguaje y Comunicación y Matemáticas.* México: Autor.

Maury, E.; Palmezano, G., y Cárcamo, S. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios, 10* (1), 7-16.

Montiel, G. (2008). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la Socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. En Cantoral, R.; Covián, O.; Farfán, R.; Lezama, J., & Romo, A. (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte Iberoamericano* (pp. 439-459). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017, marzo 2). *PLANEA. Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes*. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/

PRÁCTICAS PREDICTIVAS EN MEDICINA. UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LA VARIACIÓN

Angélica Moreno-Durazo, Ricardo Cantoral
Cinvestav. (México)
gamoreno@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen

La noción matemática de variación es un objeto de estudio en Socioepistemología, mediante la noción más compleja de variación sucesiva. Estas investigaciones se interesan en el análisis de las explicaciones de los individuos ante fenómenos dinámicos, mediante la organización de prácticas; dichas explicaciones requieren como elemento fundamental de parte de los individuos, a la construcción de estados intermedios del fenómeno. El objetivo principal de este reporte versa sobre cómo la construcción de los *estados intermedios* (a través del uso de la variación sucesiva) conduce a una *secuenciación* que otorga un carácter evolutivo al fenómeno de estudio, lo cual, sostenemos, son los dos elementos que caracterizan la presencia del pensamiento y lenguaje variacional. El análisis se realiza desde un escenario no determinista, el de la evolución de enfermedades cardíacas a través de las prácticas que un cardiólogo realiza en el diagnóstico médico al interpretar electrocardiogramas.

Palabras clave: variación sucesiva, diagnóstico médico, socioepistemología

Abstract

The mathematical notion of variation is an object of study in Socio-epistemology, through the most complex notion of successive variation. These researches are interested in the analysis of individuals' explanations to dynamic phenomena, through the organization of practices; such explanations require, as a fundamental element on the part of individuals, the construction of intermediate states of the phenomenon. The main objective of this report is how the construction of intermediate states (through the use of successive variation) leads to a sequencing that gives an evolutionary character to the phenomenon in study, which we maintain, are the two elements that characterize the presence of variational thinking and language. The analysis is carried out from a non-deterministic scenario, that of the evolution of heart diseases through the practices that a cardiologist performs in the medical diagnosis when interpreting electrocardiograms.

Key words: successive variation, medical diagnostic, socioepistemology

Introducción

Nuestra investigación se interesa por el uso contextual del conocimiento matemático, por ello, se precisa de la identificación y la organización de las *prácticas que acompañan a los objetos matemáticos* formales. En particular, cuestionamos el uso del conocimiento matemático en la explicación de fenómenos de

cambio, es decir, cómo emerge la noción de variación frente a la necesidad humana de predecir estados futuros.

Elegimos la Cardiología como escenario de investigación, dado que tiene la característica de ser no determinista. Esto es, la predicción no es alcanzada en la práctica médica, por ejemplo, no es posible determinar la hora y la intensidad de un infarto; sin embargo, con el estudio articulado de las variables y sus variaciones existen otras prácticas predictivas en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardíacas, que son nuestro objeto de estudio. Nos preguntamos pues, ¿cuáles son las *prácticas* involucradas en la construcción de *argumentos* que utilizan los cardiólogos para describir y analizar el cambio?, ¿cuáles son los usos situados de la noción de variación en el diagnóstico?

Elementos teóricos

Una de las principales aportaciones del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), desde sus primeras investigaciones con enfoque socioepistemológico, fue el descubrir que la constitución de los objetos formales, de las matemáticas del cambio, requiere de una *coordinación de las derivadas sucesivas* a través de las variaciones sucesivas (Cantoral 1990; Cantoral y Farfán, 1998). Como ejemplo, consideremos al enfoque de J. Lagrange como una base de significación para la derivada de una función, entendida como el coeficiente lineal en el desarrollo de series de potencias. De manera general, la expresión $f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \cdots$, se concibe como una entidad que alude de manera funcional a las nociones de variable, variación y predicción en forma coordinada, son simultáneas y se apoyan unas en otras.

Por otro lado, en el *discurso Matemático Escolar* se aborda a la derivada desde el enfoque propuesto por Cauchy, como el límite de un cociente incremental $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, relacionada primordialmente con la propiedad tangencial a una curva y los procedimientos que devienen de las derivadas sucesivas $\left((f')' \ldots\right)'$, esto último refiere a un conocimiento de la derivada similar a un análisis recursivo en tanto que, para conocer a la derivada de orden *n*+1 se requiere de la expresión de la *n-ésima* derivada y, por tanto, no está articulado en más que un orden. Este tratamiento habitual sobre la derivada se ha relacionado con dificultades en su significación (Nemirovsky y Rubin, 1992; Carlson et al, 2002; Dolores, 2004; Sánchez, García y Llinares, 2008; Jonhson, 2015).

Tal como es tratado por Cantoral (2013), partiendo de la evidencia empírica aportada por las investigaciones del PyLV, estos dos posicionamientos no son dos maneras de expresar lo mismo, sino que ambas poseen diferentes dimensiones (epistemológica, didáctica, cognitiva y social). Esta mirada sobre las derivadas sucesivas resulta importante pues en ella se articulan la noción estratégica de *predicción* con la noción matemática de *variación local* (que demanda la consideración de aquello que varía, la noción de *variable*). Esto es, la búsqueda del estado futuro $f(x+h)$ y su determinación, sólo bajo el conocimiento de los estados de facto *x*, *h*, $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$; donde la consideración de órdenes de variación superiores brinda información cada vez más específica de comportamiento del fenómeno.

De manera que, el surgimiento y el desarrollo del PyLV refiere a los cuestionamientos sobre las formas en las que los individuos coordinan las derivadas sucesivas, o bien, ante el desconocimiento de la expresión algebraica que modele el fenómeno, las preguntas tratan de cómo los individuos usan los

órdenes de variación (figura 1); ambas durante el desarrollo de sus prácticas predictivas. Es decir, las motivaciones e intereses de las investigaciones son relativos a la *transversalidad* y la *funcionalidad* de la noción de variación sucesiva, a través del estudio y organización de las prácticas que acompañan su constitución, en las diversas áreas de la sabiduría humana (saber técnico, saber popular, saber científico).

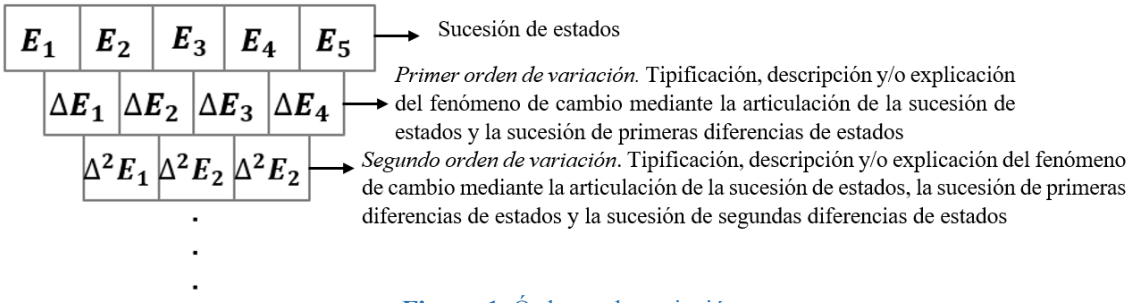


Figura 1. Órdenes de variación

Nuestra investigación se interesa por la determinación y la organización de las prácticas desarrolladas en el contexto médico durante la interpretación de electrocardiogramas en el diagnóstico de enfermedades cardíacas, un escenario plenamente no determinista donde el diagnóstico (entendiéndolo como práctica predictiva) no depende de la articulación de derivadas sucesivas sino de la articulación de órdenes de variación, pero sí sucesivos. Entonces, ante la imposibilidad de predecir estados futuros ¿cuáles son las prácticas que sustentan el diagnóstico y permitan el tránsito entre los estados de salud – enfermedad de un paciente?, ¿cuáles son los argumentos que brindan los especialistas ante situaciones de cambio?, ¿cuál es la naturaleza epistemológica del saber matemático detrás de estas prácticas y del lenguaje especializado?

El objetivo de este reporte de investigación es mostrar evidencia de la presencia del *pensamiento y lenguaje variacional*, como forma particular del *pensamiento matemático* que trata con el estudio del cambio con fines predictivos a través del uso de la noción de variación sucesiva. Cantoral y Farfán (1998) sostienen que el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional es favorecido por actividades que consideren el manejo amplio de formas gráficas y potencien la constitución de la noción de predicción. Lo que ponemos a discusión ahora es la participación de este pensamiento como guía en las prácticas médicas, para ello, abordaremos un episodio de un estudio de corte etnográfico dentro del servicio de cardiología, analizándolo bajo el siguiente esquema:

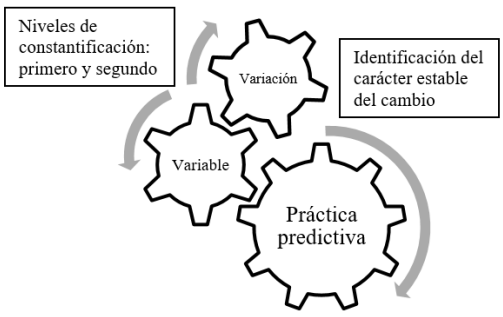


Figura 2. Modelo sobre la construcción de conocimiento matemático relativo a fenómenos de cambio

La unidad mínima de análisis para el estudio de fenómenos dinámicos con fines *predictivos* requiere de la vinculación de las nociones de *variable* y *variación* (Figura 2). Cantoral (1990) exhibe cómo la vinculación – variable, variación y predicción – se desarrolla mediante los *niveles de constantificación*, el primero radica en la selección de las variables intervinientes en el fenómeno que lo describan de buena manera y el segundo refiere a la selección de las variaciones suficientes para llevar a cabo predicciones; entonces, es el proceso de *constantificar* lo que articula las nociones de variable y variación. Este proceso sustenta la *identificación del carácter estable del cambio*, ligado a la búsqueda de las leyes que rigen el cambio identificando lo invariante en él, lo cual conduce al establecimiento de predicciones en el fenómeno (Cantoral, 2013).

Ejemplo del uso de la variación en el diagnóstico médico

Una de las herramientas utilizadas por los cardiólogos durante el diagnóstico de enfermedades en sus pacientes es la interpretación del electrocardiograma (ECG), situación que tomamos como objeto de estudio para llevar a cabo una problematización del saber relativo a la noción de variación sucesiva en las prácticas de *interpretación*, *diagnóstico* y *tratamiento* en cardiología. Analizamos cómo los cardiólogos usan esta noción durante la identificación del comportamiento en el funcionamiento cardíaco del paciente y/o en la búsqueda del rompimiento de la evolución o degeneración de la enfermedad.
Con base en esta problematización, y una metodología de análisis documental, identificamos algunas prácticas socialmente compartidas usadas en la interpretación de electrocardiogramas, tales como *comparar*, *seriar* y *estimar* (Moreno – Durazo y Cantoral, 2016); prácticas analizadas también en el PyLV en otras prácticas de referencia. Además, caracterizamos el uso *del segundo orden de variación* en la identificación de enfermedades cardíacas, por ejemplo, en el diagnóstico de bloqueos en la conducción eléctrica: el bloqueo aurículo ventricular (BAV) grado II Mobitz I (Moreno – Durazo y Cantoral, 2017).

Retomamos esto durante un estudio de corte etnográfico que realizamos en el servicio de cardiología del Hospital Universitario “Manuel Ascunce Domenech” en Camagüey, Cuba durante dos meses. Ahora, nos interesa enfatizar que la variación sucesiva, presente en la interpretación de electrocardiogramas, también es parte fundamental en la secuenciación de estados que hace el cardiólogo; esto, durante la explicación de la evolución de su paciente o los estados por los que ha transitado. En el episodio analizamos el problema: dado un conjunto de electrocardiogramas ¿cómo el cardiólogo informa de una evolución?, ¿cuáles son los argumentos que sustentan su explicación?, particularmente, ¿cuál es el estado de salud del paciente cuyos electrocardiogramas son los exhibidos en la figura 3.

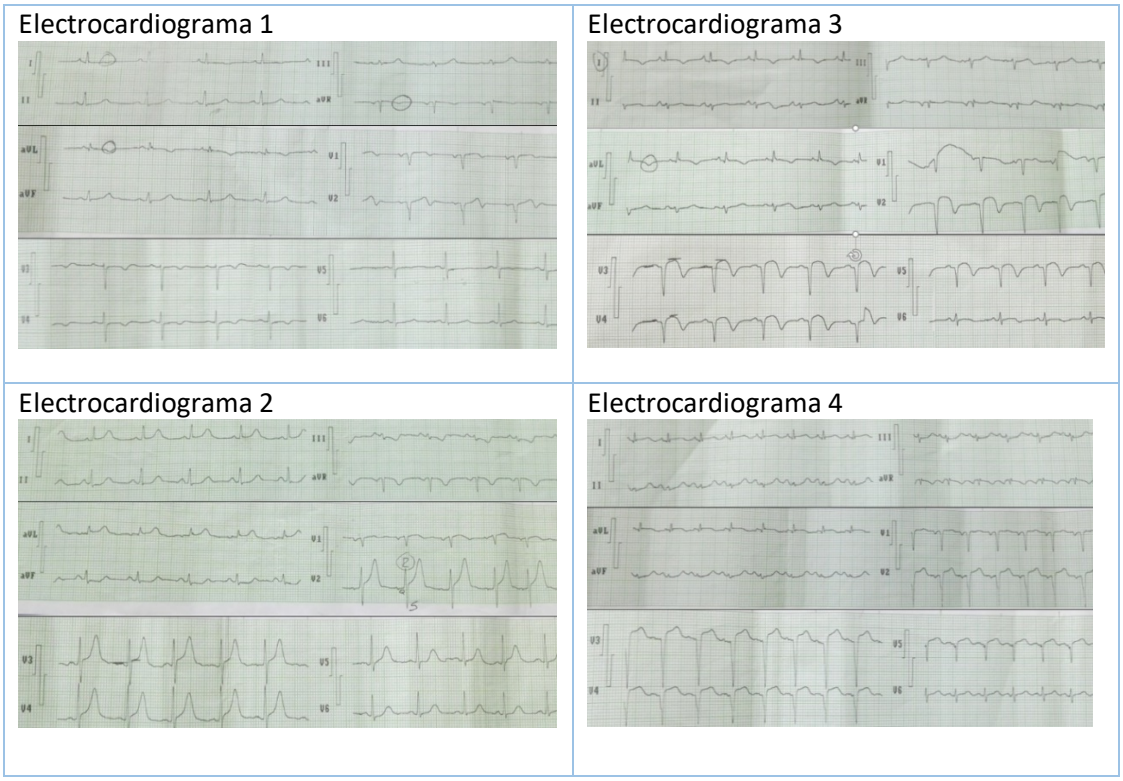
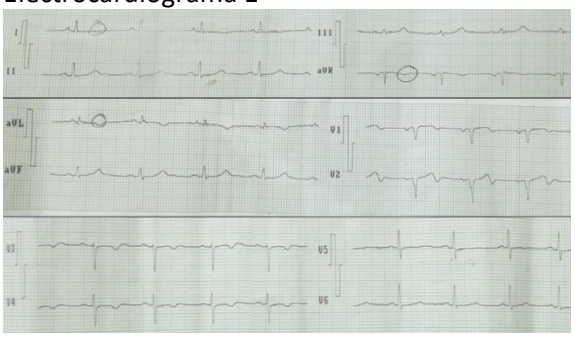


Figura 3. ¿Cuál es el estado de salud del paciente con estos electrocardiogramas?

En la tabla 1 mostramos las características electrográficas que le son relevantes al cardiólogo para proporcionar un diagnóstico sobre su paciente.

Electrocardiograma	Características principales de cada ECG (extractos de la entrevista)
Electrocardiograma 1 	{1} Aquí y aquí hay unas ondas T que se negativizan [marcas sobre DI y aVL]. Lo normal es que estén positivas {2} DI y aVL son medidores de una cara específica del corazón, que es la cara lateral {3} No hay onda R en V1. No hay onda R en V2. Esto me hace pensar que este paciente ha tenido una necrosis de la cara septal {4} si seguimos, vemos que la onda R aquí es muy pequeñita [refiriéndose a V3, figura 1], o sea que, progresó muy poco {5} Este paciente ha sufrido un infarto, o sea, hay una necrosis de la cara anteroseptal del corazón

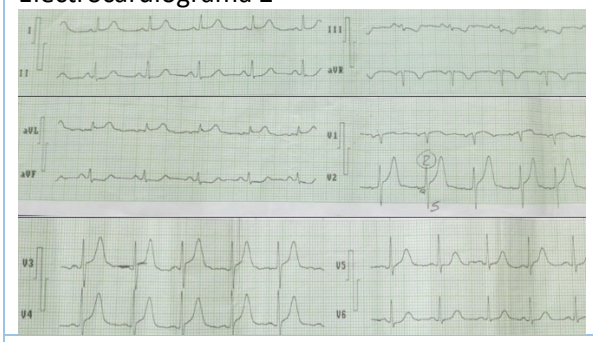
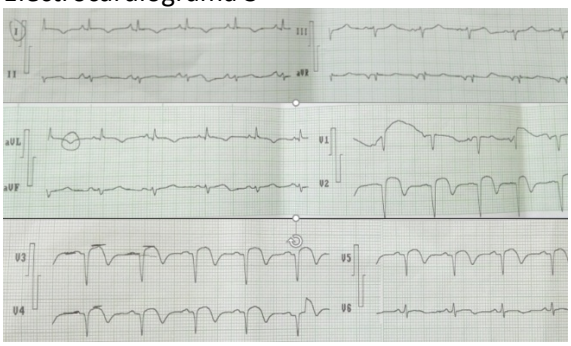
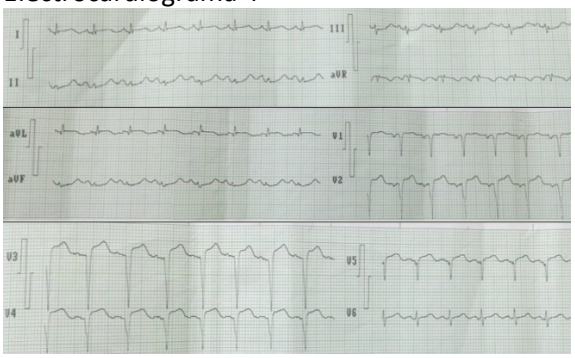
Electrocardiograma 2 	{6} Este electro [Electrocardiograma 2] no tiene nada que ver con este electro [Electrocardiograma 1], por tanto, o no es del mismo paciente o este electro es primero [Electrocardiograma 2] {7} Sí se ve una onda R apropiada, una onda R grande [marcada en V2] {8} Quizás este paciente tuvo un infarto a partir de este electro, siendo este un electro normal
Electrocardiograma 3 	{9} Este electro se parece a este electro [comparando electrocardiogramas 1 y 3]. O sea, pudiera ser que este sea el primero [Electrocardiograma 2], este fuera el segundo [Electrocardiograma 1]; tenemos un electro normal, ya un electro patológico y este viene a continuación [Electrocardiograma 3] {10} Seguimos viendo que DI tiene una T negativa, aVL tiene una T negativa y V5-V6, la T de V5 se ha profundizado, eso quiere decir que la isquemia se ha incrementado
Electrocardiograma 4 	{11} Este electro debe pertenecer a los primeros momentos después del infarto [Electrocardiograma 4]. {12} Aquí obviamente el paciente no está infartado [Electrocardiograma 2], pero aquí sí se infarto [Electrocardiograma 1]. {13} Fíjate en este hay taquicardia [Electrocardiograma 4] ¿no vez que la distancia de R a R es más rápida? {14} El corazón estaba muy rápido porque estaba sufriendo variaciones importantes en él

Tabla 1. Interpretación de electrocardiogramas

Nos interesamos por el uso de la variación de segundo orden en la interpretación de los ECG, donde intervienen tanto los niveles de constantificación como la identificación del carácter estable del cambio, además, mostramos escenarios de confrontación – solución; es precisamente a través de ambos que el cardiólogo realiza el diagnóstico y explica la evolución de su paciente mediante la secuenciación de estados por lo que transitó.

En la interpretación de los ECG observamos que el cardiólogo analiza la morfología de las ondas que componen al electrocardiograma (onda P, complejo QRS, onda T. Figura 4), fundamental para ello es la práctica de comparar. Argumentos del tipo la *T se ha profundizado* (tabla 1, {10}) o *la distancia de R a R es más rápida* (tabla 1, {11}) aluden al hecho de comparar las magnitudes de voltaje en estas ondas donde

observa crecimiento, pero más aún, argumentos como *la onda R aquí es muy pequeñita, progresó muy poco* (tabla 1, {4}) alude a un segundo orden de variación, pues no es suficiente identificar el crecimiento sino que tipifica el crecimiento como "muy poco" y, es con base en ello que el cardiólogo amplía la zona de daño en el corazón (pasando de la cara septal a la anteroseptal).

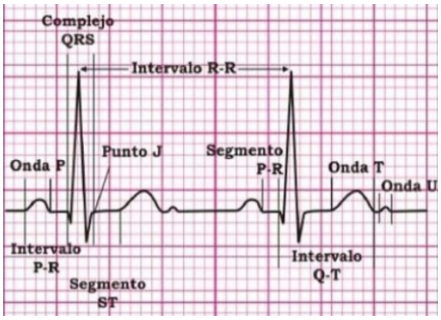


Figura 4. Ciclo cardiaco (dos latidos)

Además, son argumentos relativos a la noción de variación los que permiten al cardiólogo explicar la confrontación que surge a partir de la presencia, en su paciente, de dos ECG antagónicos: uno normal y uno patológico, *este electro no tiene nada que ver con este electro, por tanto, no es del mismo paciente o este electro es primero* (tabla 1, {6}). Es precisamente, a través de comparaciones de los estados entre diferentes electrocardiogramas que plantea una *secuenciación o evolución del infarto*, *este electro se parece a este electro. O sea, pudiera ser que este sea el primero, este fuera el segundo; tenemos un electro normal, ya un electro patológico y este viene a continuación* (tabla 1, {9}).

Reflexiones finales

El sentido en que referimos a la variación sucesiva no radica en los objetos matemáticos como diferencial o diferencia, sino, como una noción articuladora fundamental para el desarrollo de prácticas predictivas, en tanto que resulta fundamental para el conocimiento de *cómo cambia* y *cuánto cambia* el fenómeno de estudio. De manera que, la naturaleza de la variación sucesiva es relativa al contexto en el que se construye y reconstruye, bajo lenguaje especializado; lo cual es sustentado teóricamente desde los cuatro principios de la Teoría Socioepistemológica: *racionalidad contextualizada*, *relativismo epistemológico*, *resignificación progresiva* y *normatividad de la práctica social*.

Con el estudio de fenómenos de naturaleza no determinista se amplían los acercamientos al pensamiento y lenguaje variacional, como forma de particular de pensamiento matemático. Hasta el momento, era considerando a través del manejo de formas gráficas mediante su articulación con la noción de predicción y, con base en el análisis del episodio nos permitimos puntualizar a la *secuenciación de estados*, entendiéndola en un sentido explicativo sobre la evolución de un fenómeno dinámico bajo argumentos variacionales, como una característica de la presencia del pensamiento y lenguaje variacional. Con esto, se atendería no solo la identificación de aquello que cambia, cómo y cuánto lo hace, sino, se agregaría *por qué cambia de esa manera*; lo que da un sentido explicativo sobre el fenómeno y da apertura a la manipulación sobre él.

Estos resultados tienen una importante implicación didáctica sobre las consideraciones de actividades que introduzcan la necesidad de identificar, construir y/o secuenciar estados del fenómeno. Por ejemplo, si el cambio entre dos estados vecinos E_1 y E_2 se mide con una diferencia fundamental $E_2 - E_1$, la naturaleza del cambio no puede ser identificada con ese método, pues la sola diferencia no alcanza a develar la forma en la que se pasa del estado primero al segundo, qué tan rápido lo hace, qué tan homogéneamente ocurre; para ello se ocupa de la construcción de un estado intermedio – variable – que denominamos E_i que al moverlo entre E_1 y E_2, muestra la forma, los detalles y matices del modo en que cambia E.

En esta investigación mostramos que la secuenciación de estados intermedios, no empíricos sino abductivos, son la base del pensamiento variacional. Esta hipótesis habrá de ser corroborada bajo el análisis de otros esquemas teóricos que no serán reportados en este escrito. Con esto se continua en la línea de investigación sobre los elementos que caracterizan al pensamiento variacional en situaciones determinísticas, estocásticas y caóticas – determinísticas.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría Elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y predación entre las nociones de "el Prædiciere" y "lo Analítico"*. Tesis Doctoral. México: Cinvestav.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* 42, 353 – 369.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352 – 378.

Johnson, H. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics* 88, 89 – 110.

Moreno–Durazo, G. & Cantoral, R. (2016). Pensamiento y lenguaje variacional en la práctica médica. El caso de la "lectura" del electrocardiograma. En F. Rodríguez, R. Rodríguez y L. Sosa (Eds.). *Investigación e Innovación en Matemática Educativa* 1(1), 238 – 245. Oaxaca: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Moreno–Durazo, A. & Cantoral, R. (2017). El uso de los órdenes superior de variación en la interpretación clínica del electrocardiograma. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 927 – 935. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Niemirovsky, R. y Rubin, A. (1992). Students´ tendency to assume resemblances between a function and its derivative. TERC communications, Cambridge.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11 (2), 267 – 296.

IMPACTO DEL CAPITAL CULTURAL EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN MATEMÁTICA: UN ESTUDIO AL TÉRMINO DE LA ENSEÑANZA MEDIA

Margarita Cortés
Universidad Central de Chile. (Chile)
m.cortes.toledo@gmail.com

Resumen

La educación matemática en Chile presenta grandes desafíos, uno de ellos guarda relación con la interpretación del éxito o fracaso escolar en esta materia, atribuibles a diversos factores como el contexto social, el capital económico y cultural, dificultades en el aprendizaje, entre otros. Este estudio está enfocado a detectar si existe algún grado de influencia del capital cultural de un estudiante en su rendimiento escolar en matemática durante la enseñanza media. Se consideró el capital cultural según lo establece Pierre Bourdieu y su nivel se especificó en una escala porcentual. Se experimentó en un establecimiento educacional de la región metropolitana.

Palabras Clave: capital cultural, rendimiento académico en matemática, correlación lineal, relación de causalidad

Abstract

Math teaching in Chile presents great challenges; one of them is related to the interpretation of success or failure in the school, which can be caused by a variety of factors such as social context, economic and cultural resources, and difficulties in the learning process, among others. This study focuses on detecting any level of influence of the cultural resources of a student on his math school performance at secondary education. The concept of "cultural resource" was considered according to the meaning provided by Pierre Bourdieu and the level of influence was specified in a percentage scale. The experiment was carried out in an educational institution of the metropolitan region.

Key Words: cultural resource, academic performance, linear correlation, causal relationship

Indagación bibliográfica

La educación matemática en Chile enfrenta grandes desafíos, dado que existen brechas significativas en los resultados que se esperan de los estudiantes provenientes de diferentes contextos sociales, tal como lo describe Aguirre, Castro y Adasme cuando hacen mención a la prueba estandarizada SIMCE: "En Chile, los peores resultados en las pruebas SIMCE lo registran los estudiantes de estrato social bajo. Es así como el grupo socioeconómico marca una diferencia considerable en los niveles de logro de los estudiantes." (Aguirre M., Castro M., Adasme A., 2009, p. 2)

Los factores considerados para explicar las causas que producen el éxito o fracaso escolar de un estudiante en su etapa académica son diversos e imprecisos de cuantificar, debido a la naturaleza de los conceptos. De la misma forma, se pueden observar escazas investigaciones que reporten alguna relación entre el Rendimiento Académico y factores tales como los psicológicos, sociales, emocionales, culturales, entre otros.

Esta realidad educativa presente en la actualidad es compleja, no obstante, un concepto latente que parece ser fundamental a la hora de hablar de aprendizaje es el capital cultural, noción que se relaciona significativamente con el contexto social del estudiante y podría explicar en algún grado la presencia de dicho fenómeno en las aulas de clases. Por lo tanto, la siguiente investigación propone establecer una posible relación lineal entre los conceptos Capital Cultural y Rendimiento Académico en matemática, además de observar la influencia del género en dicha relación, abordados como variables cuantitativas obtenidas mediante un instrumento de recopilación de datos.

Como se contemplan dichos conceptos abstractos y genéricos es preciso aclarar cada uno de ellos y, de esta forma, comprender la dirección y sentido del escrito. Por esta razón se expondrán distintas visiones e interpretaciones de autores especialistas en cada uno de sus aspectos tratados en el documento.

Para esta investigación el concepto de Rendimiento Académico es fundamental, ya que hace referencia a un proceso de aprendizaje en un tiempo determinado, con una valoración cuantitativa que expresa el conocimiento adquirido para cada estudiante, siguiendo esta la línea, Tonconi (2010) define el Rendimiento Académico como:

El nivel demostrado de conocimientos en un área o materia, evidenciado a través de indicadores cuantitativos, usualmente expresados mediante calificación ponderada en el sistema vigesimal y, bajo el supuesto que es un "grupo social calificado" el que fija los rangos de aprobación, para áreas de conocimiento determinadas, para contenidos específicos o para asignaturas. (Tonconi, 2010, p. 12)

No obstante, en este proceso de aprendizaje, la participación de variables externas al sujeto es determinante en el logro óptimo de estándares propuestos para la formación escolar del estudiante. Dentro de esta línea, Montes (2011) plantea la importancia de los factores externos al estudiante, tales como el contexto socioeconómico y cultural, es decir, que no sólo es de importancia los factores individuales del estudiante, durante su proceso de enseñanza- aprendizaje, como lo plantea Chadwick, sino que también influye el contexto en su Rendimiento Académico:

Para entender el problema del rendimiento académico de manera científica se debe encontrar la relación de correspondencia existente entre el trabajo realizado por los profesores y estudiantes y la educación, es decir, la perfección intelectual y moral lograda por éstos, dado un contexto socioeconómico y cultural en el que se desenvuelven. (Montes, 2011, p. 14)

También, es indispensable profundizar, en su naturaleza, el concepto de capital cultural dado que su percepción es compleja y difícil de precisar. Además de ser una de las ideas centrales de la investigación, es preciso considerarla como parte esencial de una posible relación entre Rendimiento Académico con capital cultural, como es 18 mencionado anteriormente por Montecino (1994), esta investigación considera como base el concepto de capital cultural elaborado por Bourdieu, dado que la obra de Pierre Bourdieu se destaca como una de las más imaginativas y originales de la post-guerra, hasta el punto de que el autor comienza a ser considerado ya en vida como un clásico de las ciencias sociales, además,

Bourdieu publicó grandes trabajos en el área de la sociología, tales como "La reproducción", "Sentido social del gusto" y "Sociología y cultura".
Por su parte, Bourdieu citado por Bracho (1990) describe al capital cultural de la siguiente manera:

Podría denominarse consumo de bienes culturales sofisticados o consumo de alta cultura, al considerar entre sus indicadores la asistencia a la ópera y museos, tipo de música preferida, etc. […] se sustenta la hipótesis de que el capital cultural es una variable determinante del éxito escolar y, por tanto, de la reproducción cultural y social. (Bracho, 1990, p. 18)

Dentro de lo que es capital cultural tenemos sus ramificaciones que son: capital cultural incorporado, objetivado e institucionalizado. Respecto a estos estados, el creador del concepto, Bourdieu plantea:

El capital cultural se presenta en tres estados: incorporado, objetivado e institucionalizado. El capital cultural en estado incorporado está ligado al cuerpo y supone su incorporación; en estado objetivado el capital cultural es transmisible en su materialidad en soportes tales como escritos, pinturas, monumentos, etc.; por último, encontramos el capital cultural en estado institucionalizado, la objetivación del capital cultural bajo la forma de títulos es una de las maneras de neutralizar ciertas propiedades que debe al hecho de que, estando incorporado, tiene los mismos límites biológicos que su soporte. (Bourdieu, 1979, p. 2)

Dentro de la investigación también se considerará el "género" como una variable a influyente en la relación de capital cultural y rendimiento académico, a la luz de lo cual se deja en claro su definición y su diferencia con el concepto "género", como lo describe S. Montecino (1997):

Se propone una distinción conceptual y sostienen que hay una diferencia entre sexo y género. El primero apunta a los rasgos fisiológicos y biológicos de ser macho o hembra, y el segundo a la construcción social de las diferencias sexuales (lo femenino y lo masculino). Así, el sexo se hereda y el género se adquiere a través del aprendizaje cultural. Esta distinción abre una brecha e inaugura un nuevo camino para las reflexiones respecto a la constitución de las identidades de hombres y mujeres. (Montecino, 1997, p. 2)

Para la presente investigación se utilizará la visión del análisis multivariado propuesto por Cuadras C. (2004) "… es un conjunto de métodos estadísticos y matemáticos, destinados a describir e interpretar los datos que provienen de la observación de varias variables estadísticas, estudiadas conjuntamente." (p. 9)
Desde esta perspectiva y suponiendo un sistema $\mathcal{S}$ en el que interactúan múltiples variables, se desea estudiar el comportamiento de una de ellas impactada por un número finito inferior al de variables que participan del sistema, sin conocer a-priori, si estas variables intervienen activamente en la dinámica de la variable cuyo comportamiento se quiere estudiar.

Método

Posee características de un estudio cuantitativo correlacional y el diseño de investigación utilizado fue de tipo no-experimental. La metodología para la recolección de datos se basó en manejar información (datos) extraída de archivos para obtener las calificaciones que representan el Rendimiento Académico en matemática. También se efectuó la recopilación de información mediante encuestas cerradas validadas por expertos, de esta forma recopilar información atribuible al capital cultural que el estudiante posee.
La metodología está centrada en la construcción de la variable capital cultural mediante los tres factores que inciden en ella, variable que puede ser un factor importante del Rendimiento Académico de un

estudiante. Para llevar a cabo el análisis se utilizaron variadas técnicas estadísticas para validar los resultados.

La muestra fue obtenida del establecimiento educacional *"Liceo Miguel Rafael Prado",* de la comuna de Independencia, Chile. Este colegio está clasificado como particular subvencionado, con alumnos de características y contextos sociales diferentes. La muestra constó de 90 estudiantes del último nivel de educación obligatoria.

El procesamiento de los datos obtenidos de las respuestas a las preguntas de la encuesta fue de carácter cuantitativo. Específicamente se medió mediante una escala liker cuyas respuestas a dichas preguntas estaban ordenadas según una escala especifica. Sin embargo, dicha escala no muestra con claridad una precisión en la interpretación de resultados, además de presentar inconvenientes a la hora de construir cada factor del capital cultural, ya que las escalas likers que se considerada son diferentes según la cantidad de respuestas. Al respecto, Stevens (1946) consiente de la dificultad presente en dichas escalas de intervalos, respalda la idea de buscar formas alternativas para solucionar este inconveniente, afirmación que abre el paso a buscar soluciones que no signifiquen pérdida de información.

El tratamiento que se le dio a la información cuantificada fue homogeneizar todas las escalas a partir de una transformación lineal para cada una de las preguntas, de esta forma cada una de ellas tendría un valor comprendido entre 0 y 1.

Considerando que la variable es dinámica, implica que existe un constante movimiento de diversos factores que influyen en ella, en este caso, el hecho que estudiantes provengan de contextos sociales diferentes repercute en la construcción de capital cultural. Otro acontecimiento que provoca dicho dinamismo es la idea de que el sujeto está expuesto a diferentes circunstancias a lo largo de su vida, por lo tanto, no es recomendable considerar una muestra donde los estudiantes sean de niveles muy distintos. Para solucionar dicho problema y poder disminuir el impacto del dinamismo del concepto, es importante considerar los contextos educativos y sociales, con ponderaciones distintas dependiendo del origen del establecimiento al cual el estudiante asiste. Autores como Muñoz, Sandoval y González (2014) señalan que, es importante considerar los factores constructores del capital cultural con diferentes ponderaciones de acuerdo al contexto social, debido a que dichos autores consideran que el capital cultural objetivado es más relevante en una clase social más acomodada, siendo el capital cultural incorporado el más representativo en clases sociales más vulnerables. En la presente investigación, dado que es un análisis preliminar de éste sistema dinámico, son considerados los tres capitales con la misma ponderación para construir la variable Capital cultural, posible predictora del rendimiento académico del estudiante.

La metodología de esta investigación trata de la construcción de la variable capital cultural mediante los tres factores que inciden en ella. Variable que puede estar relacionada con el Rendimiento Académico de un estudiante de cuarto medio. Cada estudiante poseerá un puntaje específico que representará cada uno de los factores (capital cultural incorporado, objetivado e institucionalizado), para luego construir la variable capital cultural.
La simbología utilizada para la investigación será: $X1$: "Capital cultural objetivado", $X2$: "Capital cultural incorporado", $X3$: "Capital cultural institucionalizado", $X4$: "Género", CC: "Capital cultural" y Y: "Rendimiento Académico".

Resultados y conclusiones

Si se supone un sistema $\mathcal{S}$ que lo compone la variable objetivo Rendimiento Académico en la asignatura de Matemática (Y) y el 4-vector de impacto $X(t)$, de coordenadas Capital Cultural Objetivado ($X1$), Capital Cultural Incorporado ($X2$), Capital Cultural Institucionalizado ($X3$) y Género ($X4$), cuya unidad de observación es el escolar. La relación $Y\ (t) = ((t))$ mostraría el impacto que produce el Capital Cultural en el Rendimiento Académico en la asignatura de Matemática según el género del estudiante.
Fijado el universo de interés; por ejemplo, un sector determinado de la Región Metropolitana, el estudio se puede realizar para ese sector en un determinado año (muestreo de corte transversal), resultados, que, bajo ciertas condiciones de regularidad estadística, podrían extenderse a otros sectores similares. Por otra parte, si este estudio se aplica año tras año en el sector (muestreo cronológico) se podría determinar la dinámica temporal que experimenta el rendimiento en función del Capital Cultural.

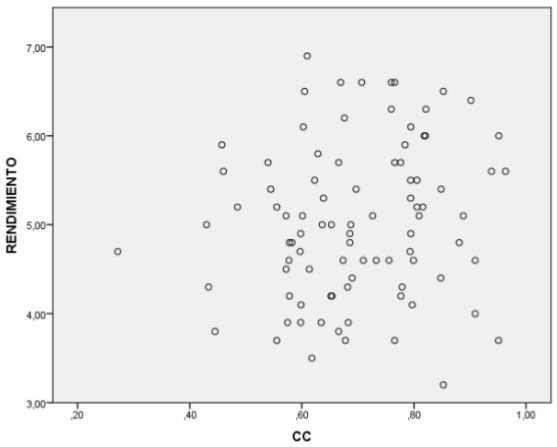


Figura 1: Gráfico de dispersión: Rendimiento Académico en la asignatura de matemática y Capital cultural.

Si el sistema $\mathcal{S}$ lo componen la variable objetivo Rendimiento Académico en la asignatura de matemática y de impacto Capital cultural, donde el estado de X lo determina el nivel promedio del capital cultural objetivado, incorporado e institucionalizado respectivamente, se concluyó que el capital cultural así definido y como parte de todas las variables que inducen a la movilidad de Y, tiene un impacto lineal en el Rendimiento Académico de intensidad estimada en 2,04% dado que su coeficiente de correlación lineal simple es de 0,143, apreciable en la figura 1. Es importante considerar que éste resultado no es generalizable.

La matriz de correlaciones, para cada par de variables, está dada como:

VARIABLES / VARIABLES	*C. C. objetivado*	*C. C. incorporado*	*C. C. institucionalizado*	*Rendimiento Académico*	*Género*	*Capital Cultural*
Capital cultural objetivado	1	0,102	0,071	0,024	-0,014	0,544
Capital cultural incorporado	0,102	1	0,073	0,87	0,203	0,599
Capital cultural institucionalizado	0,071	0,073	1	0,139	-0,039	0,708
Rendimiento Académico	0,024	0,087	0,139	1	-0,142	0,143
Género	-0,014	0,203	-0,039	-0,142	1	0,072
Capital Cultural	0,544	0,599	0,708	-0,142	0,072	1

Los coeficientes de correlación de interés son aquellos que relacionan la variable objetivo Y con cada una de las variables independientes.
Se puede apreciar que el coeficiente de correlación entre las variables Rendimiento Académico en la asignatura de matemática y Capital cultural incorporado es 0,087, valor que indicaría una leve tendencia a una relación lineal positiva, sin embargo, no es lo suficiente para afirmarlo.

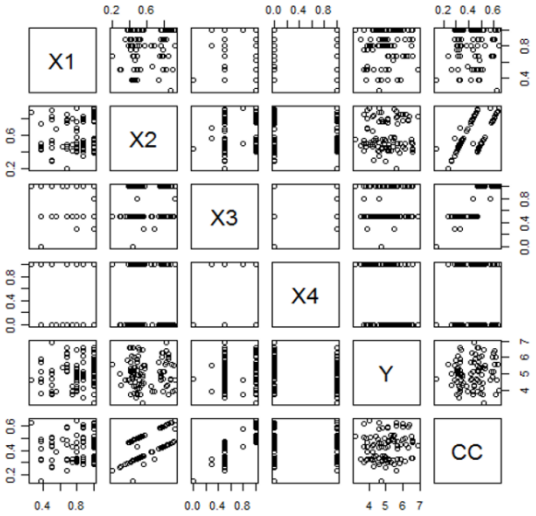


Figura 2: Gráfico de dispersión para todos los pares de variables.

Posteriormente, considerando la misma variable predictiva, para el caso de las variables Capital cultural objetivado ($X1$) y Capital cultural institucionalizado ($X3$), se tiene que los coeficientes de correlación 0,24 y 0,139, respectivamente, son positivos, y tienden a una relación lineal positiva, sin embargo, a pesar de tener correlaciones más altas que en el caso anterior, no es posible afirmar que dichos coeficientes son significativos a la hora de establecer un modelo lineal simple. Se puede observar la dispersión de los datos en la figura 2.

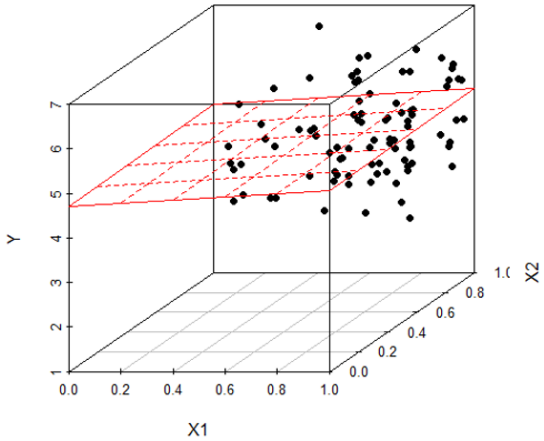


Figura 3: Representación gráfica del plano estimado para las variables Rendimiento Académico, Capital cultural objetivado y Capital cultural incorporado.

Si se considera el sistema $\mathcal{S}$ compuesto por las variables objetivo Rendimiento Académico en la asignatura de matemática (Y) y de impacto Capital Cultural Objetivado ($X1$), Capital Cultural Incorporado ($X2$), Capital Cultural Institucionalizado ($X3$) y Género ($X4$), se tiene que el coeficiente de determinación múltiple $r^2_{YX1X2X3X4} = 0{,}05$ que indicaría la variabilidad conjunta de los tres factores que definen el capital cultural y el género del escolar. El coeficiente de correlación múltiple para las variables Rendimiento Académico en la asignatura de matemática (Y) explicada por las variables: Capital cultural incorporado ($X2$) y Capital cultural objetivado ($X1$) fue el de mayor significancia, con un $r(\ \ ) = 0{,}8$ lo que podría entregar información relevante a la hora de establecer alguna relación lineal entre ellas, sin embargo, luego de la respectiva prueba de hipótesis se logró establecer que dicho coeficiente no sería determinante para afirmar una relación lineal entre las tres variables.

Otro coeficiente de correlación útil es el coeficiente de correlación parcial. En primer lugar, se consideraron las variables Capital Cultural (tratada como el promedio de los tres capitales culturales) y Rendimiento Académico en matemática (Y), cuyo interés se centra en estudiar su relación lineal, considerando la presencia del factor Género ($X4$) como variable de control, obteniéndose un coeficiente de correlación parcial cercano al 0,156, lo que podría indicar una baja relación entre dichas variables en presencia del Género del estudiante. Posteriormente, se trabajó el mismo coeficiente de correlación aplicado a varias combinaciones de variables para observar el comportamiento de las variables según la presencia de otras, obteniendo como resultado significativo, en contraste a los análisis anteriores, un coeficiente de correlación parcial de un 0,132 entre la variable Rendimiento Académico en la asignatura

de matemática (Y) y la variable Capital cultural institucionalizado ($X3$), en presencia de dos variables de control: Capital cultural incorporado ($X2$) y Capital cultural objetivado ($X1$). Posteriormente, bajo contrastación de hipótesis para la correlación parcial se comprobó que no existe evidencia para decir que existe relación lineal.

En conclusión, es posible decir que en base a lo propuesto en múltiples resultados donde intervienen los conceptos de Capital Cultural y Rendimiento Académico en matemática, que no existe relación significativa entre ambas variables, por consiguiente, no es posible establecer una función de relación lineal significativa que la represente. Sin embargo, se pudo observar que la presencia de una de las variables constructoras de capital cultural, específicamente el capital cultural incorporado, tendría una mayor relevancia en el estudiante a la hora de observar su Rendimiento Académico. También, se pudo observar que la presencia de la variable género, al parecer, tendría mayor significancia en dicha relación, sin embargo, se comprobó que no era relevante por su poco aporte que ella entregaba a la relación lineal.

Referencias bibliográficas

Bourdieu P. (1979). Los tres estados del capital cultural. Universidad Autónoma de México. Azcapotzalco, México.

Montecino S., Rebolledo L. (1994) Conceptos de género y desarrollo. Series apuntes docentes. Universidad de Chile. Santiago, Chile.

Montes I., Lerner J. (2011). Rendimiento Académico de los estudiantes de pregrado de la Universidad EAFIT (perspectiva cuantitativa). Universidad EAFIT. Medellín, Colombia.

Tonconi J. (2010) Factores que influyen en el rendimiento académico y la deserción de los estudiantes de la facultad de ingeniería económica de la UNA-PUNO. Universidad Nacional del Altiplano de Puno. Perú.

Adasme A., Aguirre M., Castro M. (2009) Factores que inciden en el Rendimiento Académico en Chile. Centro de estudios de opinión ciudadana. Universidad de Talca. Talca, Chile

LA RESIGNIFICACIÓN DE LA MEDIA ARITMÉTICA, BAJO EL ANÁLISIS GRÁFICO DE LA REPRESENTACIÓN DE LOS DATOS

Diana María Medina Lara*, Francisco Cordero Osorio*, Daniela Geraldiny Soto Soto**
***Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México) **Universidad Santiago de Chile. (Chile)**
d.medina@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx, daniela.soto.s@usach.cl

Resumen

En la educación básica, primaria y secundaria de Colombia, se realizan estudios de una de las medidas de tendencia central como lo es la media aritmética también llamada promedio en el eje de pensamiento aleatorio y sistemas de datos. Es de nuestro interés problematizar esta medida a manera de identificar y determinar elementos que debieran ser estudiados por los docentes de matemáticas de educación básica primaria y básica secundaria. Apostamos a que un análisis gráfico permitirá generar argumentaciones funcionales donde se hace entender y recordar las propiedades, que pudieran ser transversales a otros temas, ejes e incluso niveles educativos.

Palabras clave: argumentaciones funcionales, educación básica, estadística, media aritmética, docente de matemáticas

Abstract

In primary and secondary basic education in Colombia, studies are carried out on one of the central tendency measures: the arithmetic mean, also called average in the core of random thinking and data systems. We are interested in posing this measure in problems to identify and to determine elements that should be studied by primary and secondary basic-education mathematics teachers. We believe that a graphic analysis will allow us to generate functional arguments, which allows understanding and keeping in mind the properties that could be transversal to other subjects, axes, and even educational levels.

Key words: functional arguments, basic education, statistics, arithmetic average, math teacher

Introducción

La asignatura de Matemáticas en la educación básica primaria y secundaria de Colombia se organiza en lo que denominan estándares básicos de competencias, entre ellos: pensamiento aleatorio y sistemas de datos, donde se encuentran las medidas de tendencia central. Uno de los objetivos de los estándares básicos de competencias es: Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos (MEN, 2006)

Dado el objetivo que se plantea en el Programa de Estudios, se propuso que las actividades del taller permitan un análisis, no sólo desde una argumentación aritmética o algebraica, sino también gráfica de la

media aritmética, con el fin de generar en los participantes nuevas argumentaciones de la noción involucrada donde se quiere lograr la resignificación de la misma. Así, esta propuesta pretende ser significativa para el docente, en tanto que presenta una nueva mirada del concepto matemático media aritmética, el cual podría ser un método innovador para la enseñanza y aprendizaje.

Con base en lo anterior el taller tuvo como propósito trabajar con situaciones escolares de socialización que se diseñaron bajo los estándares básicos de competencias del pensamiento aleatorio y sistemas de datos tal como lo establece el MEN de Colombia. La propuesta se fundamentó en que las situaciones construidas deben ser tales que permitan un análisis diferente, no como es costumbre en la matemática escolar que favorece los procesos aritméticos o algebraicos, sino que, con base en un análisis gráfico de la media aritmética se generarán nuevos argumentos en los estudiantes de educación básica primara y básica secundaria. Así, esta propuesta puede ser de gran utilidad para el docente frente al grupo, ya que estudiará esta medida de tendencia central con un enfoque no sólo algorítmico que generará una diversidad de argumentaciones en los estudiantes.

Marco Teórico

El diseño de actividades o situaciones que se implementen en el aula es una tarea constante en el profesor. La relación con la investigación educativa es necesaria para ese diseño, no sólo en el sentido estricto de una investigación indizada sino más bien, al trabajo de indagación del contenido mismo que se desea poner en juego en clases y los contextos no sólo de las comunidades o poblaciones sino de esos contextos en los que el contenido matemático es transversal y se priorizan argumentos de lo funcional.

El diseño de esta situación escolar de socialización se basa en una experiencia con profesores de educación básica de México bajo el eje de Manejo de la Información, se rediseñan y proponen otras actividades a manera de hacer explícito qué se estudia en la media aritmética con un énfasis en el estudio de la representación gráfica, en el que se pretende visualizar las propiedades de la media aritmética, es decir, darle un sentido o significado grafico al algoritmo matemático enfocándose en el carácter funcional y transversal de la matemática escolar.

Así, con base en la Teoría Socioepistemológica, asumimos una pluralidad de usos del conocimiento matemático, que tienen cabida en escenarios escolares y no escolares. En este sentido, para el diseño de la situación escolare de socialización de la media aritmética se consideran contextos en el que se amplíen las explicaciones. Por ello, se propone centrar la atención en la representación gráfica, la cual nos ayuda a visualizar propiedades matemáticas, permitiendo generar argumentos distintos a lo típicamente escolar que suele tener un enfoque centrado en el algoritmo en donde su utilidad es únicamente encontrar el valor de la media y no en un análisis gráfico.

Investigaciones con base en la categoría de conocimiento matemático Modelación-Graficación (Cordero, Cen y Suárez, 2010; Cordero y Flores, 2007; Suárez, 2008; Zaldívar, 2009; 2014; Briceño, 2013; citados en Méndez, 2015) han mostrado distintas experiencias de cómo las gráficas no sólo son una representación de información o datos, sino que genera conocimiento matemático y que además es transversal a los ejes rectores de la educación básica: Sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida, y manejo de la información.

Flores (2007) con base en un estudio de los libros de texto de la educación básica, realiza un esquema dónde dibuja el *uso de las gráficas* y el momento en que ocurren. Ver Figura 1.

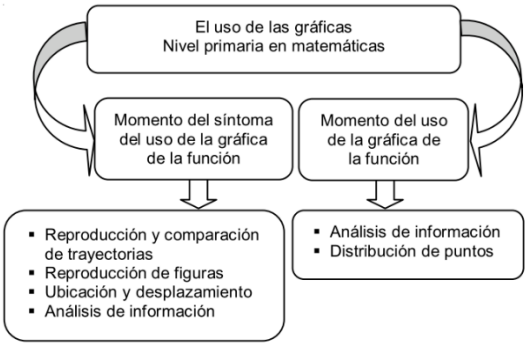


Figura 1. *Marco de referencia del uso de las gráficas en los libros integrados y de las ciencias naturales para la educación primaria. (Flores, 2007, pp. 23)*

Además, propone un esquema general de los *momentos* en que ocurren *usos de las gráficas* en la educación primaria y secundaria.

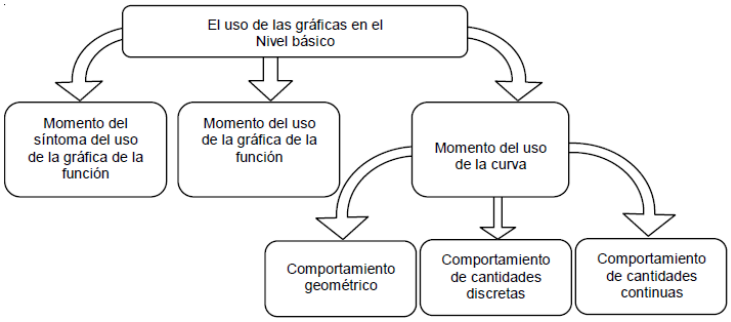


Figura 2. *Marco de referencia del uso de la gráfica en los libros del texto del nivel básico (Cordero y Flores, 2007, p. 35)*

Estos usos de las gráficas no son exclusivos de la educación básica, y algunos se continúan en el bachillerato, pero con funcionamientos y formas distintas (*fu-fo*). Ver Figura 3.

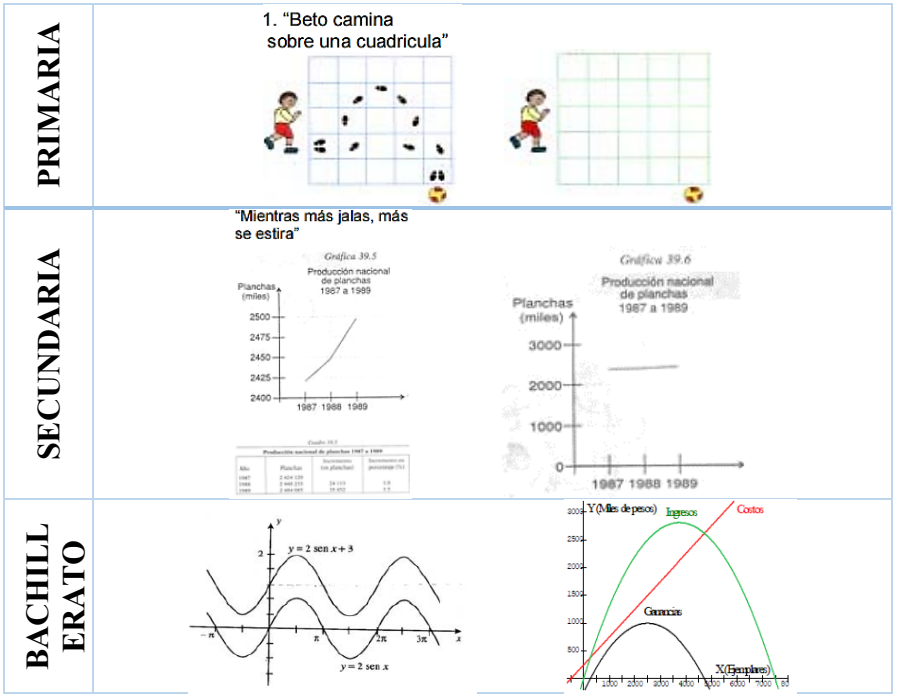


Figura 3. *El uso de la gráfica en distintos niveles educativos (Cordero y Flores, 2007; Cen, 2010).*

Con este bagaje del uso de las gráficas y los argumentos que se generan a partir de éstas se establece la postura teórica en la que se crea el diseño de esta situación escolar de socialización de la media aritmética, que descansa en la categoría de conocimiento matemático Modelación-Graficación.

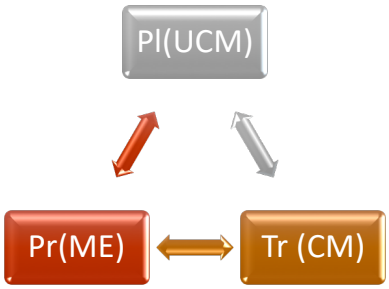


Figura 4. *Modelo teórico – metodológico de la matemática funcional* Cordero, F.; Pérez-Oxté, I.; Mendoza, E.J.; Yerbes, J.; Medina-Lara, D.; Mota-Santos, C.; Pérez-López, R. y Opazo, C. (2016)

Este modelo teórico-metodológico de una matemática funcional se basa en tres elementos clave:

- La pluralidad de los usos del conocimiento matemático [PI (UCM)]
- La problematización de la matemática escolar [Pr (ME)]
- La transversalidad del conocimiento matemático [Tr (CM)]

Es decir, se asume una pluralidad de usos del conocimiento matemático cuando se concibe la existencia del conocimiento del cotidiano, con un carácter transversal; lo que nos obliga a una constante problematización de la Matemática Escolar con miras a su resignificación.

En este sentido, el diseño de la situación escolar de socialización que se propuso consideró portadores de la información, dado el eje en el que se establece en la educación básica primaria y básica secundaria de Colombia, se consideran además elementos que den pauta a una matemática funcional como las significaciones, procedimientos, instrumento útil al humano y argumentación (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Método

Algunos elementos que ocurrieron y deben ocurrir, sin importar la población con la que se deseen trabajar estas situaciones, son:

- Discusión
- Reflexión
- Debate colectivo
- Trabajo en equipo

Dado que el objetivo principal fue problematizar la media aritmética, a manera de distinguir esos elementos que nos permitan explicitar una transversalidad y funcionalidad, el debate colectivo es esencial.

Pues si bien la discusión se centrará en el contenido matemático, será con miras a determinar qué se estudia en esta medida de tendencia central y cuáles son los argumentos funcionales que debieran explicitarse en la educación primaria y secundaria. Esto nos llevará a discusiones más finas sobre lo que genera el discurso Matemático Escolar (dME), se plantearon actividades que alejaban al participante del objeto matemático conocido como la media aritmética, es decir se produce una descentralización del objeto matemático el cual llevaba a los participantes a estudiar el comportamiento grafico de los datos para encontrar significaciones que los llevaran a toma de decisiones, un ejemplo de lo dicho es una de las actividades del taller. Ver figura 5.

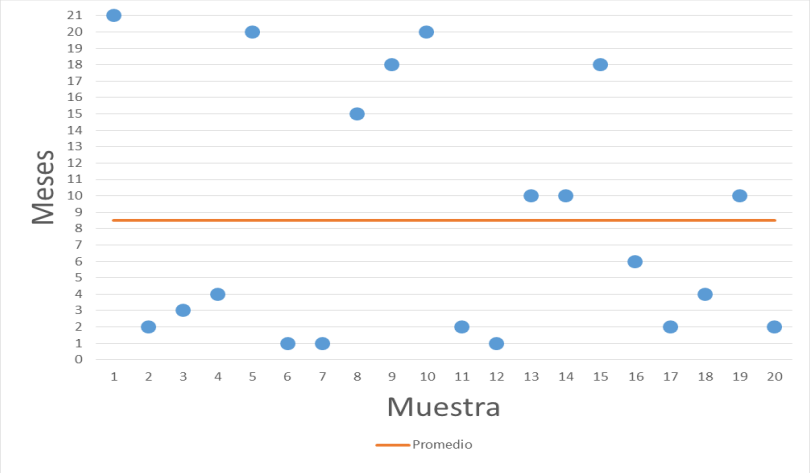


Figura 5. *Gráfica que representa una muestra aleatoria de 20 personas y el número de meses trabajados los últimos dos años con su respectivo promedio*

1. Si quisiéramos que el promedio de meses trabajados disminuya a 8, se tendría que alterar la información inicial, grafiqué el nuevo promedio y responda: ¿qué datos cambiarías y cuál es su justificación?
2. Si quisiéramos que el promedio de meses trabajados disminuya a 8, con la condición de que la muestra aumente en 5 personas, ¿Cuántos meses debería trabajar cada uno de ellos para que esto ocurra?, describa el análisis que hizo para este ejercicio. Ubica los nuevos datos en la gráfica.

Claramente son preguntas que no pertenecen al discurso matemático escolar y que de entrada chocan con lo habitual de la matemática escolar, donde no favorecen la representación de los datos en problemas de la media aritmética, esto pone en evidencia las situaciones de crisis siendo estas quien permiten poner en discusión los saberes en el mantenimiento de rutinas, es en actividades como estas que se motiva al desenvolvimiento de las estructuras de saberes iniciales de mantenimiento de rutina y se mete a los participantes a un mantenimiento de crisis, al tratar de someterlos a una estructura no considerada con anterioridad (Zaldivar, 2014), lo anterior permite evidenciar cómo suceden resignificaciones, es decir, como surgen nuevas argumentaciones sobre dicho conocimiento que se pone en juego.

Las actividades llevaron a crear argumentos nuevos tales como: equilibrio, igualdad de distancias, repartición equitativa, estabilidad entre otros los cuales son opacados en la matemática escolar y que hacen del taller un punto de inflexión para identificar nuevos significados del promedio, lo cual lleva a una resignificación de la matemática escolar e identificar los usos del promedio en otras situaciones no escolares.

Consideraciones finales

Los argumentos que se generaron tras estas actividades, si bien se pretendía que sea un trabajo en educación básica primaria y secundaria, se propone las puedan llevar a cabo en otros niveles educativos. Pues el dME actual, nos ha provisto de argumentos sólo aritméticos de ello. Viendo al promedio sólo como una operación aritmética de suma y división, más no determinar qué relación guarda ese número con cada uno de los datos, o bien, poder despreciar algún dato. Esta estrategia de identificar un dato atípico

y poder elegir despreciarlo, no es algo que ocurra en la educación primaria, pero sí en niveles superiores. Pero la elección de "despreciar" tampoco suele justificarse en términos del resto de los datos, pareciera ser que ese dato atípico tiene una característica per se al conjunto de datos al que pertenece; y no es así. Por ello, consideramos que un análisis gráfico de la media aritmética nos permitirá generar argumentaciones con un carácter funcional y transversal no sólo a estas situaciones sino además a los distintos niveles educativos donde se estudie.

Referencias bibliográficas

Cordero, F.; Pérez-Oxté, I.; Mendoza, E.J.; Yerbes, J.; Medina-Lara, D.; Mota-Santos, C.; Pérez-López, R. y Opazo, C. (2016) Taller: Una matemática funcional en la educación primaria. British Council, México.

Cordero, F. y Flores, F. (2007). El uso de la gráfica en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10(1)*, 7-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Méndez, C. (2015). Comunidad de conocimiento matemático de sordos. Lo matemático y la escuela. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México, D.F.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Zaldivar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México

FUNCIÓN DEL DOCENTE DE MATEMÁTICAS Y LA INCLUSIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO

Diana María Medina Lara*, Francisco Cordero Osorio*, Daniela Geraldiny Soto Soto**
Centro de investigaciones y de estudios avanzados del politécnico nacional*. (México)
Universidad Santiago de Chile. (Chile)**
dimamelar@gmail.com, fcordero@cinvestav.mx, daniela.soto.s@usach.cl

Resumen

En esta investigación se atiende uno de los fenómenos producidos por el discurso Matemático Escolar (dME): el fenómeno de exclusión. Fenómeno que bajo la teoría socioepistemológica se reconoce como una epistemología dominante, ya que genera imposición de argumentaciones, procedimientos y significados, alejando así tanto a docentes como a estudiantes de la construcción del conocimiento matemático escolar. El interés recae en el docente en ejercicio de Colombia, comunidad de conocimiento que está sumida en este fenómeno, donde el propósito es intervenir en la función del docente, para que él viva un proceso de inclusión en la construcción social del conocimiento matemático (CSCM), intervención que será el hilo conductor para problematizar los usos del conocimiento bajo un diseño de situación escolar de socialización.

Palabras clave: uso, exclusión, discurso matemático escolar

Abstract

This research focuses on the phenomenon of exclusion, caused by the School Mathematical Discourse (SMD). Under the socio-epistemological theory this phenomenon is recognized as a dominant epistemology, since it imposes line of arguments, procedures and meanings, thus distancing both teachers and students from the construction of school mathematical knowledge. The interest falls on the practicing teacher of Colombia, a knowledge community that is immersed in this phenomenon, where the purpose is to intervene in the teacher's role, for him to live a process of inclusion in the social construction of mathematical knowledge (SCMK), intervention that will be the guiding thread to posing problems with the uses of knowledge under a design of school socialization situation.

Key words: use, school mathematical discourse, inclusion

Introducción.

Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) colombiano, en su estructura curricular el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, en otras palabras usar su conocimiento escolar en su cotidiano, pero la realidad es otra; en el sistema educativo colombiano la matemática escolar está fuertemente influenciada y direccionada por

el aprendizaje mecánico de algoritmos matemáticos, imponiendo argumentaciones, procedimientos y significados, lo cual excluye de la construcción del conocimiento matemático (Soto, 2010)

Vale la pena entonces preguntarnos ¿cuál es la función del docente de matemáticas en la enseñanza de las matemáticas escolares?, ¿acaso el docente es un transmisor de conocimientos y el estudiante un receptor pasivo de una matemática inmodificable?, ¿para qué se enseña matemática en la escuela?, ¿para aprender a resolver problemas aplicando fórmulas matemáticas sin entender su uso en la realidad? Por estas interrogantes esta investigación está centrada en caracterizar la función del docente de matemáticas acompañado y encontrar los mecanismos que van ayudar a propiciar el cambio , es decir la inclusión en la construcción social del conocimiento matemático, donde la matemática se debe trastocar y transformar con el objetivo de responder a una matemática funcional para la gente, una matemática que responda a la realidad del que aprende, esta realidad corresponde a la escuela, el trabajo y la ciudad (Cordero, 2016a)

Por lo anterior desde nuestra perspectiva teórica se reconoce como la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al discurso matemático escolar (dME) el cual por su características (ver Figura 1) es generador de los fenómenos: Adherencia, Exclusión y Opacidad, fenómenos que soslayan al docente de la construcción del conocimiento matemático, imponiendo significados, procedimiento y argumentaciones que delinean lo que está bien o mal dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Figura 1: Mapa del discurso Matemático Escolar (Soto, 2010, p. 79)

Con base en la problemática expuesta, se plantea un rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME) basado en la construcción social del conocimiento matemático (CSCM), que debe responder a los fenómenos provocados por el dME. Desde nuestra investigación se pretende responder al fenómeno de Exclusión.

El fenómeno de exclusión en la función del docente

Para atender el fenómeno de exclusión se hace insoslayable caracterizar la función del docente de matemáticas. Como se mencionó anteriormente, la profesión del docente mucha de las veces se ha

centrado en ser un trasmisor de conocimiento matemático, conocimiento que en la matemática escolar no está vinculada con la realidad del que aprende (Cordero, 2016b). Por ello, desde el programa de investigación afirmamos que la función del docente será mantener entornos en los que sucedan sistemas de relación recíprocas de la matemática escolar y de la realidad del que aprende en situaciones específicas, para lograr lo anterior se requiere de una descentralización del objeto matemático, donde se trastoque y transforme el conocimiento matemático escolar a una matemática funcional del humano, siendo esta una condición sine qua non para la resignificación de la matemática escolar (Cordero, 2016a).

Por un lado, en la figura 2, se relacionan todos los elementos que intervienen en la dialéctica Exclusión-Inclusión en la función del docente (Cordero, 2016)

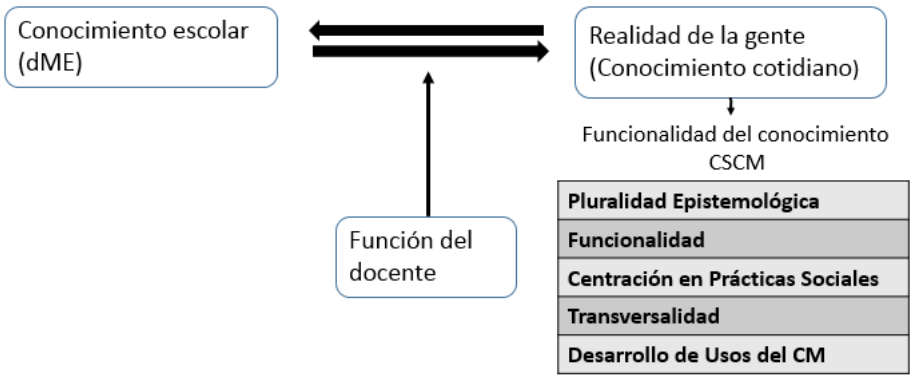


Figura 2. La Función del docente en la dialéctica Exclusión-Inclusión Construcción basada en (Cordero, 2016)

Por otro lado, el querer atender el fenómeno de exclusión nos lleva a tomar el modelo dialéctico Exclusión-Inclusión (ver figura 3) el cual muestra la confrontación entre dos epistemologías contrarias: dME y CSCM, donde se observa el cambio constante que vive el docente de matemáticas desde las características del dME hacia las características de una CSCM y viceversa, la inclusión significa el transito del dME a la CSCM y la exclusión en el tránsito de la CSCM al dME (Soto 2014).

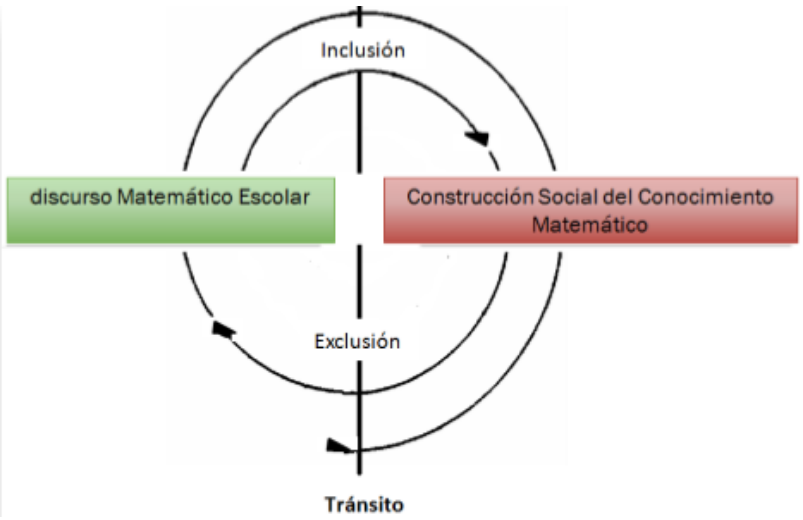


Figura 3. Modelo de la Dialéctica Exclusión- Inclusión (Cordero, et al 2015, p. 74)

Lograr ese tránsito dialéctico requiere de tres condiciones del dME y la CSCM que permiten la transformación:

1. Confrontación de argumentaciones de la situación específica y la matemática escolar
2. Interacción de argumentaciones significaciones y procedimientos
3. La institucionalización como mecanismo de la dialéctica

Estos tres ejes se conjugan para hacer funcionar la dialéctica entorno al conocimiento matemático, es decir el transito dialéctico anteriormente expuesto.

Para favorecer el tránsito, se considera el papel de una situación escolar de socialización, éste será el proceso de transformación del dME. El objetivo es promover los aprendizajes de resignificación de la matemática escolar (Cordero, 2016b), la situación escolar de socialización será una epistemología que expresa una resignificación del conocimiento, donde se toma como base la categoría modelación-graficación, categoría que aporta elementos para caracterizar la matemática funcional del ciudadano, la modelación es el uso del conocimiento matemático en una situación específica, en donde se debaten entre la función y la forma de ese conocimiento, lo que sería la resignificación del conocimiento (Cordero 2014). Adicional a esto la categoría proporciona elementos para la reorganización de la matemática escolar (Suárez & Cordero, 2010). Estos elementos podrían de igual forma conformar la epistemología para la situación escolar de socialización que permite el proceso dialectico Exclusión-Inclusión.

El propósito de las situaciones escolares de socialización es que el docente de matemáticas de básica primaria y básica secundaria de Colombia se vea inmerso en problematizar los usos del conocimiento matemático, con el propósito de reconstruir significados de los procesos y conceptos matemáticos, que se espera dé lugar a nuevas argumentaciones que serán la resignificación del conocimiento, respondiendo a una matemática funcional y aunque resulta algo complejo se evidenciaría la inclusión del docente en la construcción del conocimiento.

La matemática funcional se define por la pluralidad de argumentaciones y la transversalidad de saberes donde se resignificará la matemática escolar, esto tendrá que ir acompañado de una categoría de conocimiento matemático, categoría que responde a lo que es útil al humano en situaciones específicas, situación que se compone de significaciones o resignificaciones con sus respectivos procedimientos (Cordero, 2016b)

Con este marco planteamos el proyecto de investigación de la siguiente manera: El objetivo es identificar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático (CCM) de docentes en educación básica primaria y básica secundaria de Colombia en la ciudad de Yopal-Casanare. Con el modelo exclusión-inclusión se busca atender dos aspectos principales: (1) La problematización de los usos del conocimiento y su (2) Impacto educativo (Cordero, 2016b). En el primero se problematizará la relación modelación-graficación entre los diferentes dominios de conocimiento que obligadamente entran en juego: el discurso Matemático Escolar, otros dominios de conocimiento y el cotidiano del ciudadano (esos docentes y esos estudiantes). Y en el segundo se conformarán los multi-factores y estadios que coadyuvarán a la alianza de calidad docente de matemáticas. Los multifactores son elementos que han estado ausentes y es necesario recuperarlos, dentro de esta investigación se quiere recuperar el factor: Inclusión (Cordero, 2016b).

Las situaciones escolares de socialización rendirá cuentas de la función del docente de matemáticas, pues son estos donde sucederán los aprendizajes de resignificación de la matemática manteniendo la relación reciproca de la matemática escolar y la realidad del que aprende (Cordero, 2016), sin lugar a duda en este proceso se evidenciará el cambio de condiciones del dME y la CSCM que permiten la transformación: Confrontación de Argumentaciones de la situación específica y la matemática escolar; Interacción de argumentaciones significaciones y procedimientos y la institucionalización como mecanismo de la dialéctica (Soto, 2014).

Base para una situación escolar de socialización: La media aritmética

El diseño escolar de socialización se justifica en las categorías de conocimiento matemático (ver figura 4), donde se expresa la matemática funcional, representa las cuatro situaciones que se consideran desde el programa Socioepistemológico las que contribuyen a una matemática funcional adquiriendo significados en una comunidad de conocimiento, cada una de estas situaciones generan argumentaciones que permiten construir nuevo conocimiento (Cordero, 1998, 2001, 2008; Del Valle contribuyó recientemente con la situación de selección, 2015)

	SITUACIONES			
CONSTRUCCIÓN DE LO MATEMÁTICO	**VARIACIÓN**	**TRANSFORMACIÓN**	**APROXIMACIÓN**	**SELECCIÓN**
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos Estados $f(x+h)-f(x)=ah$ $a=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación	Predicción $E_o+Variación=E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+\ldots$	Optimización

Figura 4. Socioepistemología del Cálculo y Análisis.

Hay cuatro argumentaciones, a saber, predicción, comportamiento tendencial, analiticidad de las funciones y optimización, argumentaciones que surgen con significaciones no presentes en la matemática escolar, bajo procedimientos e instrumentos útiles al humano. Por un lado, con esta epistemología se quiere diseñar situaciones escolares de socialización, situaciones en donde se reconstruyen significados y procedimientos de acuerdo con las experiencias de los participantes, para nuestro caso, docentes de matemáticas y estudiantes.

Por otro se toma el conocimiento matemático media aritmética, el cual queremos dotar de significados. Este conocimiento suele resolverse mecánicamente sin entender en sí el uso y significado del mismo, por ejemplo Cai (1995) indica que muchos estudiantes son capaces de calcular correctamente la media aritmética pero no comprenden su algoritmo de cálculo y lo aplican de forma mecánica, por lo que nos atrevemos a afirmar que la enseñanza y aprendizaje en la matemática escolar solo favorece el objeto matemático y no un estudio detallado de la representación gráfica de los datos, a cual podría dotar de significado y nuevas argumentaciones este conocimiento.

Por lo tanto, nuestro diseño de la situación escolar de socialización (DSES) discute significaciones de la media aritmética (ver figura 5) o también llamada promedio, donde se busca lograr una descentralización del objeto matemático, esto quiere decir que se buscan significaciones de índole gráfica. La situación se crea bajo la estructura de significaciones, procedimientos e instrumentos útiles al humano que generan argumentaciones no presentes en la matemática escolar, logrando así una resignificación del conocimiento.

	(DSES) Media Aritmética
Significaciones	Equilibrio
Procedimientos	Equiparación
Instrumento	Distancias
Argumentación	Repartición equitativa

Figura 5. Cuadro situación escolar de socialización media aritmética (en construcción)

Estas significaciones, procedimientos, instrumentos y argumentaciones son generadas por la categoría modelación-graficación, en la cual se trabaja para representar gráficamente el comportamiento de un conjunto de datos y su respectiva media aritmética. Se busca comportamientos en los datos, características propias de la variación de los mismos y cambio de media aritmética, procedimientos que obligadamente llevan a una descentralización del objeto matemático y a un estudio detallado de la representación gráfica de los datos. Lo anterior muchas de las veces es opacado en la enseñanza y aprendizaje de la media aritmética en la matemática escolar, lo anterior se evidencia inicialmente en una experiencia con profesores del estado de México taller: Una matemática funcional en la educación primaria trabajo de Cordero, Pérez-Oxté, Mendoza, Yerbes; Medina-Lara; Mota-Santos, Pérez-López y Opazo, (2016).

En la puesta en escena de la situación escolar de socialización se han encontrado significaciones de equilibrio que surgen del procedimiento de equiparación donde se tomó como instrumento la medida de las distancias, lo que lleva a nuevas argumentaciones como repartición equitativa, argumentación que son nuevas en el conocimiento de la media aritmética basadas en instrumentos que son útiles al humano donde se debate entre la función y la forma, de ese conocimiento, a donde se resignificará el concepto matemático escolar

Estos elementos conforman una epistemología para el diseño de situación escolar de socialización desde donde se busca la resignificación de la media aritmética.

Con lo anterior se propicia el tránsito dialéctico el cual requiere de tres condiciones del dME y la CSCM que permiten la transformación: Confrontación de Argumentaciones de la situación específica y la matemática escolar, Interacción de argumentaciones significaciones y procedimientos y La institucionalización como mecanismo de la dialéctica (Soto, 2014)

Reflexiones

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Colombia está permeada por el dME el cual ha soslayado los usos del conocimiento matemático escolar y ha favorecido el aprendizaje memorístico de procesos algorítmicos rígidos e inmodificables, lo anterior debido a que se reconoce el carácter abstracto de las matemáticas, los niveles de abstracción en las matemáticas son crecientes llegando unos a constituirse en fuentes de otros, estos son elementos que inciden a una reconceptualización de la matemática de hoy (MEN, 1998) que ha llevado a los estudiantes al desinterés por estudiarla debido a su no relación con la realidad, por esto es necesario atender la problemática de fondo. Entonces es importante definir cuál es la función del docente de matemáticas en la enseñanza, si se supone que el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno los usos de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, siendo así el docente tendrá que favorecer esta relación de la matemática escolar y la realidad del que aprende donde exista una relación del conocimiento.

Lograr lo anterior no es trivial, se debe conformar epistemologías para las situaciones escolares de socialización que permitan propiciar la relación reciproca del conocimiento matemático y de la realidad del que aprende, donde la matemática será funcional al humano (Cordero, 2016)

Referencias bibliográficas

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v. 3, pp. 144-151). Universidad de Pernambuco.

Cordero, F. (2016a) Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz. *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa*, 59-88. Gedisa: España.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena-Lorca, J. Mena-Lorca, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, P., y D. Zakaryan, (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F.; Pérez-Oxté, I.; Mendoza, E.J.; Yerbes, J.; Medina-Lara, D.; Mota-Santos, C.; Pérez-López, R. y Opazo, C. (2016) Taller: Una matemática funcional en la educación primaria. British Council, México.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Serie de lineamientos curriculares*. Recuperado el 10 de agosto de http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-339975.html

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado el 10 de agosto de 2017 de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Soto, D. (2014). *La dialéctica exclusión-inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Suárez, L., Cordero, F. (2010). Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(4), 319 – 334.

ELEMENTOS PARA UN DISEÑO DE SITUACIÓN PARA EL ESTUDIO DEL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DESDE LAS ESTRATEGIAS VARIACIONALES

Rodolfo David Fallas Soto, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
rfallass@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Basados en las investigaciones del Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Teoría Socioepistemológica, presentamos una descripción de las estrategias variacionales en la interpretación de la construcción del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Dicha descripción se obtuvo con la ayuda de la problematización de este conocimiento matemático, realizado desde el estudio de la génesis histórica del problema. La descripción de estas estrategias, contribuyen para la base de futuros diseños de situaciones para la comprensión de este conocimiento abstracto, pero ahora, con una vía más constructiva e intuitiva.

Palabras clave: Socioepistemología, ecuaciones diferenciales, existencia, unicidad

Abstract

Based on the investigations of Thought and Variational Language in Socioepistemological Theory, we present a description of the variational strategies in the interpretation of the construction of the existence and uniqueness theorem in the ordinary differential equations. This description was obtained with help to the problematization of this mathematical knowledge, realized from the study of the historical genesis of the problem. The description of these strategies, contribute to the basis of future designs of situations for the understanding of such this abstract knowledge, but now, more constructive and intuitive way.

Key words: Socioepistemology, differential equations, existence, uniqueness

Introducción

Presentamos resultados que son producto y continuación de una investigación sobre el teorema de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La Teoría Socioepistemológica, sustento teórico de la investigación, enfrenta desde una vista sistémica una posible reconstrucción de su significado a la luz de las prácticas usadas en su desarrollo (Cantoral, 2013), sin limitarse a una reproducción cronológica de las aportaciones de las obras matemáticas, ni tampoco a una reinterpretación con lo que conocemos actualmente de dicho teorema.

Durante la investigación (Fallas-Soto, 2015, 2016) en la *problematización del saber matemático* abordada, parte de las conclusiones es que el papel de la *variación infinitamente pequeña* aplicada en la condición inicial del problema de Cauchy en las ecuaciones diferenciales, juega un papel primordial para argumentar la existencia y unicidad de la solución. Se concluye que el teorema de existencia y unicidad corresponde un modelo predictivo, pues al aplicar la variación infinitamente pequeña se busca predecir el comportamiento del sistema, si se mantiene o cambia la solución de la ecuación. Es en este punto, donde se nota la presencia de las estrategias variacionales asociadas a la construcción de la demostración del teorema. Por dicha razón, se decide ampliar la mirada describiendo las estrategias variacionales involucradas en la construcción de las nociones matemáticas relacionadas con el teorema mencionado y complementándolo con el estudio de un artículo científico que investiga los parámetros en la simulación de la trayectoria de un dron. Las estrategias variacionales son resultado de una amplia gama de investigaciones desarrolladas dentro del programa de estudio llamado Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) que desarrolla el programa Socioepistemológico.

Actualmente, hablar del teorema de existencia y unicidad representa una centración en el objeto matemático que forma parte de un mundo abstracto, tanto en los libros de textos utilizados para la enseñanza y aprendizaje como la forma de enseñarlo, basado en operaciones matemáticas e hipótesis para comprobar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial. El enfoque socioepistemológico es el que nos permite descentrarnos del objeto y estudiar aquellas prácticas que se manifiestan como las estrategias variacionales. Por lo tanto, el problema de investigación está ligado al significado en matemáticas, pues la forma en cómo se presenta el teorema no parece deducirse del mundo de las prácticas o propiamente de los usos, ni tampoco de la *matematización de la naturaleza*.

Elementos teórico-metodológico

La problematización del saber matemático metafóricamente es la columna vertebral de nuestra metodología. En este caso, la problematización se realiza desde un estudio de la génesis histórica del teorema y su evolución, estudiando los cambios e invariantes en los argumentos entre los matemáticos que construyeron la demostración del teorema y ejemplos de no unicidad de la solución que ayudaron a comprender la unicidad, todo esto entre la relación de las acciones de *historizar* y *dialectizar*. A partir de esto, se realiza una reconstrucción racional del estudio de la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales y las prácticas asociadas que hacen del teorema un modelo predictivo, esto en diferentes etapas.

En una primera etapa se realiza una búsqueda bibliográfica y se hace lectura de los trabajos matemáticos de la época, trabajos que ayudaron a la construcción de este conocimiento, tanto de las fuentes primarias que corresponden a las obras originales, así como las fuentes secundarias, en este caso los artículos. Estos son:

- (Cauchy y Moigno, 1844), obra llamada “Lecons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral”
- (Lipschitz, 1880), obra titulada “Lehrbuch der Analysis”
- (Lipschitz, 1868) artículo con el título “Disamina della possibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie”

- (Peano, 1973) artículo retomado del original correspondiente al año 1885-1886, llamado: "Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine".
- (Picard, 1886) obra llamada "Cours D' Analyse"

La primera obra en estudiarse fue la de Picard, donde menciona que los mayores responsables en el estudio de este teorema fueron (Cauchy & Moigno, 1844) y (Lipschitz, 1880). Además, se estudia la obra de Peano, ya que existe el teorema de existencia a su nombre en algunos libros de texto actuales.

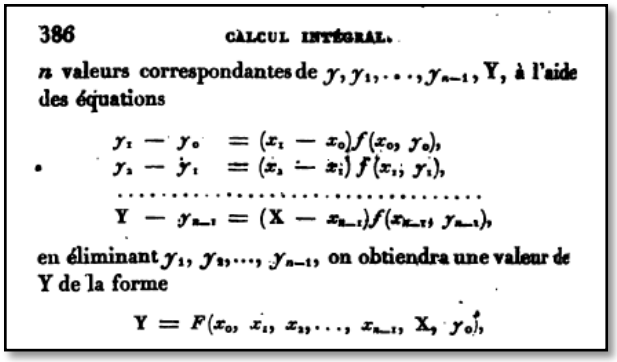
La segunda etapa corresponde a un análisis documental, se reconstruyen los elementos utilizados en las obras matemáticas para el estudio del teorema de existencia y unicidad. Esto brinda aportes para explicar estrategias de implementación que propicien la esencia social de la construcción de dicho teorema con base en una evolución pragmática (de prácticas), esta corresponde a la tercera etapa. Por último, en una cuarta etapa, se inicia el estudio de artículos en otras disciplinas, asociados a las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales pero que den indicios de elementos a identificar de la existencia y unicidad. Para este escrito, estaremos reportando lo estudiado de (Rosales, Scaglia, Carelli y Jordan, 2011) sobre el seguimiento de la trayectoria de un dron basado en métodos numéricos.

Con respecto a las estrategias variacionales presentes en el teorema, nos basamos en los resultados de investigaciones desarrolladas en el programa de PyLV que se trabaja al lado de la Teoría Socioepistemológica, en particular Caballero (2012, 2016) ha permitido explicitar las estrategias variacionales (prácticas presentes en el estudio del cambio de estados en fenómenos estudiados con herramientas deterministas) a partir de un estudio profundo de las investigaciones previas, sobre los cuales describe:

- Comparación: Está asociada a la acción de establecer diferencias entre estados.
- Predicción: La acción de poder intuir después de analizar algunos estados para deducir estados posteriores. Significa anticipar con cierta racionalidad.
- Seriación: Está asociada con la acción de establecer relaciones entre estados sucesivos. Estudiar los cambios para determinar un patrón.
- Estimación: Se parte del hecho de conocer estados cambiantes, proponiendo estados a corto plazo.

Resultados de las obras matemáticas

Cauchy & Moigno (1844), consideran a la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ con las hipótesis de que $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas con la condición inicial (x_0, y_0). Los autores prueban la convergencia de la sucesión de puntos obtenidos por el método de las quebradas.



386 CALCUL INTÉGRAL.

n valeurs correspondantes de $y, y_1, \ldots, y_{n-1}, Y$, à l'aide des équations

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned}$$

en éliminant $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, on obtiendra une valeur de Y de la forme

$$Y = F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X, y_0),$$

Figura 1. Método de las quebradas
Fuente: (Cauchy y Moigno, 1844, pág. 386)

Este método es utilizado en las obras de Lipschitz, Peano y Picard, como argumento invariante para la demostración del teorema. Consiste en ir determinando estados sucesivos que dependen del estado que lo precede a partir del estudio de la linealidad y *pequeñas variaciones* (infinitesimal) que se permite realizar con la ecuación diferencial (como razón de cambio que determina la pendiente de la recta) y la condición inicial (punto por donde pasa la recta). Tal y como mostramos en las siguientes ilustraciones.

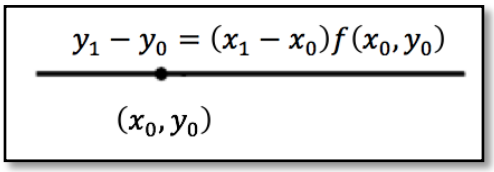


Figura 2. Primera iteración del método de las quebradas

Conociendo el siguiente valor como aproximación de la solución, se procede a realizar la siguiente iteración

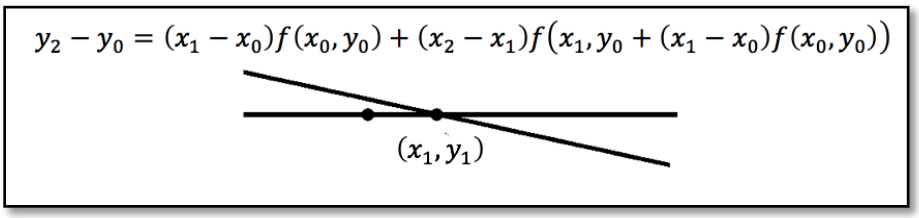


Figura 3. Segunda iteración del método de las quebradas

Por lo tanto, se generaliza y aproxima que $y - y_0 = \pm \Theta A(x_n - x_0)$ donde A es un promedio de las $f(x_n, y_n)$ y Θ un valor entre 0 y 1.

Entonces los autores generalizan lo anterior asegurando que y_n es igual a

$$y_n = y_0 + (x_n - x_0) f\big(x_0 + \theta(x_n - x_0), y_0 \pm \Theta A(x_n - x_0)\big)$$

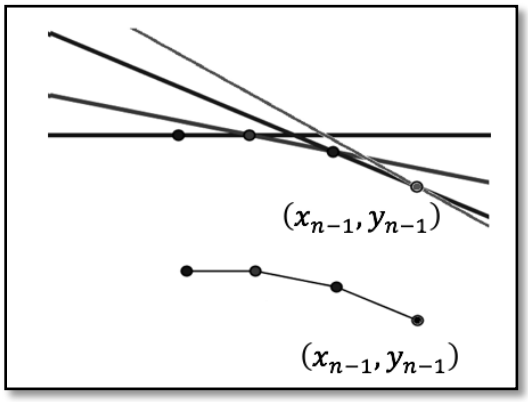


Figura 4. N-ésima iteración obteniendo una aproximación numérica de la solución

Del cual y_n corresponde prácticamente del mismo valor que y_0 si la diferencia $x_n - x_0$ es muy pequeña. En otras palabras, si $x_n \to x_0$ entonces $y_n \to y_0$.

Además, estudian la convergencia de la siguiente manera como parte de una estabilidad del sistema. Si se le realiza un incremento pequeño ς_0 a y_0, entonces y_n tendrá un incremento ς_n. Para que converja, este último incremento debe ser igual de pequeño que ς_0. Lo anterior pues se busca la estabilidad de la función y para asegurar existencia. Nuevamente en juego la pequeña variación para comparar estados y así determinar una predicción local con cada iteración para determinar al final una predicción global (estimación) del sistema.

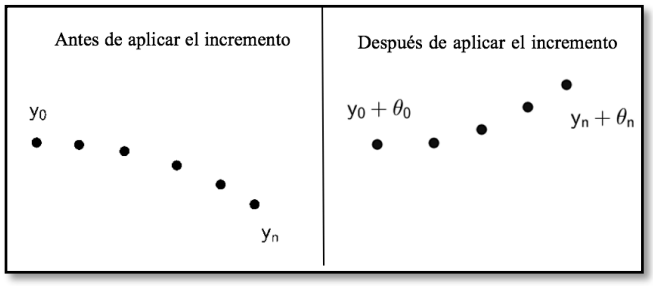


Figura 5. Caso en donde el incremento de y_n cambia considerablemente con respecto al incremento de y_0

Este resultado lo profundiza Lipschitz (1880) al trabajar con sistemas de ecuaciones y la unicidad de la solución. Basándonos como ejemplo en la ilustración 05, lo que en realidad está pasando, es que a partir de la primera iteración se están obteniendo dos rectas tangentes que corresponden respectivamente a cada una de las dos soluciones. Por eso, en el punto (x_1, y_1) y otro muy cercano (x_1, η_1), con $\eta_1 = y_1 + \theta_1$ tal que $\eta_1 - y_1$ es cercano a cero, se están determinando dos rectas tangentes, las cuales son.

$$y - y_1 = (x - x_1) f(x_1, y_1)$$

y

$$y - \eta_1 = (x - x_1)f(x_1, \eta_1)$$

Tal y como se muestra en la siguiente representación

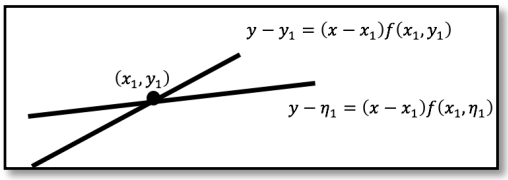


Figura 06. La existencia de dos soluciones para la ecuación

Entonces si estudiamos la diferencia entre estas dos rectas, vemos que es lo mismo que restar las pendientes de ambas, pues η_1 es un valor muy cercano a y_1. Observe que esta distancia entre las rectas está determinada por la resta

$$|f(x_1, \eta_1) - f(x_1, y_1)|$$

Es por eso, que la condición de Lipschitz juega un papel importante, pues esta diferencia se vería acotada por

$$|f(x_1, \eta_1) - f(x_1, y_1)| < M|\eta_1 - y_1|$$

En donde la constante M es la cota de la $\frac{\partial f}{\partial y}$ que no necesariamente es continua. Entonces si se cumple esta condición, tendríamos que $|f(x_1, \eta_1) - f(x_1, y_1)| = 0$ siendo una solución única a la ecuación. Si la condición de Lipschitz no se cumple, no se puede garantizar unicidad, puede que exista o puede que no exista.

Interpretación de la simulación de la trayectoria de un dron

Para nuestro trabajo, es de interés conocer el uso de la matemática en fenómenos relacionados en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, para caracterizar las nociones de existencia y unicidad desde esta práctica de referencia. Por eso, se decide estudiar el trabajo de (Rosales, Scaglia, Carelli, & Jordan, 2011) que trata de dar un seguimiento de trayectoria de un mini helicóptero de cuatro rotores basados en métodos numéricos, con el objetivo de encontrar las acciones de control optimas que permiten llevar al vehículo del estado actual al deseado. Los autores deciden abordar su estudio con estos vehículos por su versatilidad y maniobrabilidad que permiten un gran número de tareas.

Figura 7. Drones de cuatro rotores

Durante el diseño del controlador, mencionan que construyen una ley de control capaz de generar señales, con el objetivo de que *la posición del helicóptero siga la trayectoria deseada*. Justamente esta frase, se interpreta como un uso de la unicidad en el comportamiento del fenómeno, colocando las condiciones necesarias para que tenga la solución que se desea obtener. Al momento de encontrar estas condiciones aparece la esencia de la condición de Lipschitz que asegura la unicidad de la trayectoria, muy de la mano con la noción matemática de error.

Esta comparación que realizan es una herramienta de análisis para comprobar la robustez del controlador frente a errores en los parámetros establecidos. Esto es un resultado importante, de acuerdo a los autores, ya que aseguran que no siempre se cuenta con los valores de los parámetros sus resultados ayudan a tener respuestas satisfactorias en la simulación de estas trayectorias.

Conclusiones

Este estudio, muestra el tipo de prácticas (estrategias variacionales) que se ponen en juego para justificar la existencia y la unicidad desde la solución, ampliando desde el enfoque socioepistemológico, el papel de la variación infinitamente pequeña y la predicción que caracteriza a la esencia social que ayuda a construir estas nociones matemáticas. Sostenemos que una de las preguntas que debe llevar un diseño de situación en el estudio de fenómenos debe ser: ¿Qué se necesita hacer para obtener el resultado deseado?, llevando al individuo a realizar medidas de control ante variaciones en el sistema para obtener el resultado que se desea dependiendo del fenómeno de estudio.

Del análisis documental sobre obras originales de matemáticas se obtuvo componentes: numéricos, variacionales, analíticos y visuales, que podrían ayudar a una mejor comprensión del teorema o el método de Euler como método de aproximación de la solución de la ecuación diferencial. Por otra parte, se significaron otros constructos, como la convergencia, la condición de Lipschitz y la continuidad de las funciones $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, respecto de y.

Además, las estrategias variacionales en la construcción de este teorema y presentes en la simulación del dron, fueron de forma concreta:

- Comparación: Se comparan los estados que corresponden a los valores de la solución numérica de la ecuación diferencial. Además, se compara a la solución obtenida antes y después de la pequeña variación en la condición inicial para determinar su unicidad.
- Predicción: De las estrategias más utilizadas, y confirmando que este teorema corresponde a un modelo predictivo, se utiliza para predecir la existencia de la solución, y con la pequeña variación nos asegura la convergencia y la unicidad de la solución.
- Seriación: Al encontrar una relación entre un estado y otro, partiendo de las condiciones iniciales, en muchos casos se logra obtener la solución analítica de la ecuación diferencial, mientras que en otros casos solamente se predice el valor que tendrá el siguiente valor de la solución numérica de la solución, ambos casos con apoyo del estudio de patrones entre un estado y otro.

- Estimación: Al conocer los valores iniciales y desconocer el siguiente valor que determina la solución numérica de la ecuación diferencial, es que entra en juego la aproximación lineal para determinar el siguiente valor o estado.

Para la realización de un diseño de Situación de aprendizaje, es pertinente realizar dos preguntas asociadas a la noción de unicidad, esto en común que se pudo observar entre la simulación de la trayectoria de un dron y el análisis documental de las obras matemáticas:

- Dada una condición inicial de un fenómeno y su comportamiento, se obtiene un cierto modelo que lo describe, ¿Qué ocurre con el fenómeno y el modelo, cuando se recibe una pequeña variación a la condición inicial o pequeña variación en los parámetros que estén en juego?,
- ¿Dado el fenómeno y el modelo en estudio, qué condiciones en los parámetros y sobre la condición inicial se deben realizar para obtener un estado futuro deseado?

Al realizar un estudio como el actual, se puede observar que emergen diversas racionalidades que servirán al momento de diseñar situaciones de aprendizaje mediante el empleo de variables didácticas o variables de control para modificarlas, manteniendo presente la construcción de estos significados. Al reconstruir estas significaciones, ayudaron a comprender otros problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales, como su estabilidad en un sistema de ecuaciones diferenciales, y construir para ello, otras interpretaciones visuales

Referencias bibliográficas

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Fallas-Soto, R. (2015). *Existencia y unicidad: estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Fallas-Soto, R., & Cantoral, R. (2016). Estudio Socioepistemológico del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. *História da Educação Matemática, 2*(3), 256-280.

Cauchy, A., & Moigno. (1844). *Lecons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral*. Paris: Libraire de École Polytechnique.

Lipschitz, R. (1868). Disamina della possibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*., 2(2), 288–302.

Lipschitz, R. (1880). *Lehrbuch der Analysis*. Bonn. Deutschland: Verlag Von Max Cohen & Sohn.

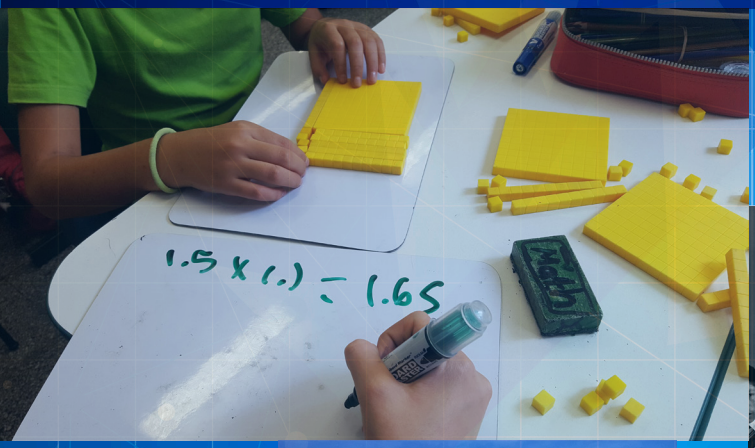
Peano, G. (1973). Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino 21 (1885-1886): 677-685. Hamburger Which Was Reprinted in Peano 1957-1959., 1, 74–81.

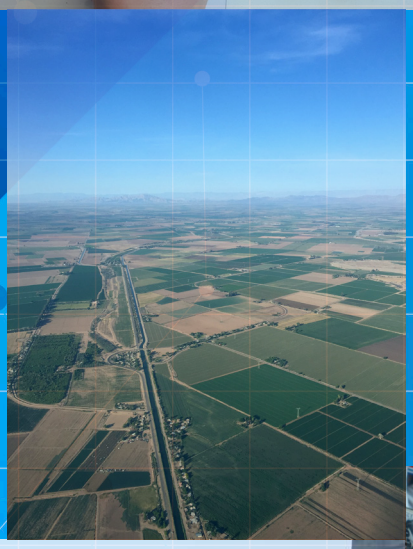
Picard, E. (1886). Cours D' Analyse. Faculté des Sciences de Paris.

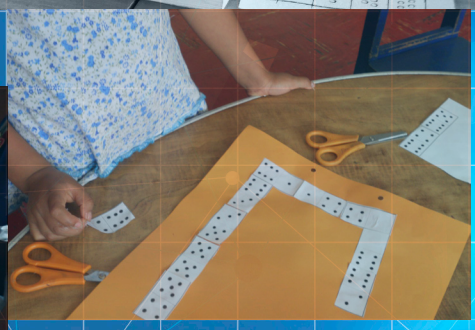
Rosales, C., Scaglia, G., Carelli, R., & Jordan, M. (2011). Seguimiento de trayectoria de un mini-helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos. *XIV Reunión de Trabajo Procesamiento de la Información y Control*, 495-500.

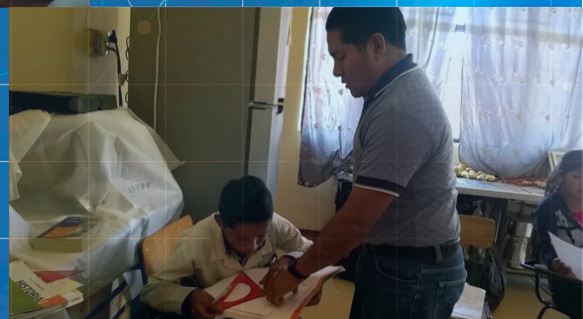
SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL









ENSEÑANZA DEL PRINCIPIO MULTIPLICATIVO POR PROFESORES EN FORMACIÓN PARA PRIMARIA

Ana María Martínez Blancarte, Ana María Ojeda Salazar
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. (México)
amatinezb@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen

Esta investigación, cualitativa, examinó las prácticas de enseñanza del principio multiplicativo de dos futuros profesores del cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, a alumnos de segundo, tercero y cuarto grados. Las estrategias de enseñanza que propusieron fueron aprobadas por sus mentores. Los practicantes no identificaron las permutaciones, con y sin repetición, ni la variedad de soluciones que dieron los alumnos a problemas de conteo; los niños también evidenciaron el sentido del que dotaron a los términos y a sus estrategias de solución. Los profesores en formación requieren dominar el principio multiplicativo, el trazo de diagramas de árbol para solucionar algunos problemas relativos a él y anticipar las posibles respuestas de alumnos de primaria a problemas que lo impliquen.

Palabras clave: enseñanza, principio multiplicativo, profesores en formación

Abstract

This qualitative research examined the teaching practices of the multiplication principle, by two prospective teachers from the fourth semester of the Bachelor's degree in Primary Education, to second, third and fourth primary graders. The teaching strategies they proposed were approved by their mentors. Practitioners did not identify the permutations, with and without repetition, nor the variety of solutions that pupils gave to counting problems; the children also gave evidence of the sense given to the terms and to their solution strategies. The in-training teachers need to master the multiplicative principle, the drawing of tree diagrams to solve some problems related to it and to anticipate the pupils' possible answers to problems involving the multiplication principle.

Key words: teaching, multiplication principle, teachers training

Introducción

Investigamos, cualitativamente (Vasilachis, 2006), las características de la formación docente en estocásticos para la educación primaria, dadas las reformas para la Educación Primaria (SEP, 2011a) y para la Normal (SEP, 2012). Hogarth (2001) señaló que "aprender implica un contenido y unas reglas; entendiendo por contenido lo que se aprende; y, por reglas, cómo se aprende lo que se aprende" (pp. 281-282); advierte que "los aprendices aprenden al trabajar junto con sus maestros y al observar lo que éstos hacen" (p. 284). Por ello, planteamos la pregunta: ¿Qué caracteriza la comprensión del principio multiplicativo de los docentes en formación? El objetivo fue identificar el conocimiento de técnicas de

conteo para la enseñanza que requieren los docentes en formación para la educación primaria. Nos referiremos sólo al principio multiplicativo y a las permutaciones.
English hace explícito que el principio fundamental del conteo establece que si "una tarea se puede realizar de *n* maneras y otra tarea de *m* formas, entonces el número de maneras de realizar las dos tareas es *nm*" (2005, p. 122). La autora recomienda incluir la combinatoria en el currículo de matemáticas para fortalecer el razonamiento combinatorio pues, como también señalan Batanero, Godino & Navarro-Pelayo (1997), los estudiantes enumeran incorrectamente el espacio muestra (no identifican todas las respuestas) de un problema, dando origen a ideas erróneas en probabilidad. En una investigación documental de la propuesta para educación primaria (SEP, 2011a), Martínez y Ojeda (2016) identificaron tres lecciones en los libros de texto de primaria (2°, 3° y 4° grado) relacionadas con el principio multiplicativo. Las tres lecciones fueron asignadas por los tutores de primaria a dos normalistas para que las impartieran en sus jornadas de prácticas.

Elementos teóricos

La combinatoria, una de las diez ideas fundamentales de estocásticos que Heitele (1975) propuso como guía para un currículum en espiral, fue señalada por Fischbein (1975) como una de las cuatro fuentes intuitivas del pensamiento probabilístico. Para Heitele (1975), las operaciones combinatorias (técnicas de conteo) calculan los campos de probabilidad de eventos aleatorios complejos.

Piaget e Inhelder (1951) caracterizaron para cada estadio de la evolución del pensamiento del niño la de la idea de azar, para la que las operaciones combinatorias son centrales:

- *Estadio de las operaciones preconcretas* (edades de 4 a 7 años). El niño "no comprende la naturaleza aleatoria de la mezcla" (p. 4); carece de un "pensamiento operatorio pues es incapaz de concebir las operaciones reversibles" (p. 9). En esta etapa hay "ausencia de nociones combinatorias, falta de comprensión de las posibles permutaciones y falta de comprensión de la idea de azar" (p.12). Los niños "captan más rápido las combinaciones utilizando agrupamientos empíricos, [pero] muestran dificultad para captar el principio de permutaciones" (p. 176); las permutaciones posibles son obtenidas por tanteos o identificando regularidades, dado que "el niño carece de las ideas de movilidad y de la reversibilidad" (p. 180).
- *Estadio de las operaciones concretas* (de los 7 a los 11 años). Los niños tienen una idea de mezcla aleatoria global, sin advertir las posibilidades de acuerdo al modelo de permutaciones y arreglos. El niño "tiene una impresión de la regularidad, pero aún no es capaz de generalizarla" (p. 181). En esta etapa se dan:

  > … dos procesos correlativos: el primero, es una conciencia progresiva de las simetrías o igualdades de las distribuciones; y el segundo, es el descubrimiento de un sistema (identificando la igualdad del número de permutaciones que comienzan igual y después la repetición del segundo elemento). (p. 187)

- *Estadio de las operaciones formales* (de los 11 a los 12 años). El niño concibe "la mezcla aleatoria" (p. 232) mediante la construcción de sistemas como parte de un total de posibilidades. Las proporciones se descubren mediante el pensamiento formal. "El número de posibles permutaciones es descubierto por

> el niño por un simple truco de multiplicación sucesiva, es una operación simple que consiste esencialmente en correspondencias" (p. 193). "El descubrimiento de permutaciones es posterior al de las combinaciones. Las combinaciones son una sencilla generalización de la multiplicación; las permutaciones proporcionan el verdadero prototipo de las relaciones, o las operaciones que llevan a otras operaciones" (p. 194).

Para Fischbein (1975), el inventario de casos posibles es más que una enumeración de elementos (excepto en, algunos experimentos simples), dado que presupone un proceso racional y constructivo que establece un espacio muestral de todos los resultados posibles. Este autor recomienda que la enseñanza de la combinatoria se inicie en el nivel de las operaciones concretas o por muy tarde al inicio de las operaciones formales (de 12 a 14 años). Fischbein desarrolló actividades favorables para la enseñanza de ideas de probabilidad y de combinatoria con niños de 9 a 10 años. Concluyó que el diagrama de árbol "proporciona un principio de construcción que sintetiza la inducción y deducción en una sola operación, una fórmula de trabajo que es un esquema cognitivo conceptual" (Fischbein, 1975, p. 115), y prefigura las reglas de suma y producto de probabilidades. Para Steinbring (1991), el diagrama de árbol es un medio de representación en estocásticos elementales para "reconstruir el significado del conocimiento matemático construido en el aula y comprender su relación con las condiciones sociales y las convenciones de enseñanza y de aprendizaje" (p. 508).

En su investigación acerca de enfoques intuitivos en condiciones de incertidumbre de maestros de escuela primaria, Andrà (2011) propuso tres niveles de las representaciones que producen las personas para estimar la probabilidad.

1. *Nivel de la experiencia*: las personas realizan representaciones que pueden ser perceptibles y aproximadas para contar los casos posibles y los casos favorables de eventos. Las personas representan los eventos mediante representaciones poco perceptibles, como las flechas, los diagramas de Venn, las tablas, entre otras. Heitele (1975) señala que el diagrama de árbol contribuye a evitar que los niños se limiten a un determinismo; es una estrategia que prefigura todos los posibles resultados, los pasos del experimento (aleatorio) y con ella se pueden identificar los espacios muestra discretos.
2. *Nivel del pensamiento aritmético*: las personas pasan de una percepción a una aproximación a las cantidades, que pueden ser números enteros y convertirse en porcentajes.
3. *Nivel de la teoría*: se comprenden las expresiones matemáticas (fórmulas), los axiomas y los teoremas de la probabilidad. Las representaciones son formales y abstractas.

Dreher y Kuntze (2015) realizaron una investigación sobre el caso de las múltiples representaciones en la clase de matemáticas con profesores en formación y profesores en activo de secundaria. Concluyeron que en los entornos de aprendizaje a los estudiantes se les debe dar la oportunidad de conocer diferentes representaciones de un objeto matemático para desarrollar la comprensión conceptual de las matemáticas. Se debe considerar el cambio de representaciones para que los estudiantes realicen conexiones y reflexiones sobre esas representaciones. De acuerdo con Parker y Leinhardt (1995) en su propuesta de enseñanza del porciento, un reto tanto para los investigadores como para los maestros es diseñar o seleccionar las representaciones para la enseñanza.

Un alumno, al resolver un problema, puede activar la zona de desarrollo próximo, definida por Vygotsky (2009) como:

> …la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. (p. 133)

Método

Observamos en aulas (Wittrock, 1986) tres prácticas (P^1, P^2 y P^3) de enseñanza en primaria de dos futuros profesores (E_5 y E_9) de la Licenciatura en Educación Primaria. Los temas fueron asignados por los docentes titulares (tutores) de los grupos de primaria para los que se realizaron las prácticas. Las estrategias de E_5 y E_9 fueron aprobadas por sus mentores en la Normal. Cada práctica duró una hora, y fue videograbada y transcrita para su análisis. La investigadora (I) intervino en las sesiones dado que en algunos momentos los normalistas presentaron dificultades con el contenido o de organización de actividades, o para clarificar las participaciones de los alumnos (A_i o AS).

Los referentes propuestos por E_5 y E_9 a los alumnos de primaria se caracterizan en la Tabla 1, de acuerdo a la célula de análisis (Ojeda, 2006), la cual también aplicamos a los datos obtenidos de la observación en el aula: referente; ideas fundamentales (combinatoria); otros conceptos matemáticos; recursos semióticos; y términos empleados.

Tabla 1. Caracterización de los diseños de las prácticas (P^i) propuestos por E_5 y E_9.

Criterio	E_5 (6 alumnos, 2°primaria)	E_5 (14 alumnos, 3° primaria)	E_9 (13 alumnos, 4° primaria)
Referentes	**P¹**: *Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántas cantidades diferentes de tres cifras puedo formar?* [No aclaró si los dígitos debían o no repetirse; tampoco se aclaró la diferencia entre dígito, cantidad y cifra].	**P²**: *Danaé tiene tres tipos de guisados y dos tipos de postres. ¿Cuántos platillos diferentes puede formar?* Lección 16. Figuras y colores (SEP, 2011b).	**P³**: *Con cuatro cuadrados de cada uno de los siguientes colores: azul, morado, anaranjado, y con cuatro triángulos de cada uno de los siguientes colores: rojo, amarillo y verde, ¿cuántas casitas diferentes se pueden formar?*
Ideas fundamentales	Combinatoria (principio multiplicativo)	Combinatoria (principio multiplicativo)	Combinatoria (principio multiplicativo)
Otros conceptos matemáticos	Dígitos, operaciones básicas (adición)	Operaciones básicas (adición y multiplicación)	Figuras geométricas, operaciones básicas (adición y multiplicación)

Recursos semióticos	[Planteado oralmente] los numerales (1, 3 y 5) en tarjetas	[Planteado oralmente] escrito en el pizarrón, figuras de guisados y postres	[Planteado oralmente] escrito en el pizarrón, cuadrados y triángulos de diferentes colores, tabla de doble entrada
Términos empleados	Cantidades diferentes	Platillos diferentes	Casitas diferentes

Resultados

Combinatoria. En P^1, E_5 no reconoció la permutación con repetición en la respuesta de un alumno de 2° grado y mostró así su inadvertencia de este aspecto en el referente planteado; sólo las permutaciones sin repetición escritas por los alumnos fueron aceptadas por E_5 como respuesta correcta.

A_1: Puedo hacer… el tres cambiarlo por el cinco [traza la flecha que inicia en el tres y termina en el 5] y el cinco va por aquí [señala el uno con su lápiz] y el uno se queda, y se forma el 351 [enseña su cuaderno a I].
I: ¿Cuántas más?
A_1: Hay muchas más, si pone…, podría ser uno, aquí [traza una flecha del 1 del 351 al 3], uno aquí [señala las centenas de 135] pero cambio el 5 en medio y el tres aquí, sería 153.
I: Mmmjú, ¿qué más?
A_1: Es diferente a las otras cantidades.
I: ¿Son todas [refiriéndose a las cantidades escritas por el alumno] o puedes hacer otra?
A_1: Hay otra, trescientos quince [se queda observando su trabajo] sí, me faltó trescientos quince, cambio otra vez el tres [traza la flecha que inicia en el tres y termina en el uno de 153] trescientos quince, pero cambió así [traza una flecha del cinco (del 153) al 3].

Figura 1. Cantidades de tres cifras escritas por A_1 de 2° grado.

Como señalaron Piaget e Inhelder (1951), el niño escribió cinco permutaciones de tres elementos sin seguir un sistema, pero advirtió el rol del cambio de posición.
En P^2, los alumnos de 3er grado identificaron la operación aritmética respectiva para responder correctamente seis platillos diferentes. Para P^3, E_9 no aclaró qué sucedería con la repetición de casas, pero los alumnos (*AS*) de 4° grado sí la advirtieron y decidieron no considerarla:

A_{13}: [Estira la mano tratando de alcanzar las tres casas repetidas]… o que nos sobren, pero también, podemos hacer que éstos [se refiere a las tres casas repetidas] no los contemos.
I: Fuerte [el tono de voz], a ver; ¿qué me dijiste?, ¿qué, qué?
A_{13}: También podemos hacer que éstos [señala las tres casas repetidas], que éstos, no los contemos.
I: ¿Entonces?
A_{13}: Que los saquemos.
I: Entonces, ¿esas tres [refiriéndose a las casas repetidas] entran en la respuesta a la pregunta que se les hizo?
A_{13}: Pues sí, porque […]. No […] ¡no!
I: ¿Por qué no?
A_{13}: Pues […] como ya le dijo mi compañero A_{10}, serían repetidas.
I: Entonces, ¿cuál es la respuesta a la pregunta? ¿Cuántas…?
AS: ¡Nueve!

Durante P^3, los alumnos de 4° grado colorearon las figuras como se les había indicado, construyeron nueve casas distintas y tres repetidas que descartaron; y comprobaron la respuesta de nueve casas distintas al completar una tabla de doble entrada (véase la Figura 4), propuesta por E_9, quien terminó solicitando a los alumnos la operación aritmética que confirmaba que sólo eran posibles nueve casas diferentes:

E_9: [Inaudible] escuchen ya dijimos que son nueve casitas [señala la tabla de doble entrada] y ¿cómo dijimos que sacamos esas nueve casitas con una operación?
A_8: Con una multiplicación; son nueve.
E_9: ¿Cuánto es?
A_8: Tres por tres; nueve.
E_9: Tres por tres; nueve ¿sí? [mira al grupo]. Y ¿por qué eran tres por tres?
$A_{\#}$: Porque eran tres colores de cada figura.

Sin embargo, el recurso de la tabla se ignoró al responder los ejercicios del libro de texto (SEP, 2011c, p. 31), pues los alumnos ya sólo efectuaron la multiplicación respectiva.

Otros conceptos matemáticos. En las tres prácticas, E_5 y E_9 realizaron operaciones aritméticas correctas. En P^1, todos los alumnos de 2° grado identificaron correctamente cantidades de tres cifras (véase la Figura 1). En P^2, los alumnos de 3er grado resolvieron correctamente las multiplicaciones del número de guisados por el número de postres. En P^3, los alumnos de 4° grado multiplicaron erróneamente cantidades de dos cifras al dar respuesta a las preguntas de la lección del libro de texto (SEP, 2011c, p. 31).

Recursos semióticos: En P^1, E_5 presentó cada uno de los tres dígitos en una tarjeta; los alumnos de 2° grado enlistaron en sus cuadernos y en el pizarrón las diferentes cantidades de tres cifras que iban identificando. Un alumno trazó flechas indicando las diferentes posiciones de los dígitos (véase la Figura 1). En P^2, E_5 pegó en el pizarrón y entregó a los alumnos figuras de postres y guisados. Un alumno de 3er grado mostró, a nivel de experiencia (Andrà, 2011), un diagrama de árbol que trazó para identificar los seis menús (véase la Figura 2) y orientó a una compañera para que trazara un diagrama triangular (véase la Figura 3).

Figura 2. Diagrama de árbol propuesto por un alumno de 3er grado.

Figura 3. Diagrama triangular por una alumna de 3er grado con orientación de su compañero.

E_5 no previó todas las estrategias de los alumnos (diagrama de árbol) para responder a la pregunta planteada; evidenció así su conocimiento deficiente de las diferentes estrategias de solución a problemas de técnicas de conteo. De acuerdo con Steinbring (1991), por medio del diagrama de árbol y de un diagrama triangular los alumnos de 3er grado reconstruyeron el significado del principio multiplicativo, construido en el aula. Además, el intercambio entre ellos relativo a esos recursos activó su zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 2009).

Los alumnos trazaron figuras y enlistaron (en el pizarrón) las seis posibilidades de los menús que pudieron formar. Para P^3, E_9 enseñó el principio multiplicativo por medio de material concreto (figuras en tarjetas), una tabla de doble entrada (véase la Figura 4) y con la multiplicación (signos aritméticos), en acuerdo con English (2005) en que los problemas combinatorios se prestan a una variedad de estrategias de solución.

Figura 4. Tabla de doble entrada propuesta por E_9.

Términos empleados: En P^1, E_5 solicitó "*diferentes* cantidades de tres cifras", sin aclarar que los dígitos no podían repetirse, como ya señalamos antes; un alumno de 2° grado repitió sólo un dígito cuando la investigadora le preguntó si los dígitos dados se podían *repetir*. En P^2, los alumnos de 3er grado identificaron el término *posibilidades*. En P^3, un alumno de 4° grado empleó el término *posibilidad* al construir las casas:

I: Entonces ¿éstas [señala las casas repetidas], ya no son posibles pegarlas?
A_2: No, ya no.
I: ¿Ya, no?
A_2: Se me acabaron las […]
I: Se acabaron las ¿qué?
A_2: Las posibili…¡ay, no!
I: Las posibilidades [A_1 dice posibilidades en coro con la Investigadora; A_2 se ríe].

En el planteamiento de P^2, E_5 confundió el término "menú" con el de "platillo", lo cual no revistió dificultad alguna para el desarrollo de la actividad.

Referente: Para $\boldsymbol{P^2}$, ni E_5 ni los alumnos de 3er grado presentaron dificultad para comprender como platillo la conjunción de un guisado y un postre. Durante la enseñanza en P^3, E_9 no definió como "casa" la conjunción de un cuadrado y un triángulo. El alumno A_{10} propuso otra forma de casa: "Pero si formas una casa diferente… así de tres cubos juntos como una pirámide… y los juntas así, sería más o menos una mansión".

Comentarios

Los docentes en formación limitaron la enseñanza del principio multiplicativo a identificar la operación aritmética y al llenado de tablas; en acuerdo con Hogarth (2001), esto lo imitaron los alumnos de 4° grado al responder los ejercicios de la lección "Combinaciones" de su libro de texto (SEP, 2011c, p. 31). Los practicantes no previeron todas las posibles respuestas que dieron los alumnos a las preguntas propuestas. Su formación en el principio multiplicativo obliga a considerar una variedad de referentes para tratar los casos con y sin orden, repetición, exclusión, distinguibilidad. También deben incluir la identificación de otras estrategias de solución a los problemas de técnicas de conteo, como el diagrama de árbol.

Fischbein (1975), Heitele (1975) e English (2005) afirman que la enseñanza de técnicas de conteo debe iniciarse en edades tempranas. Con los dos primeros autores señalamos la conveniencia de la enseñanza del trazo del diagrama de árbol y agregamos el uso del término *posibilidades*, dada la evidencia que

obtuvimos de alumnos de 3er y 4o grados de que comprendieron sus términos y estrategias para contestar las preguntas de conteo.

Los mentores de los normalistas deben retroalimentar a sus estudiantes acerca del principio multiplicativo y de su enseñanza, identificando los errores que cometieron los practicantes y las dificultades de los alumnos para responder a las tareas que los primeros les plantearon. Los mentores y los practicantes deben identificar las ventajas y desventajas de los recursos semióticos a utilizar según el objetivo perseguido y anticipar las posibles respuestas de los alumnos a las preguntas que se les planteen sobre técnicas de conteo. Es necesario que, juntos, mentores y normalistas analicen en el planteamiento de cada situación a proponer en las prácticas el rol de las palabras para orientar apropiadamente la actividad de los alumnos a los conceptos en foco y disipar posibles ambigüedades. Además, conviene solicitarles a los profesores en formación no sólo el planteamiento de problemas similares a los tratados en la clase, como lo sugiere English (2005), sino relativos a otras técnicas de conteo para que puedan identificar lo característico de cada una.

Referencias bibliográficas

Andrà, Ch. (2011). Preservice primary school teachers' intuitive use of representations in uncertain situations. *Proceedings of the 7th CERME* (Pytlak, M., Rowland, T., Swoboda, E., Eds.). University of Rzeszów, Poland, 715-724.

Batanero, C., Godino, J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1997). *Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils*. Educational Studies in Mathematics, 32, 181-199.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 88: 89-114.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). New York: Springer.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6(2), 187-205.

Hogarth, R. (2001). *Educar la intuición*. Barcelona: Paidós.

Martínez, A. M. y Ojeda, A. M. (2016). Estrategias que utilizan los docentes en formación para resolver problemas de conteo**.** En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., pp. 973-981.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent : A Privileged Proportion. *Review of Educational Research*. 65(4), pp. 421-481.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *The Origin of the Idea of Chance in Children.* New York: Norton & Company Inc. 1975.

SEP (2011a). *Planes y programas de estudio 2011*. Educación Básica. México.

SEP (2011b). *Matemáticas, tercer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011c). *Matemáticas, cuarto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2012). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2012.* México.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 503-522.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Vygotsky, L. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. España: Biblioteca de Bolsillo.

Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona: Paidós.

CONCEPCIONES DE PROFESORES CHILENOS SOBRE LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA

Adriana Breda[1], Maria José Seckel[2],Vicenç Font[3], Luis Roberto Pino-Fan[1]
Universidad de Los Lagos. (Chile[1]), Universidad Católica del Maule. (Chile[2]), Universitat de Barcelona. (España[3])
adriana.breda@ulagos.cl, mjseckel@ucm.com, luis.pino@ulagos.cl, vfont@ub.edu

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar las concepciones que tienen los profesores chilenos sobre la creatividad matemática. Para eso se realizó un cuestionario y una entrevista con 21 estudiantes de másteres académicos en Educación Matemática de dos universidades chilenas. El análisis cualitativo de los datos apunta que la mayoría de los profesores considera que: la creatividad matemática es algo innato, pero que se puede desarrollar; que el estudiante creativo es capaz de formular cuestiones e iniciar investigaciones y que el maestro creativo es aquél que tiene una actitud transgresora hacia la enseñanza tradicional de las matemáticas.

Palabras clave: Creatividad Matemática, Concepciones de Profesores, Formación Docente

Abstract

The objective of this work is to analyze the conceptions that Chilean teachers have on the mathematical creativity. A questionnaire and an interview were applied to twenty-one students of Mathematical Education master's degree courses of two Chilean universities. The data qualitative analysis indicates that most teachers consider that: mathematical creativity is something innate, but that it can be developed; that the creative student is able to formulate questions and to initiate investigations; and that the creative teacher is one who has a transgressive attitude towards the traditional teaching of mathematics.

Keywords: Mathematical Creativity, Conceptions of Teachers, Teacher Training

Introducción

El concepto de creatividad matemática y de pensamiento matemático creativo es un tema que ha interesado a muchas investigaciones y ha aportado distintas definiciones y suposiciones no excluyentes. Según describen Silver (1997) y Sriraman (2009), dos visiones sobre creatividad coexisten. La visión de la creatividad del "genio" que sugiere que la creatividad matemática difícilmente puede ser modificada con procesos formativos y que el trabajo creativo surge de momentos de inspiración puntual que pocos consiguen y, por otro lado, la creatividad que se asocia a largos procesos de estudio y de indagación que, a través de procesos de formación adecuados, puede llegarse a desarrollar.

Sriraman (2005) argumenta que, a pesar de la importancia que tiene fomentar la creatividad de los alumnos, desarrollarla no es una estrategia que acostumbren a adoptar los profesores. Por tanto, concluye, es necesario presentar la creatividad a los futuros profesores como parte de su preparación.
Para que los profesores incorporen la creatividad en sus prácticas consideramos necesario comprender lo que ellos entienden por creatividad matemática. En este sentido, el objetivo de esta investigación es analizar que concepciones tienen los profesores chilenos sobre la creatividad matemática.

Marco teórico

La creatividad matemática

La creatividad y, en particular, la creatividad matemática es un concepto complejo y polémico que ha sido considerado en muchas investigaciones y abordado desde muchos puntos de vista. Diversas caracterizaciones sobre que es la creatividad, la creatividad en matemáticas y el Pensamiento Matemático Creativo (PMC) han sido propuestas para describir estas nociones tan amplias, algunas de ellas centrándose más en los sujetos creativos, en el proceso creativo o en los productos resultantes (Haylock, 1987; Mann, 2006; Sriraman, 2009).

Entre otros trabajos destacados, encontramos Ervynck (1991) que describe la creatividad matemática a través de tres etapas: una etapa técnica conceptual preliminar, seguida de una actividad más algorítmica y, finalmente, una actividad creativa que consiste en la habilidad de resolver problemas y de tomar decisiones con estrategias no algorítmicas. Por su parte, Hadamard (1945) después de indagar en los procesos mentales que matemáticos y científicos seguían haciendo matemáticas, describe el proceso creativo utilizando el modelo Gestalt con sus cuatro fases: *preparación-incubación-iluminación-verificación*. Trabajos más recientes, como el de Liljedahl (2013), aceptan y extienden los trabajos de Hadamard (1945), añadiendo el fenómeno que denomina "*AHA! experience"* que, según el autor, es clave en el momento de la iluminación. A pesar de la descripción más o menos aceptada de las etapas en los procesos creativos en matemáticas, no deja de ser misterioso el cómo promover los mecanismos adecuados para que la vivencia y transición de estos distintos momentos puedan ocurrir.

Algunos investigadores distinguen entre la creatividad matemática en la comunidad matemática y la creatividad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar. Por ejemplo, Kaufman y Beghetto (2008) distinguen entre "big-C, middle-C o little-C" para centrarse en la comunidad de matemáticos como productores de conocimiento, en los alumnos en grupo o en los alumnos individualmente. En este trabajo, nos centraremos en la creatividad a nivel escolar (o middle-C), que Liljedahl (2013) y Sriraman (2005) sugieren caracterizar como:
La creatividad matemática a nivel escolar es: (1) el proceso que da como resultado soluciones inusuales (nuevas) y / o perspicaces a un problema dado o problema análogo, y / o (2) la formulación de nuevas preguntas.

Concepciones docentes

Para Ponte (1992; 1994), las concepciones pueden verse como un substrato conceptual que juega un papel importante en pensamiento y acción, proporcionando puntos de vista del mundo y a modo de

organizadores de conceptos. Otros investigadores, utilizan el término como un paraguas conceptual, caracterizándolo como: [...] una estructura mental general, abarcando creencias, los significados, conceptos, las proposiciones, reglas, las imágenes mentales, preferencias y gustos (Thompson, 1992, p. 130).
Otros investigadores estiman, que la concepción se entiende como un sistema organizado de creencias. En este sentido se sostiene que:

> Convicción (belief) (o creencia): opinión, conjunto de juicios/expectativas, aquello que se piensa de algo; - El conjunto de convicciones de alguien (A) sobre un determinado aspecto (T) forma la concepción (K) de A relativa a T; Si A pertenece al grupo social (S) y comparte con los demás miembros de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T. (D´Amore, 2004, p. 26).

Para finalizar, es posible observar concepciones como conjunto de posicionamientos que un profesor tiene sobre su práctica en relación con los temas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Contreras, 1998).
Aunque la literatura presente algunos rasgos a respecto de la conceptualización de lo que es la creatividad matemática, en particular, la creatividad matemática en el ámbito escolar, es importante comprender cuales son las concepciones de los profesores de matemáticas acerca de esta temática. Es en este sentido que tratamos de desarrollar esta investigación.

Metodología

Para cumplir con el objetivo general, se aplicó un cuestionario de preguntas abiertas y cerradas y una entrevista semi estructurada con 21 profesores estudiantes de Magíster en Educación Matemática de dos universidades chilenas, quienes se encontraban cursando el segundo año académico. Los datos fueron analizados por medio de un abordaje cualitativo-interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994; Alves-Mazotti, 1998), y tenían como enfoque comprender las concepciones de los profesores en diversos ámbitos: las características de la creatividad y el pensamiento creativo; los elementos que consideran importantes en un proceso de trabajo creativo; la creatividad en matemáticas; cómo es un maestro o profesor creativo; cuáles elementos consideran que tiene más o menos impacto al promover la creatividad matemática en sus aulas y, por último, si se consideraban creativos en el desarrollo de sus clases (entre otros aspectos).

Resultados

En el análisis de las preguntas cerradas del cuestionario se puede evidenciar el grado de adhesión por parte de los participantes frente a los enunciados presentados en cada ámbito de estudio (ver tabla 1).

Tabla 1 - Resultados obtenidos en las preguntas cerradas.

ÁMBITO 1: LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA Y LOS PROCESOS CREATIVOS	
¿Qué caracteriza la creatividad y el pensamiento creativo?	**Porcentaje de participantes a favor**
La creatividad es una cualidad que se puede desarrollar, educar, instruir, etc.	91%
La creatividad es una cualidad o capacidad innata	44%
El pensamiento creativo es una consecuencia de momentos puntuales de inspiración	57%
El pensamiento creativo está asociado a un proceso de estudio largo y profundo de una situación problemática	57%
¿Qué elementos son importantes en un proceso o trabajo creativo?	**Porcentaje de participantes a favor**
La interacción con otras personas y / o diferentes puntos de vista es importante para desarrollar un trabajo creativo	100 %
Para poder avanzar en un proceso creativo hay una formación rica y robusta en conocimientos específicos (en matemáticas, en arte, en tecnología, etc.)	69%
En un proceso creativo siempre aparecen contribuciones originales o novedosas	79%
El proceso creativo suele priorizar una forma de abordar el / los problema / s	88%
ÁMBITO 2: LA CREATIVIDAD EN TU ÁMBITO PROFESIONAL	
¿En tu trabajo, o ámbito profesional, te consideras creativo/a? 43%	
Las matemáticas están presentes en las actividades profesionales	91%
ÁMBITO 3: LA CREATIVIDAD EN LAS MATEMÁTICAS	
	Porcentaje de participantes a favor
La matemática es una disciplina que ayuda a promover la creatividad en otras ramas de conocimiento	92%
Las matemáticas requieren más creatividad que el arte o la arquitectura	56%
ÁMBITO 4: PROMOVER LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	
¿Cómo es un estudiante creativo?	**Porcentaje de participantes a favor**
Es capaz de formular cuestiones e iniciar investigaciones	96%
Tiene un fuerte conocimiento de conceptos y herramientas matemáticas	57%

Sabe encontrar diferentes maneras de representar los conceptos o de llegar a la solución de un problema	96%
¿Cómo es un maestro o profesor creativo?	**Porcentaje de participantes a favor**
Tiene una actitud transgresora hacia la enseñanza tradicional de las matemáticas	79%
Tiene un fuerte conocimiento de conceptos y herramientas matemáticas	73%
Tiene herramientas y recursos para estimular la creatividad en sus estudiantes	100%
Sabe cómo valorar y apoyar la creatividad en sus estudiantes	96%
¿Qué elementos consideras que tienen más impacto en promover la creatividad matemática en nuestras aulas?	**Porcentaje de participantes a favor**
La actitud del maestro o profesor	97%
El uso de nuevas tecnologías para la enseñanza	97%
El quiebre disciplinar (que las matemáticas entren en contacto con otras disciplinas)	92%
Un buen diseño de actividades matemáticas	100%
La/s actitud/es de/los estudiante/s	92%
El contacto docencia con investigación	91%

Fuente: Creación propia.

De manera general se puede observar que los participantes se muestran de acuerdo o muy de acuerdo con gran parte de los enunciados, pudiendo reconocer solo dos que no logran superar el 50% de participantes que adhieran a ellos. El primero corresponde al enunciado del ámbito 1: "La creatividad es una cualidad o capacidad innata", el que cuenta con un 44% de adherentes y con un 34% que declara estar ni en acuerdo ni en desacuerdo. Sin embargo, las concepciones respecto a la creatividad y el pensamiento creativo se profundizaron en el proceso de entrevistas, donde los participantes tuvieron la posibilidad de desarrollar su punto de vista a partir de la pregunta ¿Podemos suponer que la creatividad es una cualidad innata o, por el contrario, que se puede desarrollar/educar/enseñar/instruir, etc.? En las respuestas se pudo constatar que el 83% de los participantes considera que la creatividad es una cualidad innata y que esta se potencia a través de un proceso de enseñanza que intenciona su desarrollo. En cuanto al segundo enunciado, que corresponde al ámbito 2: "¿En tu trabajo, o ámbito profesional, te consideras creativo/a?" se observa que solo un 43% de los participantes se percibe como un profesional creativo, existiendo un 39% que declara estar ni en acuerdo ni en desacuerdo.

Por otra parte, el cuestionario contaba con dos enunciados en que la declaración de estar muy en desacuerdo o en desacuerdo permite aclarar la opinión que tienen los participantes respecto de la relación de la matemática con otras disciplinas. De esta manera, frente al enunciado "La interacción entre diferentes disciplinas no es relevante para generar creatividad", el 91% de los participantes se manifestó en contra y, frente al enunciado "Las matemáticas requieren menos creatividad que la ingeniería" el 60%

de los participantes de manifestó en contra. La percepción que manifiestan los participantes frente a estos enunciados se confirma a través de las entrevistas, puesto que declaran que la interdisciplinariedad es una característica de una actividad matemática que promueve la creatividad y, por otra parte, que se observa que un 40% de los participantes considera que no existe a priori un área o disciplina que requiera más creatividad que otra, mientras que el 60% restante considera que las disciplinas artísticas (30%) y científicas (30%) requieren más creatividad.

Ahora bien, en el análisis de las peguntas abiertas se pudo levantar categorías a partir de las respuestas dadas a las siguientes preguntas:
¿Dónde y cuándo se refleja la creatividad en tu ámbito profesional?
Las respuestas coinciden en que la planificación es un recurso que permite observar la creatividad profesional, la que se refleja en: 1) la elección de la estrategia de enseñanza, 2) diseño de tareas, 3) contextualización matemática, 4) atención a diversidad, 5) diseño de material didáctico, 6) Diseño de la evaluación, 7) tratamiento de la contingencia.
¿Cuál/es característica/s consideras que debe tener una actividad matemática que promueva la creatividad? Indica brevemente tres de estas características.
Los participantes le atribuyen las siguientes características a una actividad matemática que promueve la creatividad: 1) se promueve la interdisciplinariedad, 2) se consideran enunciados abiertos y/o desafiantes, 2) la matemática es contextualizada, 3) las tareas despiertan el interés de los alumnos y promueven la interacción entre ellos, 4)
¿Podrías dar algún ejemplo de este tipo de actividad (que ayudaría a promover la creatividad matemática)?

Frente a esta pregunta la mayoría de los participantes entregan ejemplos que se enmarcan en el eje de geometría. A continuación, se presentan los ejemplos de dos participantes (P1 y P2):
P1: "*En una actividad donde se enseñe Geometría, se fomentaría la creatividad si los alumnos realizaran por ejemplo construcciones geométricas y que ellos descubrieran propiedades respecto a ellas*".
P2: *"Trabajar la semejanza relacionada con el arte, música, historia, física, etc. A través de maquetas, origen de semejanza, etc."*

Consideraciones finales

Con el objetivo de analizar qué concepciones tienen los profesores chilenos sobre la creatividad matemática, se concluye aspectos importantes en los cuatro ámbitos anteriormente señalados:

En el ámbito 1: *creatividad matemática y procesos creativos*, se destaca que la mayoría de los profesores considera que: la creatividad matemática es algo innato, pero que se puede desarrollar. Asimismo, el 100% de los participantes consideran que la interacción con otras personas y/o diferentes puntos de vista es importante para desarrollar un trabajo creativo.

En el ámbito 2: *la creatividad en tu ámbito profesional*, se puede evidenciar que solo un 43% se considera creativo.

En el ámbito 3: *la creatividad en las matemáticas*, se observa que la mayoría de los participantes considera que la matemática ayuda a promover la creatividad en otras ramas de conocimiento.

En el ámbito 4: *Promover la creatividad en la enseñanza y aprendizaje de la matemática*, la mayoría de los profesores declara que un estudiante creativo formula cuestiones e inicia investigaciones y, además, sabe encontrar diferentes maneras para representar los conceptos o para llegar a la solución de un problema. En relación al profesor creativo, la mayoría manifiesta que este tiene una actitud transgresora la enseñanza tradicional de las matemáticas. Asimismo, el 100% declara que el profesor debe contar con herramientas y recursos para estimular la creatividad.

En relación a los elementos que tienen impacto a la hora de promover la creatividad matemática se destacan: a) Actitud del profesor, b) uso de nuevas tecnologías, c) quiebre disciplinar, d) buen diseño de actividades (100%), e) actitud de los estudiantes, f) contacto con la docencia e la investigación.
Finalmente, una vez indagadas las concepciones de profesores chilenos sobre la creatividad matemática, se valoran las propuestas de los diversos autores presentados en el marco teórico de este reporte, como fuentes, experiencias y/o herramientas que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje a través del diseño de tareas que promuevan la creatividad matemática a nivel escolar (o middle-C) (Liljedahl y Sriraman, 2006).

Referencias

Aves-Mazotti, A. J. O método nas Ciências Sociais. (1998). In: Gewandsnajder, F. *O método nas Ciências Sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira, p. 145-152.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora.

Contreras, L. C. (1998). *Resolución de problemas: Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis doctoral, Universidad de Huelva.

D'Amore, B. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemáticas dela escuela secundaria superior. *Epsilon*, 58, 25-43.

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In A. M. Thinking, & D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Springer Netherlands.

Hadamard J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 59-71.

Kaufman, J. C. & Beghetto, R. A. (2008). Exploring "mini-c:" Creativity across cultures. In R. L. DeHaan & K. M. Narayan (Eds.), *Education for Innovation in India, China and America*. The Netherlands: Sense Publishers

Liljedahl, P. y Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. For the learning of Mathematics, 26(1), 20-23.

Liljedahl, P. (2013). Illumination: An Affective Experience? *The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 253-265.

Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30, 236–230.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In J. P. Ponte (Ed.), Educação matemática: *Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de InovaçãoEducacional.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte y J.F. Matos (eds.), *Proceedings PME XVIII* (Vol. I, pp. 195-210). Lisboa, Portugal.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instructionrich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education*, 3, 75-80.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Prufrock Journal*, 17(1), 20-36.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM*, 41(1-2), 13-27.

Thompson, A. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En: Grouws, D. A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 127-146). New York: Macmillan.

FORMACIÓN VIRTUAL EN ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD PARA PROFESORES DE MATEMÁTICA EN EJERCICIO DE ARGENTINA

Liliana Mabel Tauber
Universidad Nacional del Litoral. (Argentina)
estadisticabiologiafhuc@gmail.com.ar

Resumen

Se describen las características de una propuesta de formación continua sobre Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística, destinada a profesores de Matemática en ejercicio en diversas instituciones, de gestión pública o privada, de Argentina. Se presenta la estructura general de la Especialización en Enseñanza de la Matemática en la que está inserta la propuesta de formación. A continuación, el diseño didáctico de la misma, detallando: conceptos, actividades y, asistentes didácticos y tecnológicos que se utilizan. Por último, analizamos algunas de las potencialidades y limitaciones de la propuesta.

Palabras Clave: educación estadística, formación de profesores, proyectos

Abstract

The paper describes some characteristics of a proposal of continuing education on Probability and Statistics teaching intended for in-service mathematics teachers from different institutions of public and private management in Argentine. It shows the general structure of the Specialization in Mathematics Teaching, which includes the training proposal. Then, we describe its didactic design in details: concepts, activities and the didactic and technological tools that are used. Finally, we analyze the strengths and restrictions of the proposal.

Key Words: teaching statistics, teacher training, projects

Introducción

La enseñanza de Probabilidad y Estadística ha sufrido con el tiempo diversas transformaciones, las cuales se ponen de manifiesto, especialmente en los planes de estudio de las carreras de Nivel Superior, en las que en su gran mayoría, se brinda al menos un curso de Estadística. De una manera contradictoria, estos avances no han quedado plasmados satisfactoriamente en las reformas educativas del nivel Secundario, especialmente en los países de Latinoamérica, en los que aunque se plantean contenidos estocásticos dentro de los diseños curriculares de Matemática, el enfoque que se da a los mismos es de corte puramente algorítmico y totalmente atomizado, dejando de lado el principal objeto de estudio de la Estadística, que es la variabilidad y la aleatoriedad (NAP, 2006).

Esta problemática ha sido detectada en investigaciones previas (Batanero, 2013; Boncompagni y Tauber, 2009; Tauber, Cravero y Redondo, 2013; Tauber, 2014, Pinto, Tauber, Zapata-Cardona, Albert, Ruiz y Mafozoki, 2017) en las que se exponen diversas dificultades en la formación estadística de los profesores, en la comprensión de éstos respecto de las Ideas Fundamentales de la Estadística, así como también en las propuestas que se realizan en los libros de texto que se utilizan en la Escuela Secundaria (Pomilio, Miño, Brignone y Pérez, 2016).

Teniendo en consideración los resultados de éstos y otros trabajos, hemos diseñado un módulo sobre Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (que designaremos como EPE) dirigido a profesores en ejercicio en el Nivel Secundario, cuyo marco de referencia y características describiremos en las siguientes secciones.

Programa de Formación en el que se inserta el Módulo EPE

El Módulo EPE se inserta en el plan de estudios de la Especialización Docente de Nivel Superior en la Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria, la duración de dicha Especialización es de dos años, mientras que el módulo dura dos meses. Todos los módulos de la Especialización se ofrecen de manera virtual y gratuita, a través de la plataforma del Programa Nacional de Formación Docente "*Nuestra Escuela*", coordinado desde el Instituto Nacional de Formación Docente (INFD) y el Ministerio de Educación de la Nación (Argentina) (http://nuestraescuela.educacion.gov.ar/postitulos/).

Los destinatarios de esta Especialización son profesores de Matemática que se desempeñan en el Nivel Secundario o como formadores en Profesorados de Matemática.
La Especialización consta de 10 módulos, cada uno de ellos tiene una duración bimestral aunque la extensión, en horas, varía en función de los contenidos que se desarrollan. Los mismos son propuestas didácticas diseñadas especialmente para el ámbito virtual cuyo material de referencia ha sido escrito específicamente para esta Carrera.

En cada módulo, el equipo de trabajo está compuesto por un Responsable de Contenido, un Coordinador y un equipo de Tutores. Estos últimos son los mediadores docentes entre la propuesta del módulo y el grupo de cursantes a su cargo, mientras que el Coordinador se encarga de acompañar a los Tutores en todas las actividades inherentes al manejo y puesta a punto del aula virtual y el Responsable de Contenido, se encarga de revisar el material escrito, las actividades planificadas y de resolver las dudas que presentan los tutores en lo referente al contenido, así como de elaborar propuestas de formación continua en el área de competencia de cada módulo destinadas a los Tutores y al Coordinador.

Particularmente, el Módulo EPE tiene una duración de 46 horas distribuidas a lo largo de dos meses, en los que se incluyen seis clases (cada clase se expone y debate virtualmente durante una semana), quedando dos semanas para la elaboración del Trabajo Final que consiste en la elaboración y análisis didáctico de un proyecto estadístico para poner en práctica en el aula de algún curso del Nivel Secundario.

Cabe aclarar que esta experiencia se realiza desde 2015 y continuará hasta 2018 inclusive. El dictado del Módulo se repite cada bimestre y en cada periodo es cursado por un número variable de cursantes, aunque

podemos indicar que en los dos primeros años, han cursado en cada bimestre, entre 300 y 500 profesores residentes en distintos lugares del país.

Fundamentos teóricos en los que se basa el Módulo EPE

El Módulo de Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (EPE) se centra en el desarrollo de las *Ideas Estocásticas Fundamentales* (Goetz, 2008) a través del trabajo por proyectos buscando promover el *Sentido y la Cultura Estadística* (Batanero, 2013).
Cuando hablamos de *Sentido Estadístico*, nos referimos a establecer relaciones entre los elementos de la *Alfabetización, el Razonamiento y el Pensamiento estadístico* (Gal, 2004), desde la comprensión profunda de las *Ideas Estocásticas Fundamentales* (Batanero y Díaz, 2011).

En este sentido, adoptamos la concepción de *ideas fundamentales* creada por Bruner (1960), quien indica que, en Educación (de una determinada disciplina) se deberían seguir las líneas principales que ofrece la Ciencia relacionada. En coincidencia con lo que plantea Goetz (2008), una tesis básica de esta concepción radica en que es posible enseñar los principios básicos de una disciplina, independientemente de la edad y del origen social de los destinatarios. Al adoptar este enfoque no sólo nos referimos al contenido de la Educación Estocástica sino también a la actitud que es característica, por ejemplo, para "*hacer Estadística*". Es decir, cuando se "*hace Estadística*", la actitud principal que deberíamos tener o fomentar (tanto en profesores como en alumnos) es la actitud crítica y la de hacernos preguntas, como por ejemplo: los datos que nos presenta el periódico, ¿son confiables?, ¿quién los obtuvo?, ¿en qué circunstancias?

Dado que consideramos que este tipo de actitud en Estadística es más importante que cualquier concepto o contenido, lo hemos tomado como una de las premisas que sirvieron de ejes organizadores para la propuesta realizada en el Módulo EPE. Es así que la organización no se centró en conceptos específicos sino que, tanto el desarrollo de las clases como las propuestas de actividades y de evaluación continua, estuvieron centradas en las Ideas Estocásticas Fundamentales (particularmente en: variación, aleatoriedad, distribución, resúmenes y probabilidad) y en la generación de distintos tipos de *razonamientos estocásticos* (Wild, Pfannkuch y Regan, 2011) centrados en la postura crítica que hemos mencionado antes.

En este sentido, la propuesta didáctica que desarrollamos a lo largo de cada clase y del material escrito específicamente para éstas (Instituto Nacional de Formación Docente y Tauber, 2015), se centra en distintos bloques que agrupa Ideas Estocásticas Fundamentales, considerando diversas dimensiones o componentes del *Razonamiento Estadístico* identificadas por Gal, 2004; Ben-Zvi y Garfield, 2004, Wild, Pfannkuch y Regan, 2011, entre otros, los cuales describiremos brevemente a continuación:

a. *Para razonar estadísticamente necesitamos los datos*. Como indica Moore (1992), el objeto de la Estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos. Los datos no son números, sino números en un contexto. Tener en cuenta esto implicará que, a la hora de sacar conclusiones sobre un problema o una pregunta, no podemos hacerlo desde la experiencia personal o desde lo anecdótico sino que necesitamos basarnos en la evidencia, la cual estará disponible sólo si tenemos datos que respalden nuestras conclusiones. Además, como plantea Escudero (2014), esos datos deberán tener cierto grado de confiabilidad. Por lo tanto, hemos planteado actividades asociadas a este tipo de razonamiento en

las que los cursantes deben producir sus propios datos a través de mecanismos aleatorios utilizando simulaciones on-line, teniendo que plantear previamente algunas preguntas de investigación que pudieran responderse a partir de la obtención de esos datos, para luego analizar el alcance de los mismos.

b. *Para comprender la evidencia que proporcionan los datos necesitamos explorarlos y resumirlos*. Wild y Pfannkuch (1999) han resumido la afirmación anterior con el término *Transnumeración*, que indica la comprensión que surge cuando se cambia de un tipo de representación a otra de los datos (por ejemplo, de una tabla a un gráfico o a la inversa). Indican además que, al contemplar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de *Transnumeración*:
   i. al pasar de los datos brutos a una representación (tabular o gráfica) que permita extraer sentido de los mismos a través de la exploración y de la búsqueda de ajuste de modelos;
   ii. a partir de las medidas que "capturan" las cualidades o características principales del mundo real,
   iii. al comunicar el significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros.

   Las distintas actividades planteadas a lo largo de las clases del Módulo EPE, promueven la utilización de distintos tipos de resúmenes y buscan problematizar sobre la adecuación de los mismos a las preguntas planteadas y al tipo de datos recolectados.

c. *Para comprender la evidencia basada en los datos necesitamos identificar la variación observada y determinar su origen*. La recolección de datos que cumpla este requisito y las conclusiones o conjeturas que se deriven de ellos, requieren de ciertos modos de comprensión de la variación que siempre existe en la realidad y que se transmite a los datos que representan esa realidad. Siguiendo a Batanero y Díaz (2011), la Estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones y causas de la variación y aprender del contexto. Por lo tanto, debemos promover formas de razonar que permitan determinar cuáles pueden ser las fuentes de variación (por ejemplo: variación en el muestreo, variación debida a factores, variación aleatoria, etc.), así como de la incertidumbre originada por la variación cuyas fuentes no quedan explicadas. Esto último genera razonamientos estocásticos más avanzados; por lo tanto, en la enseñanza, deberíamos comenzar generando razonamientos basados en la variación aleatoria o en el muestreo. En este sentido, los cursantes del Módulo EPE han tenido que planificar situaciones didácticas que permitan generar este tipo de razonamiento y las preguntas asociadas. Estas planificaciones, en ocasiones han sido realizadas de manera grupal y en la evaluación final, la deben realizar de manera individual.

d. *Para comprender la realidad representada por nuestros datos necesitamos razonar a partir de modelos estocásticos*. La Estadística es esencialmente un proceso de modelización atravesado por la presencia de la aleatoriedad. En consecuencia, para razonar sobre los datos estadísticos y para poder encontrar tendencias, debemos analizar si nuestros datos se ajustan o aproximan a algún modelo probabilístico. En este sentido, el razonamiento basado en modelos probabilísticos, hace necesario conocer los supuestos teóricos en los que se basan dichos modelos. Otra necesidad que se hace imperiosa, es buscar formas para que el sujeto pueda diferenciar entre modelo y realidad. La utilización de simulaciones virtuales y también, de distintos software estadísticos, permitió que los cursantes del Módulo pudieran vivenciar situaciones en los que debían modelizar y además, analizar las virtudes y dificultades que pueden plantearse en el aula cuando proponemos este tipo de situaciones.

e. *Para comprender la evidencia que brindan nuestros datos necesitamos integrar los conceptos estadísticos y el contexto del cual los obtuvimos*. Los datos en un contexto son la razón de ser de la Estadística. En consecuencia, lograr la integración coherente entre los conceptos estocásticos y el contexto es un componente esencial del razonamiento estadístico. A lo largo de la propuesta, se ha trabajado con diversas bases de datos reales, analizando las definiciones metodológicas de las variables incluidas y debatiendo sobre las complejidades que se presentan cuando debemos definir variables para obtener datos que nos permitan responder las preguntas planteadas. De esta manera se pone en evidencia la complejidad de la construcción de los datos estadísticos y la importancia de considerar tanto el contexto como las preguntas sobre las que se pretende dar respuestas a través de los datos.

Es así que, semanalmente se plantean actividades que buscan evaluar el proceso de los cursantes a partir del estudio colaborativo entre pares, del análisis y la elaboración de prácticas que integren de manera reflexiva las Ideas Estocásticas Fundamentales en el aula de matemática del Nivel Secundario, teniendo siempre como objetivo central formar alumnos *estadísticamente cultos* (Batanero y Díaz, 2011) y buscando integrar las nuevas tecnologías disponibles. En todas estas actividades, se propone utilizar algún asistente tecnológico, los cuales resumimos en la Tabla 1.

Propósitos y Alcances del Módulo EPE

Los propósitos de EPE se centran en facilitar un recorrido de reflexión pedagógica y de producción crítica para que los cursantes accedan a conceptos teóricos del campo de la Educación Estocástica y puedan ponerlos en práctica a la hora de analizar, planificar y evaluar su dinámica y su impacto en los procesos de enseñanza. En este sentido, las clases propuestas buscan profundizar en las Ideas Estocásticas Fundamentales (Goetz, 2008) a través del análisis crítico de artículos y de vídeos (Escudero, 2014 y Rosling, 2012, entre otros) centrados en esta temática, presentando además ejemplos de propuestas didácticas que se desarrollan alrededor de tales ideas.

Asimismo, las actividades de las tres primeras semanas, pretenden enfatizar en la construcción de preguntas de investigación que permitan generar proyectos estadísticos para trabajar con los alumnos de Nivel Secundario, en los que se puedan integrar diversas herramientas tecnológicas, como por ejemplo: simuladores o applets específicos para la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (Tauber y Cravero, 2012; Tauber, Bianchi y Cravero, 2014), software libre como Gapminder (www.gapminder.org) y análisis de datos basados en variables disponibles en línea (Gapminder, ONU, Banco Mundial, IPEC), entre otros.

Clase/Temática	IEF/Conceptos	Tipo de actividad	Asistentes didácticos	Herramientas Informáticas
1: Contextualización de la EE y de sus conceptos claves	Alfabetización, Razonamiento y Pensamiento Estadístico Concepciones	Individual y Grupal	Videos	Foro de Discusión
2: IEF (Parte I)	Datos y modelos	Grupal	Texto + Gapminder	Foro de discusión +

				Pizarra Electrónica
3: IEF (Parte II)	Distribuciones Probabilidad Aleatoriedad Variación	Grupal	Applets en línea	Foro de discusión + Documento compartido Drive
4: Tratamiento de las IEF en el aula de Matemática	IEF en los diseños curriculares	Individual	Bases de datos en línea Applets	
5: La enseñanza de Probabilidad y Estadística a través de proyectos	Elaboración de Proyectos estadísticos	Individual	Applets en línea	Foro de consulta
6: Recursos para la enseñanza de Probabilidad y Estadística	Bases de datos y ejemplos de proyectos ejecutados			Foro de consulta

Tabla 1: Secuenciación de actividades por clase en el Módulo EPE

Temáticas de las clases y actividades que se proponen en el Módulo EPE

En la Tabla 1, resumimos las temáticas y las Ideas Estocásticas Fundamentales (que designamos con IEF) que se plantean en cada clase, el tipo de actividad, considerando que puede ser individual o grupal, los asistentes didácticos que se utilizan para el desarrollo de la clase o para la resolución de la actividad y las herramientas informáticas que sirven de apoyo para la elaboración de la actividad en el aula virtual.

Tanto las problemáticas desarrolladas en cada clase como las actividades planteadas giran alrededor de un bloque de IEF, los cuales han sido divididos en tres: datos y modelos, distribuciones y probabilidad, aleatoriedad y variación. Las actividades promueven la reflexión de los docentes acerca del tratamiento de tales ideas en el aula, a través de la resolución de proyectos, en los cuales puedan integrarse los distintos tipos de razonamientos que hemos descrito antes. Estas actividades son de resolución grupal y promueven el trabajo colaborativo, incluyendo una actividad inicial que profundiza en las preconcepciones de los docentes en relación con la enseñanza de la disciplina. Como evaluación de la experiencia, cada cursante, debe elaborar un trabajo final individual en el que pueda integrar los bloques de IEF a través de la elaboración de un proyecto para ser implementado en el aula de un curso de nivel Secundario de su propia elección.

Reflexiones Finales

Luego de dos años de trabajo y diez ediciones del Módulo EPE, hemos podido ofrecer formación continua en el área a unos 4000 docentes de matemática de todo el país. La mayoría de ellos ha indicado que su formación estadística era escasa o nula (un 80%) y que esta propuesta les ha permitido ampliar su conocimiento en el área, así como también han podido expresar sus temores respecto de encarar la

enseñanza de Probabilidad y Estadística. Por otra parte, hubo muchos de ellos que se han animado a implementar los proyectos elaborados a lo largo del módulo.

Consideramos que esta experiencia ha permitido a los docentes conocer muchos contenidos estocásticos que no habían aprendido en sus experiencias de formación previas, pero aun así pensamos que no es suficiente para lograr fomentar el pensamiento estadístico en profesores que deberían promover la *Cultura Estadística* de sus alumnos.
Es por ello que, en futuros trabajos, prevemos realizar un análisis de contenido de una muestra de actividades elaboradas por los cursantes con el fin de detectar problemáticas específicas asociadas a las distintas IEF en las que deberíamos profundizar en la formación.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: componentes y desarrollo. En: *Probabilidad Condicionada. Revista de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, Nº 1, Vol. 1.*

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con Proyectos*. Facultad de Ciencias. Universidad de Granada.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: goals, definitions and challenges. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, pp. 3-15.

Boncompani, L. y Tauber, L. (2009). Lectura e interpretación de resúmenes estadísticos en futuros profesores de matemática. En: *Actas del XXXVII Coloquio Argentina de Estadística*. Sociedad Argentina de Estadística. Catamarca.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Escudero, W. (2014). *Qué es (y qué no es) la Estadística. Usos y abusos de una disciplina clave en la vida de los países y las personas*. 1ª edición. Colección Ciencia que ladra. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores Argentina.

Gal, I. (2004) Statistical Literacy. Meanings, Components, Responsibilities. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47–78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Goetz, S. (2008). Fundamental ideas and basic beliefs in Stochastics. Theoretical Aspects and Empirical Impressions from the Education of Student Teachers. Recuperado el 10 de noviembre de 2014 de: http://fplfachdidaktik.univie.ac.at/fileadmin/contributiongoetzrevised.pdf.

Instituto Nacional de Formación Docente y Tauber, L. (2015). Clase 2: Ideas estocásticas fundamentales en la enseñanza de probabilidad y estadística. Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística. Especialización docente de Nivel Superior en la Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación y Deportes de la Nación.

Ministerio de Educación de la Nación. Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Enero de 2006.

Moore, D. (1992). Teaching Statistics as a respectable subject. In F. & S Gordon (Eds.), Statistics for the twenty-first century. MAA notes, N 26, pp. 14-25. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Pinto, J.; Tauber, L.; Zapata-Cardona, L.; Albert, A.; Ruiz, B. y Mafozoki, J. (2017) Alfabetización Estadística en Educación Superior. En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30, 227-235.*

Pomilio, C.; Miño, M.; Brignone, N y Pérez, A. (2016). Análisis de actividades sobre estadística descriptiva en libros de educación media: ¿Qué se pretende que los estudiantes aprendan? En: *Educacao Matematica Pesquisa. Revista do programa de Estudios Pos-Graduados em Educacao Matemática*.

Rosling. H. (2012) Hans Rosling revela nuevas ideas sobre la pobreza. *Charla TED*. Recuperado el 30 de agosto de 2017 de: https://www.ted.com/talks/hans_rosling_reveals_new_insights_on_poverty/transcript?language=es#t-1028136

Tauber, L. (2014). Argumentos utilizados por profesores de matemática para explicar conceptos asociados a la idea de aleatoriedad. En: *Actas de IV Encuentro de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Análisis de Datos, Cartago, Costa Rica.*

Tauber, L.; Bianchi, M. y Cravero, M. (2014). Utilización de Applets para favorecer la construcción de ideas fundamentales de la inferencia estadística informal. En: *Memorias del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos*. Costa Rica.

Tauber, L.; Cravero, M. y Redondo, Y. (2013). Evaluación de errores de profesores de matemática en tareas de Alfabetización Estadística y de Razonamiento Estadístico. En: *Probabilidad Condicionada. Revista de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, Nº 1, Vol. 1.*

Tauber, L. y Cravero, M. (2012). Generación de las ideas fundamentales de la Alfabetización Estadística a través del trabajo con proyectos. *Serie B: Trabajos de Matemática, Nº 61, pp. 93-106. Córdoba: FAMAF. Universidad Nacional de Córdoba.*

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223-265.

Wild, C.; Pfannkuch, M. y Regan, M. (2011). Towards more accesible conceptions of statistical inference. In: *Journal Research of Statistical Society, 174, part 2, pp. 247-295*.

COMPETENCIA DE ANÁLISIS EPISTÉMICO DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD DE FUTUROS PROFESORES

María Burgos, Juan D. Godino, Belén Giacomone, Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Granada, Universidad de Zaragoza. (España)
mariaburgos@ugr.es, jgodino@ugr.es, belen.giacomone@gmail.com, pbeltran@unizar.es

Resumen

En el marco de una investigación de diseño, basada en el modelo ontosemiótico de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor, se presentan los resultados obtenidos sobre la evaluación de la competencia de análisis epistémico de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Se trata de una investigación cuyo objetivo es desarrollar la competencia de análisis de prácticas, objetos y procesos de interpretación, utilizando tareas que implican la noción de proporcionalidad. Los resultados revelan la complejidad que implica el logro de esta competencia, siendo, no obstante, un factor clave para que el profesor de matemáticas tome conciencia de los conflictos de aprendizaje y de los conocimientos que se deben gestionar en los procesos de institucionalización.

Palabras claves: proporcionalidad, formación de profesores, análisis epistémico, enfoque Ontosemiótico

Abstract

In the framework of a designed-based research, based on the onto-semiotic approach to mathematics teacher's knowledge and competences, the results obtained about the assessment of the epistemic analysis capabilities of high school prospective mathematics teachers are presented. The main goal is to develop the competence analysis of practices, objects and interpretation processes, by using tasks that involve the concept of proportionality. The results reveal the complexity for prospective mathematics teachers to attain this competence, which is, however, a key factor for the teacher to be aware on the students' learning conflicts and to build the knowledge needed in institutionalization procedures.

Keywords: Proportionality, teacher education, epistemic analysis, onto-semiotic approach

Introducción

Diversos autores interesados por la investigación en educación matemática se han centrado en el desarrollo de estrategias para promover la reflexión del profesor sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Husu, Toom y Patrikainen, 2008). Así mismo, se interesan por elaborar herramientas que permitan al profesor ser competente para realizar análisis detallados de los sistemas de prácticas matemáticas requeridos para la solución de tareas y situaciones-problemas (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2016; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016).

Por otro lado, el estudio de las razones, proporciones y la proporcionalidad es un campo ampliamente investigado en educación matemática (Obando, Vasco y Arboleda, 2014) siendo un tópico decisivo en el currículo escolar que se inicia en educación primaria (donde se introduce el uso de la regla de tres en situaciones cotidianas de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad) y continúa en secundaria; no obstante la literatura muestra pocas conexiones entre ellos en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Lundberg, 2011) como así también, deficiencias en la formación de profesores respecto a este tópico (Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent y Carrillo, 2015).

Como señala Wilhelmi (2017) en educación primaria (6-12 años), se recurre en muchas ocasiones a la construcción de tablas para organizar situaciones cotidianas de proporcionalidad, lo que permite resaltar la utilidad de determinar el valor que le corresponde a la unidad (reducción a la unidad). Sin embargo, esta introducción suele ser obviada en el desarrollo de la proporcionalidad en educación secundaria (12-16 años) que contempla casi exclusivamente un uso técnico de la regla de tres o una interpretación funcional a partir de la fórmula de la función lineal.

Diversas investigaciones en el área plantean que la proporcionalidad se puede abordar desde diferentes perspectivas o significados, vinculados a su multitud de contextos de aplicación (científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, etc.) (Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino, 2017; Flores, 2011). Esto conlleva la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas asociados. Es claro, por tanto, que, la formación de profesores debe tener en cuenta el desarrollo de conocimientos y competencias matemáticas y didácticas en relación a este tema, mediante intervenciones formativas específicas. En este sentido, la literatura pone de manifiesto que, tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad, centrando la atención en lograr en sus estudiantes una comprensión operacional y sacrificando el desarrollo de una comprensión conceptual (razonamiento proporcional) (Buforn, Fernández y Llinares, 2017; Lamon, 2007).

En este trabajo centramos la atención en evaluar el logro de la competencia de análisis de las prácticas matemáticas que se realizan al resolver problemas, y los objetos y procesos implicados en las mismas, en futuros profesores de secundaria, utilizando una tarea de proporcionalidad.

Marco teórico

Se describe parte de una experiencia formativa en la que analizamos los conocimientos matemáticos específicos de futuros profesores y el nivel de competencia de análisis de objetos y procesos matemáticos, relativos a una tarea de proporcionalidad. Nos hemos basado para ello en el modelo CCDM de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas propuesto por Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) y en las investigaciones realizadas sobre análisis epistémico y cognitivo de tareas matemáticas (Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco, 2016).

El modelo CCDM se apoya en el sistema de herramientas de análisis desarrolladas en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). Considera que el futuro profesor debe tener los conocimientos necesarios para reconocer, por un lado los diversos significados (entendidos como sistemas de prácticas) del contenido correspondiente y su interconexión, y por otro la diversidad de objetos y procesos implicados (configuración ontosemiótica)

para los diversos significados. Así pues, la competencia de análisis epistémico permite al profesor reconocer los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas institucionales necesarias para la resolución de las situaciones-problemas.

En el marco del EOS, los tipos de objetos que intervienen en las prácticas matemáticas se clasifican, según su naturaleza y función en las siguientes seis categorías:

- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones, como, recta, punto, número, media, función).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

El análisis de la actividad matemática con las herramientas del EOS consiste en el reconocimiento de los tipos de objetos que intervienen en las prácticas matemáticas realizadas en la resolución de problemas, así como de las relaciones que se establecen entre los mismos (procesos de interpretación). Cuando se analizan soluciones previstas desde un punto de vista institucional se describe como análisis epistémico, mientras que si las soluciones son producidas por estudiantes se trata de un análisis cognitivo. En este artículo se pide a los profesores en formación que analicen soluciones 'expertas' (o esperadas) producidas por ellos mismos como referencia del aprendizaje de sus alumnos, por lo que dichos estudiantes realizan un análisis epistémico. Por el contrario, el análisis realizado por los formadores a las soluciones dadas por los estudiantes se considera como un análisis cognitivo.

Método

La experiencia formativa se ha realizado en el marco de un máster de formación de profesores de secundaria (año lectivo 2016-2017), en España, dentro de la asignatura *Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas*. Han participado en el estudio 33 estudiantes. La recogida de información se basa en el análisis de contenido de las respuestas dadas por escrito a una situación-problema de proporcionalidad directa, en la que se solicita realizar el análisis de prácticas (operativas y discursivas), objetos y procesos de interpretación implicados en su resolución (Burgos y Godino, 2017). El problema es el siguiente,

Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

Las consignas dadas al futuro profesor sobre este problema fueron:

a) Resolver el problema usando varios métodos.
b) Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones. Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver y justificar la solución y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias:

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
...	...

El análisis de los datos está orientado a la identificación de respuestas significativas sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y evaluación de los progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.

Análisis de resultados

La mayoría de los futuros profesores, 29 de los 33, desarrollaron al menos dos soluciones distintas al problema (24 de ellos elaboraron 3 soluciones diferentes al mismo). Además, casi todos los estudiantes, 27 de 33, realizaron la descomposición en prácticas, como unidades de análisis elementales, de las distintas soluciones propuestas. De ellos, 12 la desarrollaron de forma totalmente correcta; 4 de forma parcial y 11 estudiantes únicamente detallan la intencionalidad de las prácticas.

Un 31,25% de las soluciones propuestas fueron desarrolladas por medio de la regla de tres, de forma habitualmente degenerada, es decir, sin mencionar la serie de números proporcionales implicada en la situación y la igualdad de razones correspondiente. Un 18,75% de los estudiantes elaboraron pertinentemente una solución tabular y finalmente un 14,6 % de las respuestas fueron de carácter funcional.

Los *conceptos* son los objetos que los estudiantes tienen menos dificultad en reconocer. Se identifican multiplicación, división, magnitud, medida, en las soluciones aritméticas propuestas; proporcionalidad, reducción a la unidad, incógnita, significado relacional de la igualdad, o ecuación, en las soluciones proto-algebraicas. Sin embargo, algunos estudiantes consideran *la regla de tres* o *despejar la incógnita en la regla de tres* como un concepto implicado, y no como un procedimiento.

El reconocimiento de las *proposiciones* resulta complicado para los estudiantes, pudiendo estar justificado por el variado perfil académico de los participantes: 19 de ellos no identifican ningún tipo de proposición y 5 incluyen como proposición alguna referida a la regla de tres (qué representa o cómo resolverla). Ejemplos prototípicos de estas respuestas, son: "*la regla de tres representa la relación lineal"; "para resolver una regla de 3 multiplico los números de la diagonal y divido entre el número restante*". Otro ejemplo de la dificultad de reconocimiento de las proposiciones se muestra en la Figura 1.

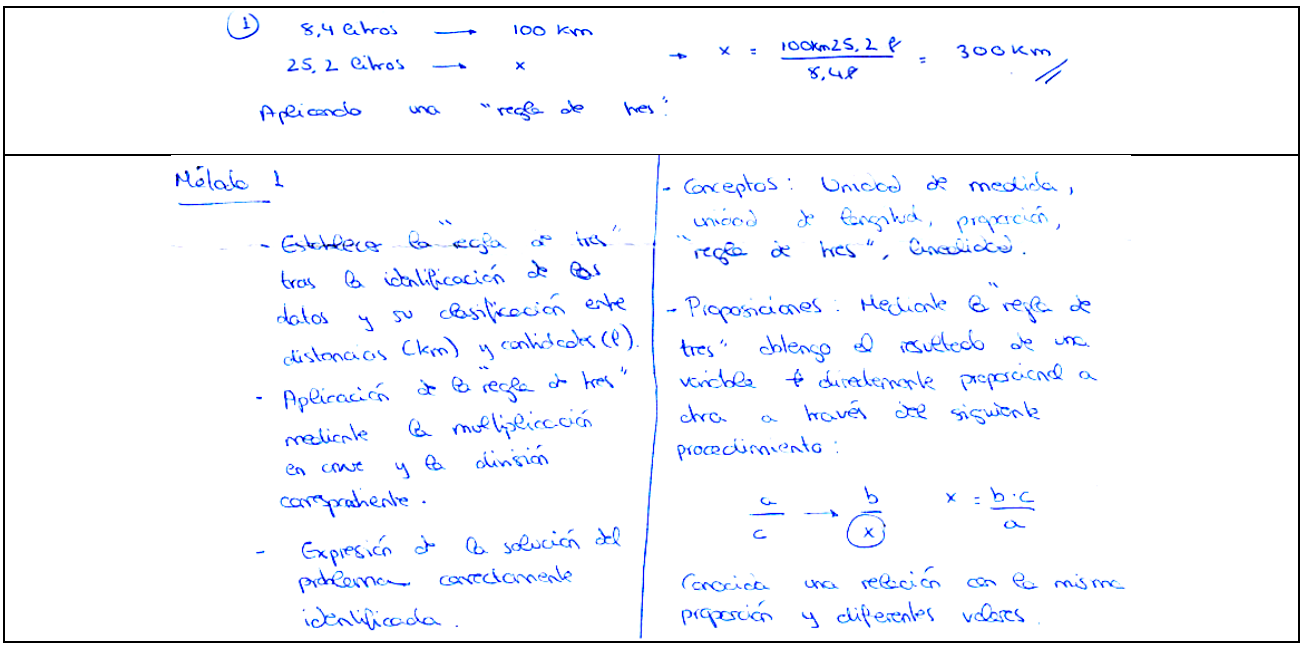


Figura 1. Detalle de solución y configuración ontosemiótica de regla de tres

Los demás estudiantes (salvo un alumno que reconoce en cada solución una única proposición, pero de forma pertinente) confunden proposiciones con argumentos o las describen de manera inadecuada.

Los *procedimientos* más identificados son los algorítmicos, mientras que tienen dificultades para reconocer otros tipos, o diferenciarlos de proposiciones y argumentos. Solo una alumna los describe apropiadamente, 19 alumnos no identifican ninguno y 3 alumnos los asimilan a las propias secuencias de prácticas, como una serie de instrucciones operativas o pautas a seguir (Figura 2).

Cuatro estudiantes solo reconocen como procedimientos aquellos que están vinculados de una forma u otra con la regla de tres. Finalmente, 2 estudiantes identifican como procedimientos los aritméticos.

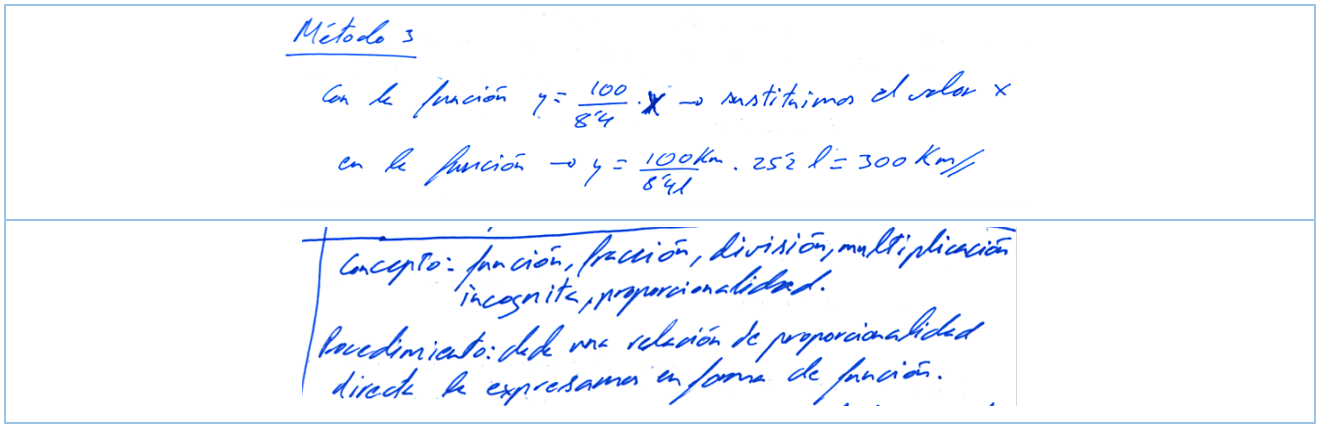


Figura 2. Detalle de solución funcional y objetos referidos

Se observan dificultades con los *argumentos*. En este sentido, 24 estudiantes no logran identificarlos y el resto confunde el mismo enunciado con los procedimientos o las proposiciones referidos (Figura 3).

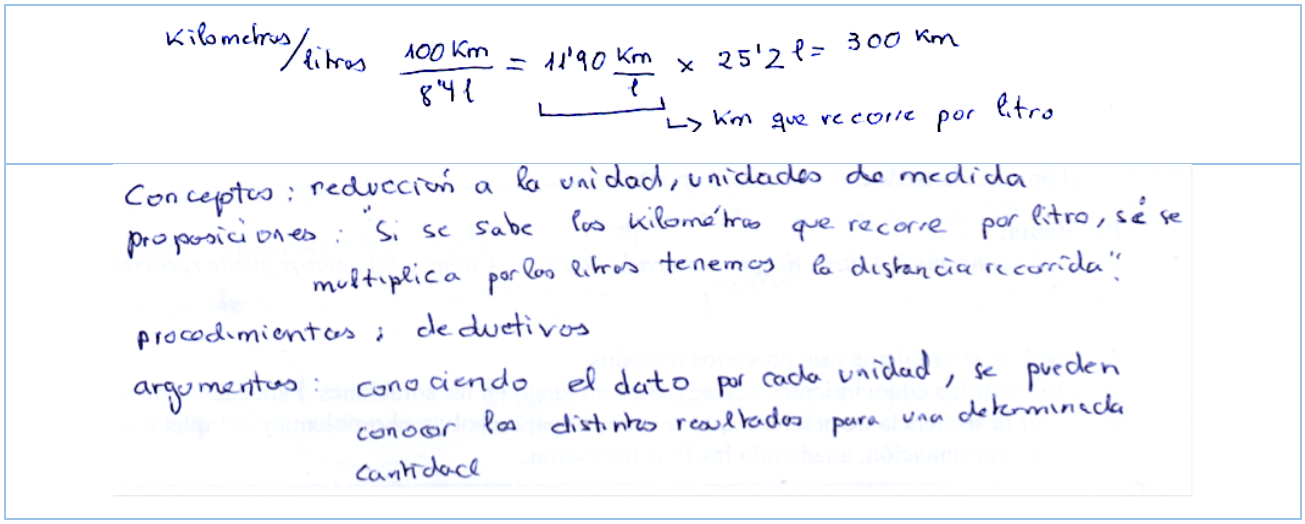


Figura 3. Detalle de solución por reducción a la unidad y objetos asociados

Estos resultados coinciden con los obtenidos por Giacomone et al. (2016), donde también se observa que la identificación de los conceptos matemáticos resulta menos compleja que el reconocimiento de otros objetos, como las proposiciones. También se ha podido constatar que el uso de la regla de tres se hace con un significado degenerado, ocultando el uso de la proporción; a menudo se considera la *regla de tres* como concepto, proposición, procedimiento o incluso argumento.

Reflexiones finales

El foco de atención de este artículo ha sido el diseño y la implementación de una acción formativa para desarrollar conocimientos y competencia para el análisis epistémico de futuros profesores de matemáticas, particularizado a una tarea de proporcionalidad. El análisis de las soluciones esperadas o expertas de las tareas se debe aplicar también a soluciones dadas por los estudiantes de secundaria (análisis cognitivo). La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas es una competencia que le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

Los resultados nos permiten considerar que este tipo de actividades son un reto para los profesores en formación, resultando conflictivas la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados. Este reconocimiento se considera, no obstante, como clave para que los profesores estén capacitados para la implementación de procesos de estudio de las matemáticas que promuevan la competencia matemática de los estudiantes.

En el marco del EOS, además de la competencia de análisis de los sistemas de prácticas, objetos y procesos implicados en la resolución de problemas, se proponen otros tres tipos de análisis claves en la formación de profesores de matemáticas: análisis de las interacciones en el aula, reconocimiento de las normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático y valoración de la idoneidad didáctica de experiencias de enseñanza y aprendizaje (Godino et al, 2017). Será necesario continuar con esta línea de investigación, en lo que respecta al diseño, implementación y evaluación de experiencias formativas, que permitan al futuro profesor iniciarse en el desarrollo de estas cuatro competencias.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad y EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

Referencias bibliográficas

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Conocimiento del razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 175-184). Zaragoza: SEIEM.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 185-194). Zaragoza: SEIEM.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2017). Niveles de algebrización en tareas de proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/posters/burgos.pdf

Flores, R. (2011). Los significados asociados a la nación de fracción en la escuela secundaria. En P. Lestón et al. (Eds.), *ALME* (Vol. 24, pp. 23-31). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 275-284). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2016). Perspectiva ontosemiótica de la visualización espacial y el razonamiento diagramático. En A. Engler, A. Castro et al. (Eds.), *ALME* (Vol. 29, pp. 541-548). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Husu, J., Toom, A. y Patrikainen, S. (2008). Guided reflection as a means to demonstrate and develop student teachers' reflective competencies. *Reflective Practice, 9*(1), 37-51.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). New York, NY: Information Age Pub Inc.

Lundberg, A. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 336-345). Rzeszów, Polonia: Universidad de Rzeszów.

Montes, M. A., Contreras, L. C., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 367, 36-62.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime, 17*(1), 59-81.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Relime, 19*(1), 71-98.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

UMA TRAJETÓRIA DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDO DE PERIODICIDADE

Sonner Arfux de Figueiredo, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS, Universidade Anhanguera de São Paulo-UNIAN. (Brasil)
sarfux@uems.br, nielce.lobo@gmail.com

Resumo

Neste artigo, investigamos em um experimento de ensino, como alunos de Licenciatura em Matemática constroem e consolidam o conceito de periodicidade. No estudo se desenhou uma investigação contemplando a caracterização do mecanismo cognitivo centrado na relação atividade-efeito em uma trajetória hipotética de aprendizagem (*Hypothetical Learning Trajectory*-HLT), segundo Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004). A metodologia foi o *Design Based Research* e os sujeitos foram dezesseis acadêmicos ingressantes no curso. Os resultados indicaram que interações dinâmicas na HLT favoreceram a construção do conhecimento em um processo de abstração reflexiva nas fases de participação e antecipação consolidando uma generalização necessária no processo de abstração reflexiva.

Palavras-chave: ciclo trigonométrico, processo de generalização, experimento de ensino, trajetória hipotética de aprendizagem

Abstract

In this article, we investigate, through a teaching experiment, how students of Mathematics degree course build and consolidate the concept of periodicity. In the study, an investigation was designed contemplating the characterization of the cognitive mechanism centered on the activity-effect relation in a hypothetical learning trajectory (HLT), according to Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004). A design- based research methodology was used with sixteen students entering the course. The results showed that dynamic interactions in HLT favored the construction of knowledge in a process of reflexive abstraction in the participation and anticipation phases, consolidating a necessary generalization in the process of reflexive abstraction.

Keywords: trigonometric cycle, generalization process, teaching experiment, hypothetical trajectory of learning

Introdução

A problemática aqui discutida surgiu no seio de uma pesquisa de doutoramento sobre uma metodologia para a formação inicial de professores de Matemática, e tem como sujeitos alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática numa instituição pública do interior do Estado de Mato Grosso do Sul, Brasil. Nosso trabalho se enquadra nas investigações que se preocupam em compreender como estes alunos constroem os significados em uma situação de aprendizagem com interações dinâmicas com o

Software GeoGebra em um estudo exploratório do conceito de periodicidade e, em particular, de modo a analisar como este ajuda a relacionar a compreensão do argumento de funções trigonométricas no ensino superior.

O conhecimento da gênese histórica dos conceitos matemáticos pode ser uma ferramenta de grande valia para levar o aluno à compreensão mais aprofundada desses conceitos e para o desenvolvimento da linguagem matemática. Em particular, o conceito de periodicidade em funções trigonométricas, tendo percorrido muitos séculos desde as suas primeiras noções intuitivas, só em 1710 aparece a primeira menção a esse conceito feita por Thomas-Fanten de Lagny (Lobo da Costa, 2003).

O ensino e a aprendizagem de trigonometria têm sido objeto de debate e investigação nas últimas décadas e constitui uma parte importante nos cursos de Licenciatura de Matemática, servindo como um dos conteúdos de transição da matemática da Educação Básica para o Ensino Superior. Assim, este é um dos conteúdos cujo estudo se inicia no Ensino Médio e retorna na pauta do curso de Licenciatura em Matemática, servindo como base de sustentação para as demais disciplinas do curso como, por exemplo, o Cálculo, a Física, a Geometria, a Geometria Analítica, entre outras. Com aplicação incontestável nas diversas áreas das ciências exatas, seu estudo deve atender a compreensão das ideias e conceitos básicos, sua aplicação na resolução de problema, na manipulação de algoritmos e a no estudo de Cálculo e em outras disciplinas.

Alguns estudos didáticos sobre o uso das tecnologias da informação na educação têm se apresentado de forma constante na literatura. Pesquisas assinalam as contribuições do uso desse recurso na aprendizagem de conceitos matemáticos evidenciando que o uso das tecnologias, possibilita ao aluno identificar representações equivalentes na definição de um mesmo conceito, além de favorecer a interação e o dinamismo.
Nosso trabalho se enquadra nas investigações que se preocupam em compreender como o acadêmico constrói os significados em uma situação de aprendizagem em uma Trajetória Hipotética de aprendizagem em um estudo exploratório dos conceitos de trigonometria no ciclo trigonométrico.

A investigação a que nos propusemos teve a finalidade de explorar a construção do significado do conceito de funções trigonométricas a partir de diferentes registros (compreensão). Neste aspecto, seguimos Duval (1998) para o qual a compreensão de um conceito requer a coordenação de diferentes registros de representação, pois somente com um registro não se explora toda a complexidade do conceito.

Marco Teórico

A perspectiva teórica adotada procede a uma particularização da ideia de abstração reflexiva elaborada a partir das ideias de Piaget (1977) sobre abstração reflexiva, utilizada por Simon e Tzur (2004). Estes autores apontam que as ações dos estudantes produzem diferentes efeitos que podem ser considerados por ele no desenvolvimento de seus processos de abstração.
O um enfoque proposto por Simon (1995) e por Simon e Tzur, (2004), a teoria sobre desenvolvimento profissional propõe um modelo de análise da prática do professor que permite, com posterioridade, incorporar resultados aos programas de formação de professores. Explicam os autores ainda que enquanto

os alunos concentram em suas atividades em relação à sua meta, criam registros mentais, a atividade de experiência é gravada e desenvolve uma interação da atividade ligada ao seu efeito.

Este mecanismo baseia-se na descrição de Piaget (1977), sobre dois aspectos: o da reflexão e da abstração. O primeiro aspecto é uma projeção, onde as ações em um nível tornam-se objetos (entrada) de ações na próxima. O segundo aspecto é um reflexo, onde uma reorganização entre ações ocorre. O autor faz uma distinção entre os dois tipos de reflexão realizados pelos estudantes em seus registros da experiência.

Tzur e Simon, desde a noção de abstração reflexiva de Piaget, assumem que os processos mentais dos estudantes são elementos constituintes da compreensão de um objeto que envolve duas fases: a fase participativa, onde o estudante desenvolve diferentes atividades guiadas por um objetivo de resolver uma tarefa matemática; a fase antecipatória, em que antes de uma determinada tarefa cuja resolução envolve o uso de um conceito matemático pelo aluno que deve considerar pertinente o uso do conceito matemático na resolução dessa tarefa. Neste caso, o aluno pode usar o conceito de forma adequada, independentemente do contexto ou da tarefa.

Mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito na HLT

O Mecanismo de reflexão sobre a atividade-efeito é uma trajetória hipotética de aprendizagem (HLT - *hypothetical learning trajectory*) proposta por Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004), elaborada a partir das ideias de Piaget sobre abstração reflexiva. Esse mecanismo identifica as fases de elaboração de um novo conceito - a participação no processo no qual o aluno abstrai uma regularidade na relação entre a atividade realizada e o efeito produzido enquanto antecipadamente se refere ao uso da regularidade abstraída em situações distintas da que levou a cabo da abstração.

Para alcançar seu objetivo, o estudante realiza uma determinada tarefa (atividade dirigida por um objetivo) proporcionando a possibilidade de prestar atenção nos efeitos da atividade realizada (efeito das atividades), neste processo de observação dos efeitos na atividade o estudante cria registros mentais (registro da relação atividade-efeitos). Assim para entender o desenvolvimento das estruturas mentais por parte dos estudantes, ou seja, estabelecer explicitamente as relações entre as características da HLT de estudantes e características de sequências de ensino (identificar os objetivos de aprendizagem, definir fluxos de trabalho e contribuir para uma avaliação detalhada dos entendimentos de matemática do estudante).
Para os autores as tarefas matemáticas proporcionam as ferramentas para promover a aprendizagem dos conceitos matemáticos específicos e, portanto, são elementos chave no processo de ensino. Dada a natureza hipotética inerentes ao processo, o professor se verá obrigado a modificar constantemente cada aspecto da HLT.

Ainda sobre as tarefas matemáticas, Simon e Tzur (2004) identificaram tipos de tarefas que podem propor aos alunos para que desenvolvam suas capacidades. Chamam de *tarefas iniciais* as que podem ser realizadas por estudantes que usam seu conhecimento prévio, já as tarefas que permitem que os alunos reflitam sobre ela própria relacionando-a para gerar abstração de regularidades na relação atividade-efeito, os autores denominam de *tarefas de reflexão* e caracterizam ainda as *tarefas de antecipação* realizadas

durante uma HLT às quais, para realização necessitam que o aluno tenha produzido uma abstração de regularidade na relação atividade-efeito.

As tarefas iniciais são usadas para a criação e o reconhecimento de certas experiências; as tarefas reflexivas são para direcionar a atenção dos alunos para a relação atividade-efeito e as tarefas de antecipação têm o intuito de levar os estudantes a identificar e analisar regularidades. Segundo Simon e Tzur (2004), as metas de aprendizagem que os alunos podem alcançar estão relacionadas com suas concepções correntes e com as tarefas que lhes são disponibilizadas. Assim sendo, para o professor, entra em cena o mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito quando consideramos sua necessidade de selecionar, entre as atividades disponíveis, tarefas que possam impulsionar o processo de aprendizagem dos alunos.

Participantes e desenho do experimento de ensino

No experimento de ensino elaboramos uma HLT para o estudo dos conceitos de funções trigonométricas e nele utilizamos tarefas matemáticas envolvendo recursos tecnológicos, na concepção de formação inicial de professores para uso da informática integrada à prática pedagógica.
A metodologia da pesquisa foi o *Design Based Research*, segundo Coob *et al* (2003) e os sujeitos de pesquisa foram dezesseis acadêmicos de uma turma ingressante na Universidade no curso de Licenciatura em Matemática. O experimento teve duração de 12 seções de 50 minutos divididos em quatro módulos, sendo que os módulos I e III foram com duas seções cada e os módulos II e IV com quatro sessões cada. As tarefas se articularam, com o uso da tecnologia e da exploração gráfica com o *software GeoGebra,* a partir dos conceitos de funções trigonométricas no ciclo trigonométrico; do conceito de periodicidade, da exploração e conjecturas para a validação entre o argumento de uma função trigonométrica e seu período. Cabe destacar que neste artigo trazemos a discussão em torno do consceito de periodicidade.

Discussão

As tarefas propostas se dividiram em quatro momentos distintos: (1) estudo da periodicidade com o uso de um vídeo e por meio da exploração de um *apllet* no *GeoGebra* o qual esboçava esse movimento periódico; (2) vivência de um bingo de funções trigonométricas contendo funções com diferentes períodos; (3) confecção de um esboço de roda gigante com materiais recicláveis e exploração de um *applet* no *GeoGebra* que simulava o movimento de uma roda gigante; (4) plotagem de gráfico de funções trigonométricas e investigação sobre a relação entre o argumento e o período. No primeiro momento ficou caracterizada a "fase de participação" do licenciando em Matemática.

Foi possível analisar a compreensão sobre o argumento de uma função trigonométrica. No primeiro momento, a tarefa foi movimentar o ponto P e observar a figura no *applet* P=A que começa a se movimentar sobre a circunferência no sentido anti-horário até completar a tabela e o gráfico como segue no *applet*, os alunos fazem inferências e conjecturas, generalizando as suas propriedades sejam elas algébricas ou geométricas.

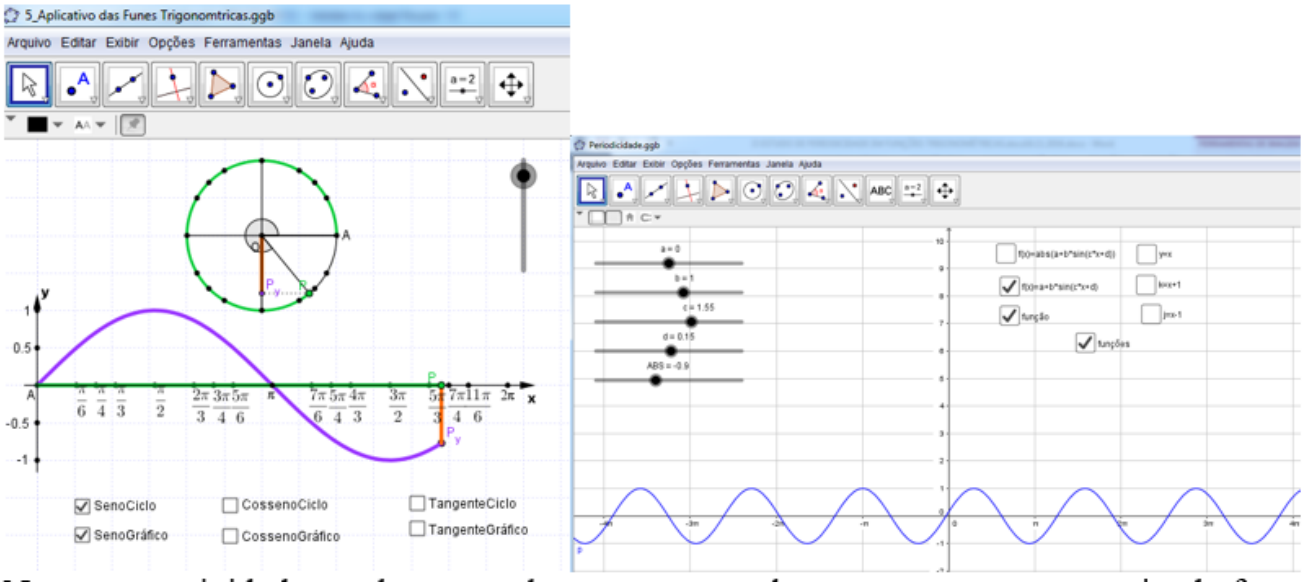


Figura 1: *Appl*et que caracterizou a fase de participação
Fonte: Figueiredo, 2015

Ainda caracterizando a fase participativa do aluno usamos um jogo de bingo trigonométrico. A atividade consistiu em utilizar cartelas com as funções trigonométricas e o professor projetava o gráfico da função em um Data Show; os licenciandos marcava m na cartela a expressão algébrica da função projetada (para isto foi determinado 1 minuto após exposição do gráfico para que o licenciando interpretasse a função). Cabe ressaltar a boa interação e interesse por parte dos licenciandos pela atividade e as anotações realizados com relação a esta atividade. O diálogo abaixo ilustra essa afirmação

> **Licenciando A:** *na aula passada vimos função trigonométrica no software, onde construímos as funções, nesta o professor inverteu, e escrevia no software e nós a função, no jogo de bingo, foi muito difícil porque não consigo interpretar rápido o domínio e a imagem e período da função. (grifo nosso)*
> **Licenciando C:** *o jogo foi outra maneira do professor fazer com que nós aprendêssemos funções, muito bom.*
> **Licenciando F:** *através do jogo combinamos os resultados do gráfico no software com a escrita, levou a gente a analisar como funciona a função seno, cosseno e tangente com o jogo e o software, muito bom.*

Nesta atividade nos permitiu levar o licenciando a analisar o comportamento da função trigonométrica a partir de uma visualização geométrica para uma analítica expressando a lei da função. Destacamos nestes dois momentos o processo de transição da "fase de participação" em um HLT para a "fase de antecipação" entre os módulos I e II do experimento sob a coordenação de diferentes registros (DUVAL, 1988).
A "fase de antecipação" se caracterizou quando utilizamos o bingo de funções trigonométricas, no qual o aluno plotou o gráfico de cada função utilizando o *GeoGebra* e explorou as características a partir do *software*; desta forma entendemos que o aluno foi consolidando os conceitos trigonométricos.

No módulo 3, foi proposta a confecção de um esboço de roda gigante com materiais recicláveis e a exploração de um *applet* no *GeoGebra* que simulava o movimento de uma roda gigante. Assim discutimos todo o conteúdo de trigonometria e dispusemos para esta etapa final de atividades com todos os materiais

utilizados durante as aulas para o ensino de trigonometria. Com isto, nosso objetivo foi fomentar as ações cognitivas necessárias para o sistema semiótico relacionando todos os tipos de representações, a fim de construir a concepção de períodos no estudo de funções trigonométricas.

Figura 2: Roda gigante confeccionado em papelão
Fonte: Figueiredo, 2015.

Para estabelecer se os alunos haviam respondido corretamente as tarefas da atividade sobre funções trigonométricas desde sua expressão gráfica até a algébrica, decidimos encontrar evidências na fase de antecipação. Assim, no modulo 4 a plotagem do gráfico de uma função trigonométrica e a investigação sobre a relação entre o argumento e o período da função nas respostas dos alunos, identificamos os conceitos, as ideias utilizadas e os argumentos propostos pelos alunos como sendo: do tipo gráfico, do tipo algébrico e de um tipo que combinava os dois anteriores que chamamos de solução harmônica.

O objetivo foi levar o licenciando a fazer uso do processo de antecipação a partir de dados sobre o comportamento de uma função trigonométrica para que ele pudesse generalizar a partir de uma abstração de regularidades na relação atividade-efeito.
Assim, os resultados mostraram que os alunos responderam majoritariamente usando o processo de construção cognitiva que se refere ao estágio participativo caracterizado por ações cognitivas como classificação dos registros mentais da atividade-efeito ou elementos que combinam estruturas mentais para atingir um determinado objetivo e a coordenação de informações por meio de uma comparação, ou argumentos para gerar uma nova estrutura.
Neste novo estado cognitivo, os alunos foram capazes de reconhecer a estrutura matemática na definição de funções trigonométricas (objeto, propriedade, relação, etc (figura 3)) como antecipação na situação, o que mostra certa semelhança com alguma situação de experiência anterior (estudos oriundos da Educação Básica e módulos iniciais), permitindo seu uso do estágio antecipatório. Por exemplo, na anotação do aluno sobre as propriedades das funções, antes de serem plotadas no *GeoGebra*, foram destacadas o conjunto imagem, informação não fornecida no enunciado, o qual está a seguir:

Enunciado: Considerando as observações realizadas no item 1 e a função $f(x)=sen\ x$, apresente a lei da função M sabendo que seu gráfico da função é uma curva que está deslocada verticalmente 3 unidades para cima em relação ao gráfico da função f e possui domínio $\Re$, amplitude 1 e período 2π.

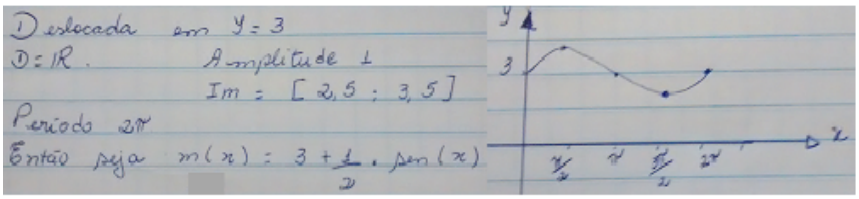


Figura 3: Resposta do aluno do enunciado da tarefa
Fonte: FIGUEIREDO, 2015.

Nos protocolos das telas de dois alunos, caracterizaram e evidenciaram a construção do significado do argumento de funções trigonométricas na THA; desconsideramos as respostas como parâmetro da função seno x, pois todos construíram no *GeoGebra* esta função; esta tentativa foi desconsiderada para análise. Na figura 4 observando a janela algébrica, percebemos as tentativas de acerto da tarefa de cada aluno.

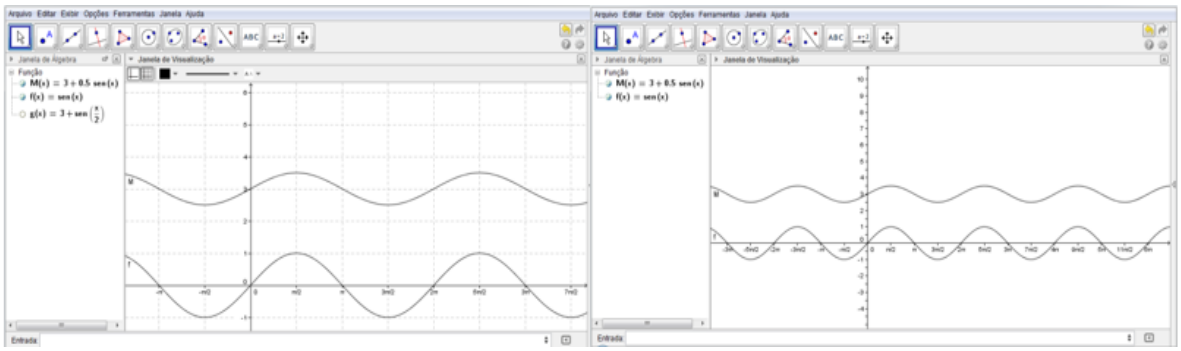


Figura 4: Duas respostas de alunos para obter a Função M
Fonte: FIGUEIREDO, 2015.

No terceiro momento os alunos confeccionaram um modelo de roda Gigante e investigaram o comportamento da função trigonométrica representada na simulação com o *applet*; neste sentido houve formulação de conjecturas, validação de respostas e desenvolvimento do significado de argumento de funções trigonométricas, nesta tarefa consideramos que o aluno esteve na "fase participativa" em função de as ideias pertinentes estarem para a resolução só disponível para o contexto da tarefa. No último dos quatro momentos, ao relacionar o período e o seu argumento o aluno, em um "processo de antecipação", pôde abstrair regularidades na relação atividade-efeito ao plotar o gráfico no *GeoGebra*.

Considerações Finais

Os resultados indicaram que as interações dinâmicas com o sistema tecnológico na HLT puderam favorecer a generalização necessária para o desenvolvimento de processos de abstração reflexiva que incidem na elaboração dos conceitos relacionados às características de funções trigonométricas, tais como, por exemplo, a periodicidade. Concluímos que muitos alunos têm dificuldades em compreender o conceito de periodicidade que pode estar vinculado à necessidade de quantificação a partir de uma concepção

dinâmica. Neste sentido, as tarefas matemáticas propostas, utilizando a dinamicidade do software e o modelo de material reciclável, parecem ter apoiado os alunos a iniciar a coordenação dos argumentos trigonométricos. O processo de construção descrito na investigação proporcionou uma fina descrição da maneira pela qual os alunos evoluíram da "fase de participação" da HLT para a "fase de antecipação" determinada pela coordenação de registros relacionados à modificação dos parâmetros relativos ao argumento trigonométrico de modo a expressá-la analiticamente e geometricamente e, na sequência, estender as conclusões para casos gerais.

A interação e dinamismo nas ações com relação a buscar e estender, auxiliaram os licenciandos no entendimento das informações e registros nas relações entre a atividade-efeito na THA com o *software* GeoGebra como, por exemplo, na tarefa 4, cinco dos dezesseis licenciandos compreenderam o comportamento da Função M e ambos realizaram os esboços do gráfico no *software*, definiram o seu comportamento de forma algébrica sem dificuldade em consequência das funções propostas anteriormente nas tarefas dois e três.Enfatizamos que intervenções do professor são também responsáveis pelo resultado, no caso, levando o licenciando a fazer uso do processo de antecipação a partir de dados sobre o comportamento de uma função trigonométrica. Contudo, esta reflexão fica para uma posterior análise deste experimento dos fatores na sequência de ensino que parecem influenciar no processo de construção do conceito de funções trigonométricas na THA.

Referências bibliográficas

Coob, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003.). Design experiments in education research. *Educational Researcher, v.32*(n.1), pp. 9-13.

Duval, R. (1988). *Geometry from a cognitive point of view*. En C. Mammana and.Villani (eds.) Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century (37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. And Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.

Piaget, J. (1977). *Studies in Reflecting Abstraction*. Sussex: Psychology Press.

Lobo da Costa, Nielce M. *A história da trigonometria.* SBEM. Ano 10 –nº13, março de 2003, pág.60 a 68.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 26, No. 2, 114-145.

Simon, M. A., Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R, Heinz, K and Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.

NARRATIVAS SOBRE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: O QUE PODEM NOS DIZER?

Adriana Barbosa Oliveira, Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. (Brasil)
drideoliveira7@gmail.com, marilenabittar@gmail.com

Resumo

Apresentamos nesse texto movimentos iniciais de análise de uma pesquisa de doutorado, em andamento, que busca evidenciar, por meio de narrativas discentes, as percepções de futuros professores de Matemática em relação ao curso de Licenciatura em Matemática que vivenciam. Até o momento realizamos entrevistas com grupos de 3 a 6 licenciandos, de diferentes períodos do curso, de 10 universidades federais brasileiras. Nosso enfoque metodológico narrativo é apoiado nos estudos teóricos propostos por Antonio Bolívar. Para a análise das percepções dos estudantes nos aproximamos dos estudos sobre experiência de Jorge Larrosa. As primeiras observações evidenciam as relações de afetividade entre professores e alunos.

Palavras-chave: narrativas, experiência, licenciandos

Abstract

In this paper, we report an initial analysis of an undergoing PhD research work. It seeks to show, through teachers' discourse, some perceptions of prospective mathematics teachers about their undergraduate experience in the mathematics degree course. Up to now, we have carried out some group's interviews (with 3 to 6 prospective teachers) en different periods of the course, in 10 federal Brazilian universities. Our narrative methodological point of view is founded on Antonio Bolivar's theoretical studies. To analyze prospective teachers' perceptions, we used Jorge Larrosa's studies about experience. The initial observations highlight affective relationships between university teachers and prospective teachers.

Key words: narratives, experience, prospective teachers

Introdução

Quando se propõe um estudo acerca da formação inicial de professores de Matemática é possível desenvolvê-lo por meio de diferentes perspectivas, uma vez que esse campo é bastante complexo e rico de informações. Podemos discutir, por exemplo, o currículo proposto nos cursos, as práticas desenvolvidas pelos docentes, as dicotomias existentes entre a formação pedagógica e a formação matemática, os conhecimentos necessários à docência. Para cada um desses vieses contamos com uma extensa bibliografia de trabalhos e de teóricos que discutem essas questões (Nóvoa, 1992; Tardif, 2000; Gatti e Barreto, 2009).

Valendo-nos dessa riqueza de possibilidades, optamos por desenvolver um estudo que trouxesse um olhar mais particular para esses cursos, que explorasse as percepções que futuros professores de Matemática, ainda em processo de formação, possuem acerca de seu curso de formação inicial. Nosso interesse encontra-se em discutir motivações e sentimentos que esses estudantes revelam ao falarem sobre suas vivências em um curso de formação de professores de Matemática para a educação básica. Nosso interesse está nas singularidades dessas percepções, no modo como cada grupo de estudantes se relaciona com a formação recebida.

Em uma perspectiva próxima, Santos (2013) realizou uma investigação sobre um curso de licenciatura em Matemática à distância, de uma instituição pública, tomando por base as narrativas dos estudantes que vivenciam esse curso. A ideia seria ouvir dos estudantes, ingressantes no curso, suas impressões sobre o curso oferecido com o apoio de polos presenciais. Para o estudo foram realizadas visitas aos diferentes polos do curso, pelo estado do Rio de Janeiro, afim de realizar entrevistas não só com estudantes, como também com tutores presenciais e diretores dos polos, uma vez que esses profissionais relacionam-se diretamente com os estudantes. Em uma abordagem qualitativa, a autora dialoga com autores que discutem processos de produção de narrativas. Dentre os vários resultados do estudo, nos chama a atenção à indicação dos estudantes de que pouco se discute questões relacionadas a Educação Matemática no curso. Além disso, observa-se o uso restrito de tecnologias digitais podem dificultar processos que privilegiam o diálogo, a interação e a formação crítica dos estudantes.

Nossos primeiros olhares analíticos para nosso estudo também apontam que, apesar de nosso estudo ter por horizonte a conversa com estudantes de cursos presenciais, também observamos, em algumas localidades, a pouca atenção dada às discussões sobre o campo da Educação Matemática em cursos de licenciatura, que tem por principal objetivo a formação de professores para a educação básica. Resultado esse que aponta uma possível contradição em alguns modelos de formação inicial: a formação do professor de matemática privilegia a formação matemática desse profissional em detrimento de discussões que possam, entre outras, propiciar um repensar sobre a postura docente, sobre as práticas pedagógicas enraizadas nas escolas e sobre os processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Escolhas teóricas

Como abordagem metodológica optamos pelo desenvolvimento de entrevistas narrativas (Bolívar, Domingo e Fernández, 2001) com grupos de estudantes de licenciaturas em Matemática de diferentes estados do Brasil. Até o momento realizamos 10 entrevistas, cada uma em uma instituição de ensino superior pública brasileira. Em cada local tentamos reunir um grupo de 3 a 6 participantes que cursassem diferentes períodos para que tivéssemos tanto relatos sobre as expectativas como também sobre as vivências dentro do curso. No momento inicial da entrevista solicitamos que cada estudante se apresentasse informando o período que estava cursando e o porquê de sua escolha pela licenciatura em Matemática. Após todas as apresentações pedimos que falassem sobre seu curso levando em consideração o fato de que se tratava de um curso para a formação de professores de Matemática para a educação básica. Ao longo das entrevistas, que tiveram duração média de 90 minutos, surgiram outras questões, ora motivadas pelos relatos dos estudantes naquele momento, ora baseadas nas entrevistas realizadas em outros locais.

Tendo em vista a densidade teórica que envolve pesquisas que tratam de narrativas, não assumimos a priori um referencial teórico que abarcasse todo o processo de análise das entrevistas. Após a realização das mesmas, durante o processo de transcrição e textualização começamos a nos aproximar dos estudos sobre experiência na perspectiva de Jorge Larrosa, uma vez que os relatos dos estudantes evidenciavam, de modo bastante particular, suas vivências durante o curso. Percebemos que suas falas diziam muito sobre o seu envolvimento com o curso e, principalmente, suas relações com os professores e com a instituição como um todo. Na perspectiva de Larrosa (2016, p.18) "a experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Não o que se passa, não o que acontece, ou o que toca. A cada dia se passam muitas coisas, porém, ao mesmo tempo, quase nada nos acontece". Assumimos que os fatos narrados por esses estudantes sejam indícios de experiências vividas durante o curso, uma vez que os relatos que optem por fazer sejam aqueles que tenham um sentido em sua existência. Buscamos lançar um olhar menos explicativo e mais compreensivo sobre as narrativas dos grupos de estudantes, ressaltando suas singularidades. Para isso, durante a análise de cada entrevista, buscamos estabelecer diálogos com teóricos que tratassem, de forma mais pontual, os temas abordados.

Movimentos de análise

Optamos por apresentar nesse texto, dados referentes à análise da entrevista realizada na Universidade Estadual no Pará em Agosto de 2016. Para a realização desse encontro estabelecemos contato com a coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática dessa instituição e prontamente fomos atendidas em nossa solicitação. Durante aproximadamente dois meses mantivemos contato via e-mail para a organização do grupo de estudantes que fariam parte da entrevista. Nossa solicitação inicial era a participação, na entrevista, de 2 estudantes ingressantes e 4 concluintes, entretanto, devido a disponibilidade de horários entre os estudantes estiveram presentes em nosso encontro 3 acadêmicas, sendo uma aluna concluinte, Desirèe, e as outras duas do terceiro ano, Mayara e Thais.

As narrativas produzidas por Desirèe, Thais e Mayara evidenciam o acolhimento que existe por parte dos professores e da instituição em relação aos estudantes. Frases como "os professores incentivam" e "a UEPA é uma mãe" são recorrentes nas falas das estudantes. É importante destacar o quanto essa afetividade em relação ao curso parece ser um elemento motivador para que elas participem efetivamente das atividades do curso, como grupos de estudo, projetos de pesquisa e de extensão.

> A gente brinca na sala desde o primeiro ano que a UEPA é uma mãe. A gente chega aqui e eles acolhem a gente. Eles nos incentivam a fazer projeto, a escrever, a estudar, a correr atrás de coisas melhores, a ir à busca de algo mais e sair daquela mesmice de só ele passar o conteúdo, a gente escrever e ir pra casa. (Mayara)

É importante destacar que, para além do acolhimento dos professores, essas estudantes também se permitem acolher, ou seja, demonstram interesse em participar das atividades e projetos com entusiasmo e dedicação, um indicativo de que "não se faz a experiência, mas sim se sofre, não é intencional, não está do lado da ação e sim do lado da paixão. Por isso a experiência é atenção, escuta, abertura, disponibilidade, sensibilidade, exposição. (Larrosa, 2016, p.68)

Ter a opção de escolha de participar de diferentes grupos de pesquisa, fazer parte de projetos que são desenvolvidos em escolas e vivenciar práticas diferenciadas nas disciplinas oferecidas pelo curso são atividades promovidas pela instituição e denominadas como oportunidades pelas acadêmicas. Percebo ainda o peso atribuído a essas atividades como algo extremamente valioso e significativo para o desenvolvimento de suas posturas profissionais. Parece que uma singularidade dessa situação está nos agentes que desenvolvem essas atividades, no fator humano. As práticas fazem a diferença, como disse Mayara: "os professores incentivam". Outro ponto de destaque nessas narrativas é a oportunidade que as acadêmicas tiveram de realizar o estágio em um modelo que foge ao padrão: observação, participação e regência. A chance de desenvolver um trabalho com maior autonomia e proximidade dos estudantes fez com que Desirèe se sentisse ainda mais motivada a atuar como professora na educação básica.

Como primeiras observações colocamos que uma prática profissional docente com disponibilidade em ensinar, compartilhar conhecimentos e, principalmente, que enxergue a Licenciatura como um momento de formação de professores aliada a uma proposta de trabalho que articule as frentes ensino, pesquisa e extensão seja o diferencial na formação dessas estudantes.

Referências bibliográficas

Bolívar, A., Domingo, J., Fernández, M. (2001). *La investigación biográfico-narrativa em educación*. Madrid: La Muralla.

Gatti, B. A., Barreto, E.S.S. (2009). *Professores do Brasil: impasses e desafios*. Brasília: UNESCO.

Larrosa, J. (2016). *Tremores: escritos sobre experiência* (C. Antunes, J. W. Geraldi, Trad.). Belo Horizonte: Autêntica.

Nóvoa, A. (1992). Formação de professores e profissão docente. In: A. Nóvoa (org.). *Os professores e sua formação* (pp. 13-33). Lisboa: Nova Enciclopédia.

Santos, S. C. (2013). *Um retrato de uma licenciatura em matemática a Distância sob a ótica de seus alunos iniciantes*. Tese de doutorado não publicada, Universidade Estadual Paulista, Brasil.

Tardif, M. (2000). Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. *Revista Brasileira de Educação,* 13, 5-24.

ESTUDOS SOBRE AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE

Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Rosangela de Souza Jorge Ando
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN. (Brasil)
nielce.lobo@gmail.com, rosangela.ando@gmail.com

Resumo

Esse artigo aborda resultados parciais de uma pesquisa de doutorado, cujo objetivo foi identificar características da participação de professores em um grupo de estudos sobre avaliação que podem auxiliar a impulsionar seu desenvolvimento profissional. O alicerce teórico deste recorte veio de estudos de Haydt sobre avaliação educacional e das pesquisas de Ponte e de Thurler sobre desenvolvimento profissional docente. A metodologia qualitativa foi a co-generativa, definida por Greenwood & Levin, com coleta de dados por observação, gravações audiovisuais e recolha de materiais produzidos pelos professores. A análise interpretativa utilizou o modelo de Powell, Francisco & Maher. Discutimos um evento crítico referente a estudos sobre funções no qual as quatro modalidades impulsionadoras do desenvolvimento profissional, segundo o referencial de Thurler, estiveram presentes. Em conclusão, foi possível constatar no evento aqui focado que a ênfase esteve na reconstrução de conhecimentos matemáticos e pedagógicos pelos docentes.

Palavras chave: evento crítico, classificação de questões, funções, ENEM

Abstract

This paper presents partial results of a doctoral research that aimed to identify characteristics of the mathematics teachers' participation in a set of studies about evaluation, which can help to improve their professional development. Haydt's studies on educational evaluation supported the research, Ponte and Thurler's studies provided the theoretical foundation related to teaching professional development. The research qualitative methodology was co-generative, defined by Greenwood & Levin, with data gathering by observation, audio-visual recordings and collection of teachers' productions. The interpretative analysis used the model of Powell, Francisco & Maher. We critically discussed studies on functions, in which the four Turner's modalities to foster professional development were included. As a conclusion, it was possible to verify that the emphasis was focused on teachers' construction of mathematical and pedagogical knowledge.

Keywords: critical event, classification of questions, functions, ENEM

Introdução

Esse texto aborda resultados parciais de uma pesquisa de doutorado em andamento, inserida em um Projeto do Programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Coordenação de Aperfeiçoamento de

Pessoal de Nível Superior e do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), vinculado ao Ministério da Educação do Brasil (Nº 19366/Edital2012). A referida pesquisa teve por objetivo identificar características da participação de professores de Matemática em um grupo de estudos sobre avaliação, as quais propiciaram impulsionar o desenvolvimento profissional desses docentes. Entre os estudos sobre avaliação no Ensino Médio, com as bases de dados do INEP, estiveram presentes os relativos à abordagem de funções nos exames do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Este processo do grupo e as possibilidades para desenvolvimento profissional dos participantes são focados neste artigo.

Fundamentação teórica

Partimos do pressuposto que a avaliação educacional é primordial para fornecer devoluções sobre as ações educativas empreendidas, seus efeitos, durabilidade e extensão e que, a partir dela é possível consolidar procedimentos docentes ou redirecioná-los e corrigir rumos. Trata-se de um processo de medição utilizado para se obter informações sobre os conhecimentos dos alunos, seja ela uma avaliação interna elaborada, aplicada e analisada pelo professor, seja uma avaliação externa direcionada a informar políticas públicas, ou um exame ao qual os alunos são submetidos para informar gestores sobre sistemas educacionais. Ambas as modalidades geram resultados que podem e devem subsidiar a escola e o professor nos processos de ensino e de aprendizagem.

O alicerce teórico deste recorte veio dos estudos sobre avaliação de Haydt (1997), que a considera como um processo interpretativo e não se limita a aplicação de um instrumento (teste ou prova) e emissão de uma nota. Os resultados destas avaliações devem ser interpretados tanto pelo professor quanto pelo aluno para que, a partir disso, obtenham subsídios para possíveis ajustes tanto no processo de ensino quanto no de aprendizagem dos conteúdos avaliados.

Quanto ao desenvolvimento profissional docente, adotamos a definição de Ponte (1997), como sendo "um processo de crescimento na sua competência em termos de práticas lectivas e não lectivas, no autocontrolo da sua atividade como educador e como elemento activo da organização escolar. (p. 44)". Assim sendo, procuramos identificar se houve algum tipo de transformação relativa aos conhecimentos do docente.

Para analisar como impulsionar, em processos formativos promovidos por políticas públicas, o desenvolvimento profissional dos docentes envolvidos, elegemos como guia teórico indicações de pesquisa de Thurler (2002). No referido estudo a pesquisadora inventariou modalidades possíveis para impulsionar o desenvolvimento profissional docente, quais sejam: 1) Sensibilização para os objetivos educacionais e desafios das reformas; 2) Desenvolvimento de competências didáticas e pedagógicas; 3) Exploração Colaborativa; 4) Cooperação contínua em uma organização aprendiz.

Quanto à "Sensibilização para os objetivos educacionais e desafios das reformas", a autora enfatizou a importância de, ao se implantar reformas ou novos currículos, os professores tenham reuniões ou formações continuadas, de forma a se sentirem bem-informados quanto às intenções das autoridades políticas e o conteúdo da reforma em questão. Contudo, alertou que isto não significa que mudem suas práticas.

Com relação ao "Desenvolvimento de competências didáticas e pedagógicas"; ressaltou que, os professores usualmente participam de atividades de formações pontuais ou compactas, concebidas em associação com novos programas de políticas públicas, e quando estas terminam, se veem sós diante de suas classes, sem a assistência de seus formadores. Estes professores, envolvidos nestas constantes alterações, sejam de programas, sejam de práticas letivas, costumam se organizar na própria escola em ações coletivas para se adaptarem às reformas curriculares, buscando auxílio de formações em universidades, pesquisas, entre outros.
A terceira forma de impulsionar o desenvolvimento profissional, para Thurler (2002) é a Exploração Colaborativa, que se liga à atividade dos professores com seus pares, em grupos.

> O grupo de professores será composto preferencialmente pelo corpo docente de um estabelecimento escolar, ou por uma parte deste, no caso das grandes equipes. O grupo também pode ser formado por professores de vários estabelecimentos, desde que se disponham a trabalhar juntos sobre uma problemática comum, em uma disciplina, uma ordem ou um determinado ciclo de ensino, ou relacionada a uma atividade pedagógica específica. (THURLER, 2002, p. 42-43)

Assim, enfatiza a relevância de se empreender formações contínuas no *locus escolar*, ou constituídas por professores de diversas instituições escolares, trabalhando sobre uma temática comum e conectada especificamente à prática dos docentes.
Em relação à "Cooperação contínua em uma organização aprendiz", Thurler (2002) indica que nas implementações de mudanças curriculares é fundamental que sejam empreendidas formações para os professores, as quais ela indica sejam feitas em seus horários de trabalho, ou em períodos de trabalho coletivo. A autora entende que, dessa forma, tais formações podem contribuir para que os professores participem de atividades que impulsionam o desenvolvimento profissional.
Salientamos que o estudo de Thurler (2002) sobre desenvolvimento profissional apontou modalidades que subsidiaram as análises neste texto.

Metodologia da pesquisa

Quanto à metodologia, esta pesquisa qualitativa se caracterizou como sendo uma investigação-ação do tipo co-generativo, segundo Greenwood & Levin (2000), ou seja, uma pesquisa na qual tanto os pesquisadores quanto os pesquisados aprendem e colaboram para a mudança; o conhecimento e os significados são gerados a partir das contribuições dos participantes; além disso, está centrada no contexto e objetiva resolver problemas da realidade docente.

A pesquisa se desenvolveu em duas etapas, uma pesquisa documental e uma pesquisa envolvendo um grupo de estudos sobre avaliação.
A inserção da pesquisa no Programa OBEDUC ocorreu tendo em vista a utilização e análise de bancos de dados do Inep (Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA) por um grupo de estudos sobre processos avaliativos, tendo como foco o estudo de funções, no qual estão integrados professores de Matemática do Ensino Médio. Os participantes do Grupo foram duas pesquisadoras da universidade e oito professores da Educação Básica de cinco escolas públicas estaduais reunindo-se em uma destas escolas ao longo de um ano. As formações e pesquisas promovidas

com apoio financeiro do Programa OBEDUC se caracterizaram como implementações de políticas públicas para melhoria da qualidade do ensino na Educação Básica.
A coleta de dados da etapa 2 ocorreu ao longo de 28 dos encontros semanais do grupo, com duração de três horas cada um, por meio de observação, recolha de materiais produzidos/ adaptados pelos professores e gravações audiovisuais desses encontros e da sala de aula. Nesse período foram empreendidos estudos teóricos sobre avaliação e sobre o ensino de funções, feitas análise de provas em Matemática realizadas no âmbito da escola e estudos sobre a avaliação internacional do PISA e a nacional do ENEM, com foco específico em funções.

A análise dos dados foi interpretativa, o que significa que visou a compreensão dos fenômenos a partir dos dados coletados, analisados a partir do alicerce teórico, com significados atribuídos pelo pesquisador, levando em conta variáveis, tais como regras institucionais, valores pessoais e sociais (Hernández, et al., 2000). Os registros em vídeo foram analisados segundo o modelo analítico de Powell, Francisco e Maher (2004), que envolve assistir e observar atentamente os dados do vídeo; descrevê-los; identificar eventos críticos; transcrever; codificar; construir o enredo e compor o texto.
A análise se estruturou em cinco períodos evolutivos do grupo estabelecidos à posteriori, quais foram: período introdutório (1º ao 5º); período preparatório (6º ao 11º); período de consolidação de estudos sobre funções (12º ao 16º); período analítico (15º ao 25º); período prático (23º ao 28º).

Neste artigo abordamos um dos eventos críticos da pesquisa, relativo aos estudos do grupo para seleção, resolução e classificação de todas as questões sobre funções presentes nos exames do ENEM de 2009 a 2015. Tais estudos foram desenvolvidos ao longo dos onze encontros do período analítico e compõem o evento crítico que descrevemos e analisamos na próxima seção.

Descrição e análise do evento crítico – seleção de questões sobre funções

No período analítico o Grupo se dedicou à análise da abordagem dada às funções no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Inicialmente, as pesquisadoras sugeriram – e os professores concordaram – que o Grupo dividisse a tarefa de selecionar, resolver e apresentar as questões sobre funções, sendo cada professor do Grupo responsável por investigar uma edição anual. Entendemos que essa fase caracteriza o que Thurler (2002) indica como sendo a modalidade 3- *Exploração Colaborativa*, para que uma formação impulsione o desenvolvimento profissional docente. Isso porque o Grupo era formado por professores de cinco escolas e naquele momento se dedicavam a estudos de uma problemática comum – envolvendo questões do ENEM, as quais seus alunos deveriam resolver e especificamente, desenvolvendo em conjunto uma atividade pedagógica que é a avaliação. Assim sendo, consideramos que a formação propiciou ao Grupo empreender exploração colaborativa.

Na sequência, essas questões foram resolvidas, classificadas e analisadas. Os critérios de classificação elencados foram: identificação do Eixo Cognitivo, das Subcompetências da área de Matemática e das Habilidades requeridas no ENEM; identificação, de acordo com os referenciais do PISA, da Situação ou contexto envolvido na questão; do Conteúdo Matemático; do Agrupamento de competências (Reprodução, Conexão e Reflexão) e do Tipo de resposta. Foi proposta uma ficha de classificação para organização e preenchimento, contendo o enunciado, os critérios acima descritos, além de uma "Síntese da tarefa do aluno" explicitando os conhecimentos a serem mobilizados para a resolução da questão.

Entendemos que esta situação se enquadrou na modalidade *4 - Cooperação contínua em uma organização aprendiz,* indicada por Thurler (2002). Embora esta tarefa de pesquisar, selecionar e resolver as questões tenha sido desenvolvida individualmente, fora de horário coletivo de trabalho, a exposição do resultado para os colegas foi em encontros na escola, considerados de períodos de trabalho coletivo. Assim sendo caracterizaram essa modalidade. Os estudos permitiram ao Grupo localizar e coletar as 315 questões do ENEM de Matemática das provas de 2009 a 2015 e identificar as 42 sobre funções.
A seguir, a tabela de distribuição por ano.

Tabela 1: Distribuição das questões do ENEM que abordaram o conteúdo de função

Ano de aplicação do ENEM	Quantidade de questões sobre o conteúdo de funções
2009	6
2010	6
2011	7
2012	4
2013	6
2014	5
2015	8
Total	42

Fonte: Acervo da pesquisa

Como resultado da análise dos itens, o Grupo classificou as 42 questões pelo tipo de função, identificando funções afim, definidas por várias sentenças, quadráticas, algébricas, exponenciais; logarítmicas; trigonométrica, dadas na representação gráfica e na representação por tabela. A quantidade de questões em que apareceram os tipos de funções em provas do ENEM no período de 2009 a 2015, está especificada na tabela 2, a seguir.

Tabela 2 - Tipos de função nas questões do ENEM

Tipo de função	Quantidade de questões
Afim	11
Definida por várias sentenças	8
Exponencial	3
Logarítmica	2
Quadrática	7
Trigonométrica	1
Algébrica	6
Outras: Função dada na representação gráfica	3
Outras: Função dada na representação por tabela	1

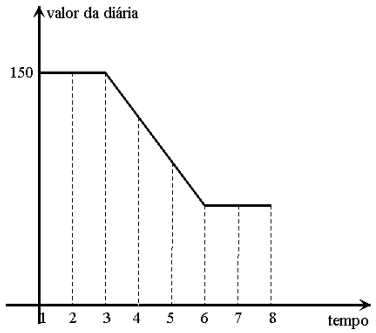
Fonte: Acervo da pesquisa

Nesta etapa de selecionar, resolver, analisar e classificar as questões que envolveram funções, entendemos que a modalidade *2 - Desenvolvimento de competências didáticas e pedagógicas* de Thurler (2002) esteve presente, uma vez que os professores do Grupo participaram de atividades de formação pontuais sobre avaliação promovidas pelas pesquisadoras da Universidade, de modo a possibilitar construção de conhecimento e consequentemente auxiliar no desenvolvimento profissional docente.

Um exemplo de questão selecionada e analisada está discutida a seguir, ver quadro 1

Quadro 1 – Questão da prova do ENEM 2009

Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R$ 20,00. Nos dois dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.



De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de
A) R$ 90,00. B) R$ 110,00. C) R$ 130,00. D) R$ 150,00. E) R$ 170,00.

Fonte: ENEM 2009

Esta questão foi classificada de acordo com a Matriz do ENEM como sendo do Eixo Cognitivo "Enfrentamento de resolução de situações-problema"; da Subcompletência – M4 – "Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano"; da Habilidade "H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais" e de acordo com o PISA da Situação ou Contexto" pública; do Conteúdo Matemático "mudanças e relações"; do Agrupamento de Competências "Reflexão"; do Tipo de resposta "Múltipla escolha". A Síntese da tarefa era "adicionar os valores numéricos da função".
Uma estratégia de resolução é a seguinte.
Sem a promoção, seria 150 x 7 = 1050 reais. Com a promoção gastaria: (150 x 3) + 130 + 110 + (90 x 3) = 960 reais. Portanto a economia será de 1050 – 960 = 90 reais. Gabarito A.
Esta questão foi uma das resolvidas e classificadas por um dos professores, da prova do ENEM de 2009, apresentada e discutida com o Grupo, que concordou com esta classificação.

Entendemos que estes momentos de estudos caracterizaram a modalidade 2 de Thurler (2002).
A partir da análise das 42 questões, o Grupo decidiu propor a seus alunos uma Avaliação Formativa com 4 daquelas questões a fim de analisar categorias de erros/estratégias equivocadas.

Com esta decisão do Grupo, entendemos que uma das modalidades de Thurler (2002) foi contemplada, a *1 - Sensibilização para os objetivos educacionais e desafios das reformas;* pois, para o sucesso das implementações de reformas educacionais ou de novos currículos é necessário que os professores se sintam bem informados, que se sintam parte integrante destas mudanças e se sensibilizem quanto à necessidade de buscar novos desafios, neste caso empreendendo uma Avaliação Formativa com um novo olhar, qual seja, analisar os erros e/ou estratégias equivocadas dos alunos ao resolverem as questões da avaliação com vistas a implementar uma ação de retomada de conceitos e procedimentos relacionados às funções.

CONCLUSÃO

A participação dos professores nessas sessões de estudo evidenciou a presença das quatro modalidades que podem impulsionar o desenvolvimento profissional citadas na teoria por Thurler (2002), com ênfase para a reconstrução de conhecimentos matemáticos e pedagógicos, quais sejam "Sensibilização para os objetivos educacionais e desafios das reformas", "Desenvolvimento de competências didáticas e pedagógicas"; "Exploração Colaborativa" e "Cooperação contínua em uma organização aprendiz". Além disso, consideramos que o Programa OBEDUC foi uma implementação de políticas públicas favorável ao desenvolvimento profissional docente, por ter sido possível por meio dele, constituir um grupo de estudos na escola, com bolsas de estudos aos participantes, materiais para os encontros, tais como recursos tecnológicos como gravadores, computadores, filmadoras e projetor.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Inep e ao Programa Observatório da Educação – OBEDUC, pelos subsídios para o desenvolvimento desta pesquisa, alojada no Projeto 19366/12 Edital 049/12. Além disso, pela concessão de bolsas relativa ao Programa de Suporte à Pós-Graduação de Instituições de Ensino Particulares – PROSUP.

Referências bibliográficas

Greenwood, D. J. & Levin, M. (2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2ª ed., pp. 85-106). Thousand Oaks, California: Sage Publications Inc.

Haydt, R. C. (1997). *Avaliação do Processo Ensino-Aprendizagem.* São Paulo: Ática.

Hernández, F., Sancho, J., Carbonell, J., Tort, A., Simó, N. & Sánchez-Cortês, E. (2000). *Aprendendo com as inovações nas escolas.* Artmed.

Ponte, J. P. (1997). *O conhecimento profissional dos professores de matemática.* Lisboa: DEFCUL.

Powell, A. B., Francisco, J. & Maher, C. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática, 17*, 81-140.

Thurler, M. G. (2002). O Desenvolvimento Profissional do Professor: Novos Paradigmas, Novas Práticas. Em P. Perrenoud, M. G. Thurler, L. Macedo, N. Machado, & C. D. Alessandrini, *As Competências para Ensinar no Século XXI* (C. Schilling & F. Murad, Trads., pp. 89-111). Porto Alegre, Brasil: Artmed Editora.

CONOCIMIENTO EMOCIONAL Y CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

María S. García-González, Gustavo Martínez-Sierra
Universidad autónoma de Guerrero. (México)
mgargonza@gmail.com, gmartinezsierra@gmail.com

Resumen

Esta investigación en proceso, tiene como objetivo de investigación analizar la relación entre el conocimiento emocional del profesor de matemáticas y su conocimiento especializado de acuerdo con el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge). Para cumplir el objetivo nos basamos en un estudio de caso, se trata de un profesor novel de educación secundaria. Para la recolección de datos nos valemos de 3 instrumentos: observaciones de clase, entrevistas al profesor y entrevista a estudiantes. El análisis de datos se basa en la identificación de una emoción tomando como referente desencadenante un subdominio del MTSK. Hasta el momento hemos encontrado evidencia de emociones en tres subdominios de este modelo, a saber: KoT, KMT y KFLM.

Palabras clave: emociones, matemáticas, profesor, educación secundaria, MTSK

Abstract

This research is in progress, aims to analyze the relationship between mathematics teacher's emotional knowledge and mathematical knowledge in correspondence to the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK model). To reach the objective, we focus on a case study, which addresses a secondary school novice male teacher. Data collection involves 3 instruments: class observations, teacher's interviews and students' interviews. Data analysis is based on the identification of an emotion taking as an essential reference point a sub-domain of the MTSK model. Preliminary results show evidence of emotions in three sub-domains of this model, namely: K o T, KMT and KFLM.

Key Word: emotions, mathematics, teacher, lower secondary education, MTSK

Introducción

En Matemática Educativa se ha evidenciado que una gran proporción de docentes experimenta emociones negativas, por ejemplo miedo o frustración, en la clase de matemáticas, muchas de estas emociones tienen como antecedente la vida escolar del profesor, es decir, quienes de estudiantes tuvieron experiencias negativas con las matemáticas, las siguen experimentando cuando se convierten en profesores, al mismo tiempo que conservan la creencia de que las matemáticas son difíciles (Coppola, et al, 2012; Di Martino & Sabena, 2011). Estas emociones negativas tienen consecuencias adversas para la labor docente, en el

mejor de los casos el profesor puede sentirse desmotivado, pero en niveles más extremos puede llegarse al síndrome de Burnout que conduce al abandono de la profesión (Schutz & Zembylas, 2009).

De acuerdo con Zembylas (2005), cuando un profesor toma decisiones en el aula de clases entran en juego, sus valores, creencias y emociones, éstos actúan y se reflejan en los métodos y significados de la enseñanza. Por nuestra parte creemos que es importante que el profesor conozca las emociones que experimenta y qué las desencadena, debido a que influyen en su perspectiva acerca de lo que significa enseñar matemáticas.
Interesados por la cuestión afectiva y por profundizar en la práctica del profesor de matemáticas, nos hemos propuesto como objetivo de investigación explorar las relaciones entre el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, Carrillo et al., 2014) y el conocimiento emocional del profesor. Contemplar el afecto, en particular las emociones, es pertinente desde este modelo, ya que como se ha señalado por sus creadores, el hacerlo permitirá comprender al profesor, su conocimiento y su actividad docente con mayor profundidad (Montes, 2016).

Emociones del profesor de matemáticas

La revisión de antecedentes nos permitió conocer que la ansiedad matemática, entendida como un conjunto de emociones negativas, es el fenómeno emocional más estudiado en los profesores (Bekdemir, 2010; Hannula, Liljedahl, Kaasila, & Rösken, 2007). También identificamos un consenso respecto a que las causas de todas las emociones negativas de los profesores obedecen principalmente a que la mayoría no son especialistas en matemáticas (Philipp, 2007).

En una investigación de tipo exploratoria, con profesores de matemáticas de nivel pre-universitario en México, encontramos que las emociones que experimentan los profesores son desencadenadas por la valoración de diferentes situaciones del aula en función de las siguientes metas: 'que los estudiantes aprendan', 'que se interesen en la clase' y 'que participen en la clase' (García-González & Martínez-Sierra, 2016).

En el contexto de la enseñanza en general Zembylas (2007) ha puesto de manifiesto la pertinencia de incluir el conocimiento emocional como un conocimiento más del profesor de matemáticas, junto al conocimiento de la asignatura y el didáctico para la enseñanza de dicha asignatura. El mismo Zembylas ha resaltado la necesidad de realizar investigaciones sobre áreas y contextos específicos de la educación para describir los aspectos relevantes del conocimiento del docente en temas variados debido a que no hay mucha información sobre el tipo de circunstancias que motivan el cambio en el conocimiento del profesor, tanto en su comportamiento como en su transformación emocional. Nuestra investigación pretende contribuir a este llamado, prestando atención al conocimiento emocional del profesor de matemáticas.

Referentes teóricos

Son tres los términos que delimitan nuestros referentes teóricos, conocimiento emocional, MTSK y emociones. Enseguida los describimos.

El *conocimiento emocional* lo entendemos desde Zembylas (2007) como el conocimiento del profesor acerca de sus emociones y las de sus estudiantes.
La *emoción*, la redefinimos desde la teoría de la estructura cognitiva de las emociones, llamada teoría OCC (Ortony, Clore, & Collins, 1988), como la reacción del profesor de matemáticas ante acontecimientos y agentes de la clase de matemáticas. En esta teoría se considera que las emociones surgen como resultado de la manera como las situaciones que las originan son valoradas por quienes las experimentan, por tanto es importante hablar sobre la forma en que se realiza esta valoración, ya que uno de los aspectos más destacados de la experiencia de las emociones es que varían muchísimo en intensidad tanto dentro de cada persona como entre las distintas personas. Tomamos también en consideración la tipología de emociones OCC (Tabla 1).

Tabla 1. *Tipos de emociones concebidas por la OCC.*

Clase	Grupo	Tipos (*ejemplo de nombre*)
Reacciones ante los acontecimientos	VICISITUDES DE LOS OTROS	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*feliz-por*) Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*alegre por el mal ajeno*) Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*resentido-por*) Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*quejoso-por*)
	BASADAS EN PREVISIONES	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (*esperanza*) Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (*satisfacción*) Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (*alivio*) Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (*decepción*) Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (*miedo*) Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento Indeseable (*temores confirmados*)
	BIENESTAR	Contento por un acontecimiento deseable (*jubilo*) Descontento por un acontecimiento indeseable (*congoja*)
Reacciones ante los agentes	ATRIBUCIÓN	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (*orgullo*) Aprobación de una acción plausible de otro (*aprecio*) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (*autoreproche*) Desaprobación de una acción censurable de otro (*reproche*)
Reacciones ante los objetos	ATRACCIÓN	Agrado por un objeto atractivo (*agrado*) Desagrado por objeto repulsivo (*desagrado*)
Reacciones ante el acontecimiento y el agente simultáneamente	BIENESTAR/ATRIBUCIÓN	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (*gratitud*) Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (*ira*) Aprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (*complacencia*) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado (*remordimiento*)

***Fuente*:** (Ortony, Clore, & Collins, 1988).

El *MTSK* es una herramienta teórica y analítica que permite identificar el conocimiento específico del profesor de matemáticas y comprender la naturaleza del mismo, desde un punto de vista sistemático y artificialmente organizado para su análisis. Este se refiere a dos grandes tipos de conocimiento, el de la matemática (MK) y el del conocimiento didáctico del contenido (PCK), es decir, la matemática y su enseñanza, para evidenciarlo el modelo se vale de 6 subdominios (ver Figura 1).

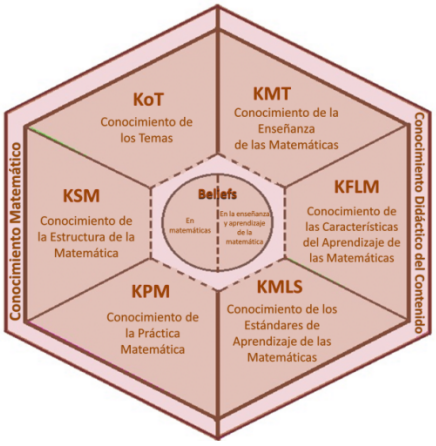


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo *et. al.*, 2014).

Recolección de los datos

Para recolectar evidencia del conocimiento emocional del profesor de matemáticas, nos valemos de un estudio de caso (Stake, 1995), se trata de un profesor novel, de 39 años de edad, de formación arquitecto, quien decidió participar voluntariamente en el estudio. En el momento en que se realizó la toma de datos era la segunda vez que daba clases de matemáticas en segundo grado de educación secundaria (13-14 años) en la capital del estado de Guerrero, México. Cursaba el primer año de la Maestría en Docencia de la Matemática que oferta la Universidad Autónoma de Guerrero, México. En adelante nos referiremos a este profesor con el nombre de Diego, pseudónimo que le hemos asignado.
Para la recogida de datos usamos las siguientes fuentes:

(1) Una entrevista biográfica al profesor, para conocer las experiencias emocionales propias y de sus alumnos que reconoce en su práctica docente
(2)Entrevistas a 4 estudiantes para conocer las emociones que reconocen de su profesor y de ellos mismos.
(3) Observaciones de clase, para confrontar la evidencia de 1, 2 y 3.
(4) Entrevistas semi-estructuradas al profesor para llenar huecos de información que no arrojen las fuentes consideradas.

Las entrevistas y las observaciones de clase fueron videograbadas y transcritas para su posterior análisis.

Análisis de datos

Los datos arrojados por las fuentes de evidencia los hemos analizado de acuerdo a los lineamentos de la OCC tomando como referente desencadenante de la emoción un subdominio del MTSK. Pretendemos con ello hallar una relación de implicación entre emoción y subdominio MTSK.
Hasta el momento hallamos evidencia de 3 emociones, congoja, satisfacción y remordimiento en relación con tres subdominios del MTSK, se trata del subdominio conocimiento de los temas (KoT), del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), ver Tabla 2.

Tabla 2. Relaciones entre subdominios MTSK y emociones.

Subdominio	Emoción	Evidencia
KoT Conocimiento de los temas	SATISFACCIÓN La Congoja está asociada al desconocimiento de los temas.	**Diego**: Yo cuando inicié en segundo año como mi conocimiento de la matemática era muy poco [**KoT**] me sentía frustrado por no poder enseñarles más, no me sentía cómodo [**CONGOJA**] … me sentía agobiado, por tener que trabajar allá [escuela].
KMT Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas	SATISFACCIÓN La satisfacción está asociada al conocimiento de estrategias para enseñar un concepto en clase.	**Diego**: Yo les enseño lo que pasa en realidad cuando se dice pasa sumando o restando, usando los inversos aditivos o multiplicativos, para que ellos se den cuenta de cómo se van desapareciendo los términos para dejar despejada una literal [**KMT**], a mí nunca me lo enseñaron, yo me preguntaba cómo era que la variable se despejaba, ahora que lo aprendí [curso MDM] me gusta compartirlo con mis estudiantes [**SATISFACCIÓN**] para que entiendan lo que está sucediendo en el proceso de solución, que conozcan las propiedades matemáticas.
KFLM Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas	REMORDIMIENTO El remordimiento está asociado a las dificultades de los estudiantes al resolver un ejercicio.	**Diego**: Me sentí un poco apenado cuando no pudieron resolver el ejercicio en el examen [**KFLM**] porque nunca vimos en clase ese caso. Si los hubiera dejado tener ese conflicto en clase los hubiera llevado a reflexionar en fijarse en los coeficientes, pero no lo hice. [**REMORDIMIENTO**]

Una vista gráfica de este hallazgo se muestra en la Figura 2.

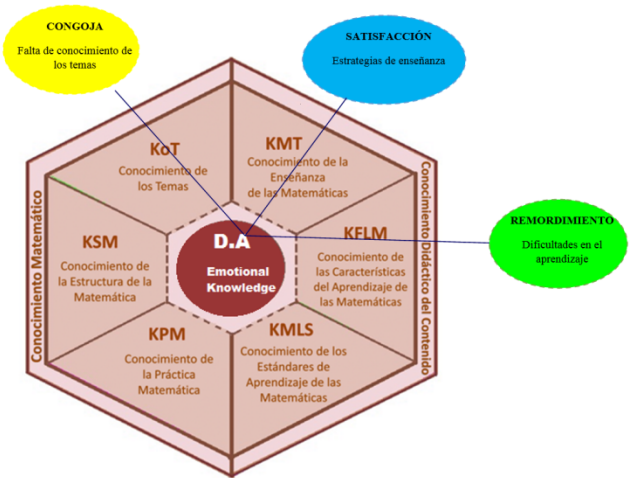


Figura 2. Conocimiento emocional y MTSK.

Estos hallazgos son alentadores, y nos motivan a continuar el análisis de datos con la finalidad de lograr nuestro objetivo planteado.

Referencias bibliográficas

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 311–328. http://doi.org/10.1007/s10649-010-9260-7

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M.A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education* 17 (3–4), 101–118.

Di Martino, P., & Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI, Tallinn University*, 89-105.

García-González, M. & Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 247-252). Málaga: SEIEM.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R., & Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. P. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 153–156). Seoul, Korea.

Montes, M.A. (2016). Las creencias en MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 55-59). SGSE: Huelva.

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Schoenfeld, A. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem-solving skills. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 345-395). New York: Academic Press.

Schutz, P., y Zembylas, M. (2009). Introduction to advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives. En P. Schutz, y M. Zembylas (Eds.), *Advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives*. New York: Springer.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Zembylas, M. (2005). Beyond teacher cognition and teacher beliefs: the value of the ethnography of emotions in teaching. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 18(4), 465-487

Zembylas, M. (2007). Emotional ecology: The intersection of emotional knowledge and pedagogical content knowledge in teaching. *Teaching and Teacher Education*, 23(4), 355–367.

COMPORTAMENTOS EXPRESSOS PELO PROFESSOR DE MATEMÁTICA EM SALA DE AULA: A VISÃO DE ALUNOS BRASILEIROS DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Sandra Maria Nascimento de Mattos
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – PPGEA. (Brasil)
smnmattos@gmail.com

Resumo

Este trabalho analisou a visão de alunos brasileiros do ensino fundamental II a respeito dos sentimentos que eles tinham sobre os comportamentos de alguns professores de matemática em sala de aula. Identificou como esses comportamentos afetam o processo de aprendizagem desses alunos, gerando falhas de comunicação, indisciplina e fugas. Permitiu perceber que ocorre a personificação da própria matemática escolar na figura do professor, transferindo para o mesmo, sentimentos desagradáveis obtidos por insucessos. Ficou evidenciado que as relações vivenciadas em sala de aula transpassam a dimensão afetiva. Foi constatado que o comportamento de um afeta o comportamento do outro.

Palavras-chave: ensino fundamental II, afetividade, matemática, comportamentos

Abstract

This work analyzed the view of elementary school II Brazilian students regarding the feelings they had about some mathematics teachers' behaviours in the classroom. We identified how these behaviors affect these students' learning process, generating communication failures, indiscipline and runnings away from school. It allowed us to perceive that the personification of the school mathematics itself takes place in the teacher´s attitude, leading to students' unpleasant feelings due to their failures . It was evidenced that the relationships experienced in the classroom transcend the affective dimension. We found that one´s behavior affects the behavior of others.

Key words: elementary education, affectivity, mathematics, behaviors

Introdução

A aprendizagem dos alunos é espelhada pelo comportamento que o professor desenvolve em sala de aula. O simples contato com qualquer aspecto referente à matemática escolar já evoca sentimentos os mais variados nos alunos. Suas experiências e vivências estão diretamente relacionadas ao desempenho obtido na disciplina. Além disso, a relação professor-alunos tem uma carga afetiva complexa e abrange aspectos que vão além da relação didático-pedagógica. Desse modo, abordar os comportamentos desenvolvidos por professores em sala de aula é relevante e se justifica por buscar a compreensão de boas relações entre professor e alunos e destes com o conhecimento matemático escolar.

O ponto de partida para o desenvolvimento e reflexão de pesquisa teve como objetivo investigar os comportamentos expressos pelo professor, em sala de aula, que afetam as relações entre ele e seus alunos e consequentemente a aprendizagem destes. Para alcançar o objetivo é tomada a visão dos alunos, visto que, são eles quem melhor percebem estes comportamentos e por eles são afetados. Nesta perspectiva, é utilizada a técnica projetiva, a qual as respostas são capturadas por meio da subjetividade dos alunos. Esta subjetividade encontra-se oculta, mas, vem à tona quando se faz perguntas de forma indireta.

Para os jovens brasileiros a relação com a escola se reduz a um cotidiano enfadonho, desinteressante e até uma obrigação, já que é o caminho para obter um diploma, tão necessário ao desenvolvimento profissional (Almeida & Mahoney, 2007). Para além disso, esses jovens, acreditam que os professores pouco ou quase nada acrescentam à sua formação profissional, pois não veem utilidade para os conteúdos que aprendem (Barros, Carvalho, Franco & Rosalém, 2012).

Comportamentos

O comportamento é o conjunto de reações em determinadas situações. É a exteriorização das reações interiores que o exterior lhes suscita. Ele pode manifestar-se de modos diversos, de acordo com as situações. Pode ser no âmbito consciente, pré-consciente ou inconsciente. O comportamento consciente manifesta-se pelo processo de uma sequência cognitiva, portanto, é do domínio da pessoa. Assim, pode-se interferir ou mudá-lo. O comportamento pré-consciente é evocado por fatos já ocorridos, tem-se consciência de sua existência, mas não se pode modificá-los. O comportamento inconsciente é aquele que orienta as ações e reações perante determinados fatos. Para Damásio (2000) "a finalidade e a adequação do comportamento podem ser avaliadas tendo em conta o contexto de situação, natural ou experimental – é possível determinar-se as respostas do organismo a dados estímulos e se as suas acções espontâneas são apropriadas ao contexto". (p.110)
Tratando-se de alunos e professores e seus comportamentos, envolve o comportamento de ensinar e do comportamento de aprender, focando o ensinar pela atividade que desperta no aluno, ou seja, pela modificação de comportamento esperado no aluno quando desenvolvido um comportamento de ensinar. Ensinar como comportamento decorre daquilo que o professor faz, em uma relação com o meio envolvente, que gerará um comportamento de aprender. Assim, corroborando Kubo e Botomé (2001)

> [...] a relação entre o que o professor faz e a efetiva aprendizagem do aluno é o que, mais apropriadamente, pode ser chamado de ensinar. Nesse sentido, ensinar é o nome da relação entre o que um professor faz e a aprendizagem de um aluno. (p.5)

Para gerar um comportamento de ensinar o professor precisa ter em mente ou focar alguns aspectos essenciais: 1) objetivos de ensino; 2) conteúdo a ser ensinado; 3) características dos alunos; 4) estratégias de ensino e 5) resultados esperados. Para gerar um comportamento de aprender é necessário haver modificação de comportamento no aluno. É preciso, portanto, favorecer estímulos de aprendizagem; possibilitar a atividade e facilitar os resultados esperados. Desse modo, cabe ao professor propor tarefas que tenham situações contextualizadas na realidade do aluno; estabelecer o esforço que o aluno despenderá para realizar a tarefa de acordo com seu ritmo e suas características de desenvolvimento e prever os

resultados esperados, bem como, que caminhos ele pode seguir, a fim de alcançar resultados satisfatórios, que argumentações pode construir, deixando que ele perceba sua capacidade para tal.

Sentimentos na visão walloniana

Wallon (1975a, 1975b, 2005, 2008), em seus estudos sobre a pessoa tomou como fundamento o ponto de vista psicogenético, estudando o psiquismo em sua origem e transformações. De acordo com o autor, para estudar a criança ou o jovem, é necessário estudar a cronologia de seu desenvolvimento. Sua teoria de desenvolvimento apresenta quatro conjuntos funcionais: afetividade, cognição, ato motor e pessoa. De acordo com Mahoney e Almeida (2005) o conjunto afetivo oferece as funções responsáveis pelas emoções, pelos sentimentos e pela paixão, o cognitivo permite a aquisição e manutenção do conhecimento por meio de imagens, ideias e representações, o motor possibilita o deslocamento do corpo no espaço e no tempo e a pessoa, que ao mesmo tempo que garante a integração destes conjuntos, é o resultado dela.

Desde que nasce a pessoa é afetada por aspectos interiores ou exteriores ao próprio corpo. As ações ou reações provocadas, ao ser afetada, provocam sensações agradáveis ou desagradáveis, pois a afetividade é fonte de prazer ou desprazer. As manifestações da afetividade têm uma passagem simultânea para o motor, deixando transparecer, nos aspectos fisionômicos, em que intensidade foi afetada. Para Almeida (2010) "o conjunto afetividade oferece as funções responsáveis pelas emoções, pelos sentimentos e pela paixão" (p.26). Segundo a autora a emoção é ativada pelo orgânico, o sentimento é a expressão representacional da emoção e a paixão torna a emoção silenciosa pelo autocontrole dessa para alcançar determinado objetivo. Ainda, segundo a autora "a teoria walloniana postula que há constantemente um jogo de tensões entre os conjuntos funcionais que são postos em movimento pelos recursos, limites e exigências do meio social" (Almeida, 2010, p.27).

Wallon (2005) afirma que "a emoção é a exteriorização da afetividade" (p.143), é sua expressão corporal, motora. Assim sendo, tem poder plástico e contagioso. A pessoa afetada torna a emoção visível, pelas ações e reações provocadas. Assim como se manifesta, desaparece rapidamente. Entretanto, é intensa e sem controle e, portanto, facilmente percebível aos olhos de quem a observa. A paixão é a ativação do autocontrole. É o amadurecimento das ligações afetivas e não reveladas.

O sentimento permite à pessoa sensibilizar-se por algo ou alguém. Tem caráter cognitivo, permitindo verbalização do que é afetado. "É a expressão representacional da afetividade" (Almeida & Mahoney, 2007, p.18), quer seja estimuladora ou reguladora da atividade psíquica que a provoca. De acordo com Wallon (1971) "a representação também pode ter um alvo e um objetivo imposto à afetividade e sobre ela imperante" (p.152). Consequentemente, desperta reações afetivas cada vez que se reproduzirem os motivos pelos quais construíram as representações afetivas. Despertando ações não imediatas, pode provocar abstenção para participar de situações que as situações exigem.

O sentimento tem a capacidade de transformar-se, desde que haja uma nova maneira de o perceber instalado. Portanto, procurar indícios que levem alunos a terem desempenhos insatisfatórios em matemática é, de certa forma, tentar revertê-los. Exige, entretanto, observação e entendimento do desenvolvimento afetivo e cognitivo dos alunos. Se, se querer revertê-los, há que se modificar práticas docentes e ponto de vista dos alunos sobre os conteúdos matemáticos.

Relação com o saber

Para Charlot (2000) a noção sobre a relação com o saber tem ligação com as questões históricas, sociais, psicanalíticas e antropológicas. Charlot afirma que o saber é relação e, portanto, o valor e o sentido do saber nascem das relações e da sua apropriação. Afirma ainda, que "um saber só tem sentido e valor por referência às relações que supõe e produz com o mundo, consigo, com os outros." (p.63-64). Desse modo, todo ser humano aprende e essa aprendizagem deve equivaler a adquirir um saber, entendendo-o como um conteúdo intelectual e não simplesmente acumulação de conteúdos intelectuais.
De acordo com Charlot (2007), a relação com o saber é uma relação com o mundo, consigo mesmo e com o outro, entre um sujeito confrontado com a necessidade de aprender e compreender as relações existentes entre os diferentes saberes. Assim sendo, de acordo com o autor:

> A relação com o saber é o conjunto das relações que um sujeito estabelece com um objeto, um "conteúdo do pensamento", uma atividade, uma relação interpessoal, um lugar, uma pessoa, uma situação, uma ocasião, uma obrigação, etc., relacionados de alguma forma ao aprender e ao saber – consequentemente, é também uma relação com a linguagem, com o tempo, relação com a atividade no mundo e sobre o mundo, relação como os outros e relação consigo mesmo, como mais ou menos capaz de aprender tal coisa, em tal situação (Charlot, 2007, p.45).

A relação com o saber é uma relação social e, ao mesmo tempo, subjetiva, ou seja, existe um sujeito que quer se apropriar do saber acumulado por competências cognoscitivas. Para isso, é necessária uma atividade intelectual que desperte o desejo e o mobilize intelectualmente. A mobilização só ocorre se for originada por uma atividade intelectual eficaz e se a situação de aprendizagem fizer sentido para esse sujeito, isto é, para que possa responder ao desejo e obter a solução.

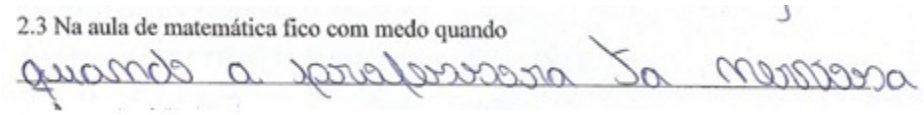
Método

O contexto pesquisado abrangeu duas escolas brasileiras, localizadas na baixada fluminense do Estado do Rio de Janeiro, Brasil. São Centros Integrados de Educação Pública – CIEP, popularmente apelidados de *Brizolões*. De cada escola participaram 4 turmas do sexto ao nono ano do ensino fundamental II. Na escola X participaram 102 alunos e na escola Y 69 alunos. A técnica utilizada foi a projetiva que é uma forma indireta de realizar perguntas, incentivando os alunos a exporem suas crenças, valores, motivações, atitudes e sentimentos subjacentes ao tema em questão, sem que os mesmos saibam. São técnicas do tipo associativas que utilizam uma referência verbal ou uma imagem, invocando sentimentos armazenados no inconsciente. Os instrumentos utilizados foram: o completamento de frases e o completamento de histórias, nos quais os alunos escrevem aquilo que primeiro lhes vier à cabeça e que revelam sentimentos ocultos. Foram feitas 8 visitas às escolas nos meses de outubro e novembro de 2014.

Resultados sobre os comportamentos de professores de matemática na visão de alunos do ensino fundamental II

Para os alunos do sexto ano do ensino fundamental II, o medo fica evidenciado por meio do estado psíquico do professor. Tais as alterações psicológicas afetam a aula e consequentemente a aprendizagem.

Além disso, a prática pedagógica é direcionada pelo excesso de tarefas propostas. A metodologia elegida pelo professor precisa priorizar uma prática docente voltada para melhorar a interrelação entre professor e alunos, favorecer o diálogo, facilitar as trocas e enfatizar a demonstração de atenção e respeito para com os alunos. Em suma, os alunos do sexto ano querem um professor que desenvolva comportamentos de ensino, mas, que também desenvolvam comportamentos afetivos em sala de aula. Ambos os comportamentos se interceptam e facilitam a aprendizagem significativa.



2.3 Na aula de matemática fico com medo quando

Passa muito dever (passa muito dever)

2.3 Na aula de matemática fico com medo quando

a professora briga (A professora briga)

Para os alunos do sétimo ano, além do estado psíquico, o medo revela-se por meio de comportamentos disciplinares desenvolvido pelo professor. Há falha de comunicação entre professor e alunos, o que gera indisciplina, estratégias de ausência e fugas por parte dos alunos. Fugas estas que os impelem a sair da sala de aula, já que consideram a aula sem atrativo, não gerando o prazer em aprender. Quando há falhas na comunicação entre professor e alunos, sentimentos de tonalidades desagradáveis emergem e o relacionamento entre ambos torna-se desintegrador. Um deixa de ouvir o outro e cada um faz aquilo que acha certo, independente do outro.

2.5 Na aula de matemática não consigo aprender, porque

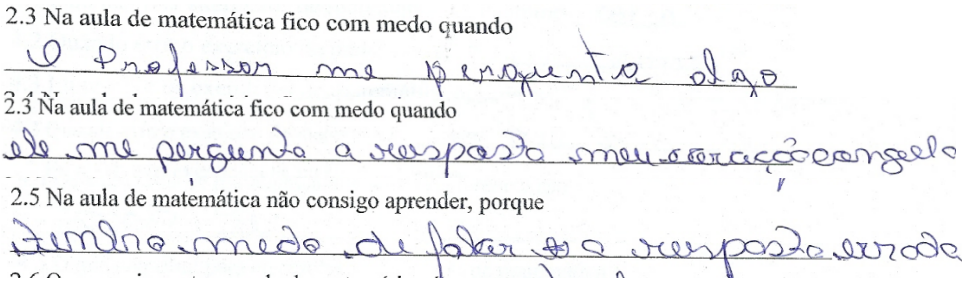
é muito difícil para ajudar contas complicadas

2.1 Quando estou na aula de matemática eu tenho vontade de

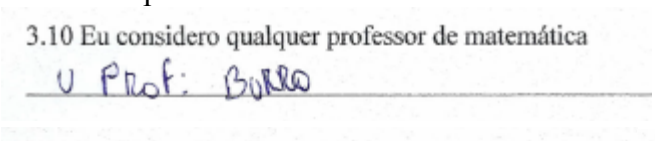
ir embora.

2.2 Na aula de matemática costumo ficar entediada.

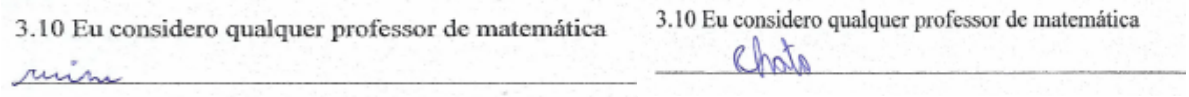
Tanto para os alunos do oitavo ano como para os do nono ano, além do estado psíquico e de comportamentos disciplinares, o medo está relacionado às técnicas didático-metodológicas desenvolvidas pelo professor em sala de aula. Ações, como chamar os alunos ao quadro ou fazer perguntas, amedronta-os. Isto porque esse professor, confrontado com esses alunos, raramente examina outras possibilidades de ensinar. Os alunos, em contrapartida, vendo-se pressionados ou expostos comportam-se com insegurança, indiferença e até agressividade, pois se comparam uns aos outros e a si próprios em sua capacidade e isto reflete em sua aprendizagem ou em seu comportamento de aprender.



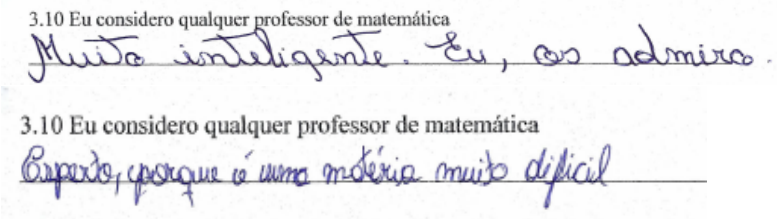
A maioria dos alunos do ensino fundamental II consideram o professor de matemática "chato" e trata-o com desrespeito.



(Um professor burro)

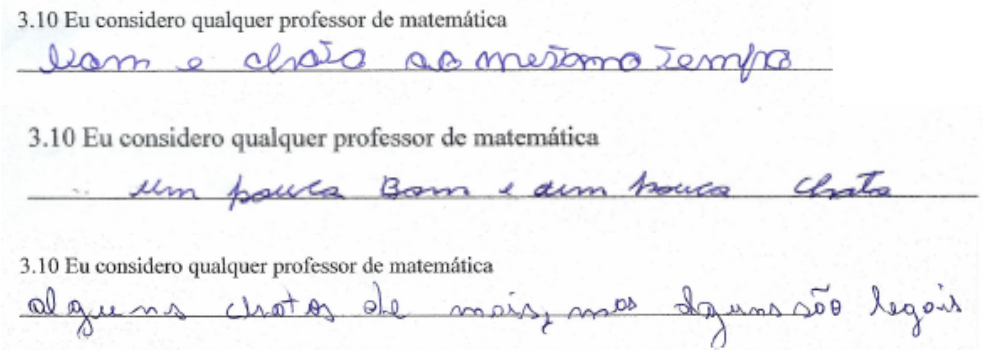


Alguns consideram o professor com sentimentos agradáveis por considerá-los pessoas especiais devido a disciplina que ensinam.



(Esperto, porque é uma matéria muito difícil)

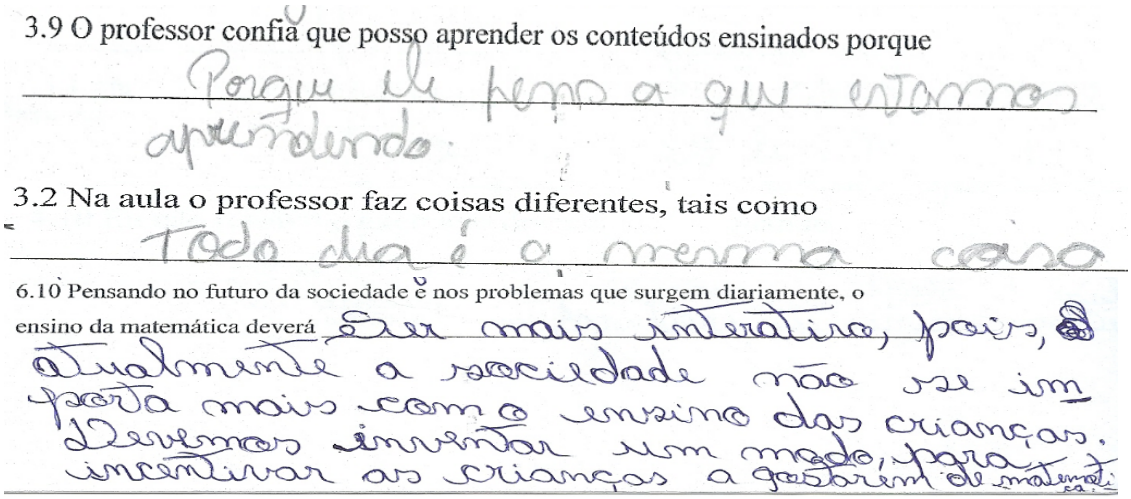
Há, ainda, aqueles que têm sentimentos ambíguos em relação ao professor de matemática.



(Alguns chatos demais, mas alguns são legais)

No que diz respeito aos sentimentos sobre o professor de Matemática é evidente que esses alunos buscam um professor idealizado que seja, ao mesmo tempo, amigo, solícito e companheiro; que os ajude e que acredite na capacidade que têm para aprender. Portanto, obter um relacionamento amistoso perpassa o comportamento do docente, bem como, as estratégias que utiliza para desenvolver a aula. Além disso, a personificação da figura do professor sobre os conteúdos matemáticos provoca sentimentos e

comportamentos desfavoráveis e até agressivos em sala de aula, pois, imbuídos por uma profusão afetiva, carregada por crenças, valores e preconceitos sobre a matemática, esses alunos descarregam sobre si mesmos e sobre o professor a carga afetiva que a disciplina desperta, quer de bom ou quer de ruim.


3.9 O professor confia que posso aprender os conteúdos ensinados porque
Porque no tempo a gente estamos aprendendo.
3.2 Na aula o professor faz coisas diferentes, tais como
Todo dia é a mesma coisa
6.10 Pensando no futuro da sociedade e nos problemas que surgem diariamente, o ensino da matemática deverá Ser mais interativa, pois, atualmente a sociedade não se im porta mais com o ensino das crianças. Devemos inventar um modo, para incentivar as crianças a gostarem de matemá-

Os resultados apontam que o estado psíquico do professor afeta seus alunos provocando medo, insegurança, desânimo e insatisfação, entre outros sentimentos. Outro fator é o tipo de prática desenvolvida em sala de aula pelo professor, da qual o excesso de tarefas gera sentimentos desagradáveis nos alunos. Segundo a visão dos alunos, o professor ao exercer sua prática precisa ajudar, auxiliar, encorajar e explicar melhor as tarefas propostas. Outro fator citado pelos alunos são os comportamentos disciplinares impostos pelo professor, que geram indisciplina e fugas por parte dos mesmos. O comportamento do professor permeia a maneira como impõe a disciplina em sala de aula, a qual os alunos percebem pelos sintomas psíquicos apresentados. Falhas ou ruídos na comunicação é outro fator apontado pelos alunos.

Considerações Finais

As respostas evidenciaram que esses alunos desejam um professor que tenha envolvimento afetivo, sendo companheiro e, ao mesmo tempo, acredite na capacidade que têm para aprender. Assim, por um lado, o relacionamento amistoso como atitude do docente auxiliaria a desenvolver a aula mais prazerosa e envolvente. Por outro lado, a personificação dos conteúdos matemáticos escolares na figura do professor provoca sentimentos e comportamentos desagradáveis e até agressivos em sala de aula, pois, a carga afetiva que o professor desperta, por meio da matemática, leva os alunos a autodesmerecerem-se.

A ressignificação dos sentimentos, desses alunos, passa por três vertentes: a primeira diz respeito à modificação da apresentação dos conteúdos matemáticos escolares, que trata de aspectos das estratégias didático-metodológicas selecionadas pelo professor. A segunda diz respeito ao diálogo entre professor e alunos, que sofre interferência por meio das concepções, crenças, valores e comportamentos de ambas as partes. A terceira diz respeito ao relacionamento entre professor e alunos e deles com o conhecimento matemático escolar.

Referências bibliográficas

Almeida, L.R. (2010). Cognição, corpo, afeto. *Revista Educação*. Coleção história da pedagogia. 3. pp.20-31.

Almeida, L.R.& Mahoney, A.A. (orgs.). (2007). *Afetividade e aprendizagem*: *contribuições de Henri Wallon*. São Paulo: Loyola

Barros, R., Carvalho, M., Franco, S. & Rosalém, A. (2012). Impacto do Projeto Jovem do Futuro. *Estudos da Avaliação Educacional*. 23(51), p. 214-227.

Charlot, B. (2007). *Relação com o saber. Formação dos professores e globalização: questões para a educação de hoje*. S. Logercio, trad. Porto Alegre: Artmed.

Charlot, B. (2000). *Da relação com o saber: elementos para uma teoria*. B. Magne, trad. Porto Alegre: ArtMed.

Damásio, A. (2000). *O sentimento de si: o corpo, a emoção e a neurobiologia da consciência*. 9.ed. P.E.A., trad. Portugal: Publicações Europa-América.

Kubo, O.M. & Batomé, S.P. (2001). Ensino-aprendizagem: uma interação entre dois processos comportamentais. *Interação em Psicologia*. 5. pp. 1-19. Disponível em <http://revistas.ufpr.br/psicologia/article/view/3321/2665>. Acesso em 28/04/2014.

Mahoney, A.A.& Almeida, L.R. (2005). Afetividade e o processo de ensino-aprendizagem: contribuições de Henri Wallon. *Psicologia da Educação*, 20. pp.11-30. Disponível em <http://pepsic.bvsalud.org/pdf/psie/n20/v20a02.pdf>. Acesso em 13/12/2003.

Wallon, H. (2008). *Do ato ao pensamento: ensaio de psicologia comparada*. G. A. Titton, trad. Rio de Janeiro: Vozes.

Wallon, H. (2005). *A evolução psicológica da criança*. C. Carvalho, trad. Lisboa: Edições 70.

Wallon, H. (1975a). *Psicologia e educação da infância*. Lisboa: Estampa.

Wallon, H. (1975b). *Objectivos e métodos da Psicologia*. Lisboa: Estampa.

Wallon, H. (1971). *As origens do caráter na criança*: os prelúdios do sentimento de personalidade. P. S. Dantas, trad. São Paulo: Difusão Europeia do Livro.

COMPETENCIAS Y CONOCIMIENTOS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. UN MODELO BASADO EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Vicenç Font
Universitat de Barcelona. (España)
vfont@ub.edu

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo que pretende articular diversas categorías de conocimientos y competencias de los profesores de matemáticas que son necesarias para una enseñanza idónea de las matemáticas, a partir de las nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) y de sus numerosas contribuciones a la investigación sobre la formación de profesores.

Palabras clave: enfoque ontosemiótico, competencias y conocimientos del profesor

Abstract

This paper shows a model that is intended to articulate diverse categories of mathematics teachers' knowledge and competences which are necessary for the appropriate teaching of mathematics, based on the theoretical notions of the Onto-Semiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (OSA) and its many contributions to the fields of teacher training.

Key words: ontosemiotic approach, competences and knowledge of the teacher

Introducción

El estudio sobre los conocimientos y competencias didácticas y matemáticas que debe tener un profesor de matemáticas es un tema que ha sido ampliamente investigado (Shulman, 987; Rowland, Huckstep and Thwaites, 2005, Hill, Ball & Schilling, 2008; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008) y que ha generado diferentes modelos del conocimiento del profesor. Basándonos en las nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) y sus diversos aportes al campo de la formación de profesores, se presenta en este trabajo un modelo llamado modelo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas (CCDM) que trata de articular diversas categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas requeridos para una enseñanza idónea de las matemáticas.

MODELO DE CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO – MATEMÁTICAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MODELO CCDM)

En el marco del EOS se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas (CDM) (Pino-Fan, Assis & Castro, 2015; Pino-Fan, Godino & Font, 2016). Una de las perspectivas de desarrollo de dicho modelo es el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor. Por otra parte, también el marco del EOS, se han realizado muchas investigaciones sobre las competencias del profesor de matemáticas (Font, 2011; Rubio, 2012; Giménez, Font, & Vanegas, 2013; Font, Breda & Sala, 2015; Breda, Silva & Carvalho, 2016; Seckel, 2016; Pochulu, Font & Rodríguez, 2016), las cuales han puesto también de manifiesto la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar sus competencias. Estas dos agendas de investigación han confluido generando el modelo llamado Conocimientos y Competencias Didáctico–Matemáticas del profesor de matemáticas (modelo CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017; Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Pino-Fan, Font & Breda, 2017).

La noción de competencia

Se pretende que el profesor de matemática esté capacitado para abordar problemas didácticos básicos en la enseñanza de esta materia, para lo cual necesita una serie de competencias específicas. Aparecen así dos cuestiones clave para desarrollar el modelo CCDM: 1) ¿cómo se entiende la noción de competencia? y ¿cuáles son las competencias clave que debe tener el profesor de matemáticas? La competencia en el modelo CCDM se entiende desde la perspectiva de la acción competente, considerándola como el conjunto de conocimientos, disposiciones, etc. que permite el desempeño eficaz en los contextos propios de la profesión de las acciones citadas en su formulación. Se trata de una potencialidad que se actualiza en el desempeño de acciones eficaces (competentes).

Esta formulación de la competencia, para ser operativa, necesita una caracterización (definición, niveles de desarrollo y descriptores) que permita su desarrollo y evaluación. De acuerdo con Seckel y Font (2015), consideramos que el punto de partida para el desarrollo y evaluación de una competencia profesional debe ser una tarea que produce la percepción de un problema profesional que se quiere resolver, para lo cual el profesor (o futuro profesor) debe movilizar habilidades, conocimientos y actitudes, para realizar una práctica que intente solucionar el problema. Por otra parte, es de esperar que dicha práctica se realice con más o menos éxito (logro) y, a su vez, dicho logro se considera una evidencia de que la persona puede realizar prácticas similares a las que están descritas por alguno de los descriptores de la competencia, el cual se suele asociar a un determinado nivel de competencia.

Competencia matemática y competencia en análisis e intervención didáctica

En el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Font, 2011; Breda, Pino-Fan & Font, 2017): diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Para

poder desarrollar esta competencia el profesor necesita por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje (dimensión didáctica del modelo CDM, uno de los componentes del modelo CCDM), y, por otra parte, necesita conocimientos para valorar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones − dimensión metadidáctico-matemática del modelo CDM, uno de los componentes del modelo CCDM (Pino-Fan, Assis & Castro, 2015). En este trabajo nos centraremos, sobre todo, en esta última competencia.

Caracterización de la competencia de análisis e intervención didáctica

Esta competencia general está formada por diferentes subcompetencias (Breda, Pino-Fan & Font, 2017): 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemáitca; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetenia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción.

Subcompetencia en el análisis de la actividad matemática

En Rubio (2012) se concluye que si los profesores no son competentes en el análisis de prácticas, procesos y objetos matemáticos, no lo serán en la evaluación de competencias matemáticas. Por tanto, los resultados de la tesis de Rubio nos señalan una subcompetencia de la competencia de análisis e intervención didáctica que deben desarrollar los profesores de matemáticas para desarrollar y evaluar competencias en sus alumnos: la competencia de análisis la actividad matemática, entendida como el análisis de las prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en ellas.
Esta primera subcompetencia es la que permite a los profesores el análisis de la actividad matemática. Dicho tipo análisis es importante en la formación de los profesores y es un tipo de análisis que presenta dificultades para los profesores y futuros profesores. Por ejemplo, en Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) se realiza una revisión de la investigación empírica realizada sobre los profesores de matemáticas y se concluye que estas investigaciones muestran que los profesores tienen dificultades para analizar las tareas matemáticas (y su potencial educativo) que proponen a sus alumnos.
En el área de educación matemática no hay un paradigma que nos diga cómo se debe realizar el análisis de la actividad matemática. En el modelo CCDM se asume que las herramientas teóricas del EOS permiten dicho análisis en términos de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Con estas nociones teóricas, cuando los significados son entendidos de manera pragmática en términos de prácticas, se puede responder en un primer momento a preguntas del tipo: ¿Cuáles son los significados parciales de los objetos matemáticos que se quieren enseñar? ¿Cómo se articulan entre sí? En un segundo momento se pueden analizar los objetos primarios y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas permite comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. Por tanto, el profesor de matemáticas debe conocer la idea de configuración de objetos primarios y procesos activada en una práctica matemática y ser capaz de usarla de manera competente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Pino-Fan, Godino y Font, 2016).

Subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje

La noción de configuración didáctica se ha introducido en el EOS como herramienta para el análisis de las interacciones en los procesos de instrucción (Godino, Contreras y Font, 2006). Se trata de un constructo teórico para modelizar la articulación de las actuaciones del profesor y los alumnos en torno a una tarea y un contenido determinados (una configuración de objetos primarios y procesos) de enseñanza y aprendizaje, en donde el conocimiento emerge del propio proceso de interacción. El profesor de matemáticas debe tener competencia de diseño y gestión de configuraciones didácticas. Se trata de responder a la siguiente pregunta: ¿Qué tipos de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias sobre el aprendizaje? ¿Cómo gestionar las interacciones y los conflictos para optimizar el aprendizaje? Por tanto, el profesor debe conocer los diversos tipos de configuraciones didácticas que se pueden implementar y sus efectos sobre el aprendizaje de los estudiantes, así como, diseñar y gestionar estos tipos de configuraciones didácticas en un proceso de instrucción concreto.

Subcompetencia de análisis normativo

Las distintas fases del proceso de diseño e implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje están apoyadas y son dependientes de una trama compleja de normas y metanormas de distinto origen y naturaleza (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009), cuyo reconocimiento explícito es necesario para poder comprender el desarrollo de los procesos de instrucción y encauzarlos hacia niveles óptimos de idoneidad. Por ejemplo, al estudiar las ecuaciones aparecen normas sobre su escritura o su forma de resolución. También hay normas no matemáticas, como el uso (o no) de calculadoras, sobre la forma de evaluación, sobre la forma de participar en clase, etc. El profesor de matemáticas debe desarrollar la *competencia de análisis normativo* de los procesos de instrucción matemática para responder a preguntas como las siguientes: ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales? ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas? ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático? Etc.

Subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción

La caracterización de la competencia de análisis e intervención didáctica propuesta anteriormente, necesita herramientas para la descripción y la explicación, tales como las descritas en la investigación de Rubio (2012) para el análisis de la actividad matemática, y también herramientas para la valoración, como las presentadas, por ejemplo, en las investigaciones de Ramos y Font (2008), Seckel (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017). En estas investigaciones se muestra que, aun cuando los profesores no conozcan los criterios de idoneidad didáctica con sus componentes e indicadores, si se les pone en una situación donde tienen que valorar una propuesta de innovación didáctica que les puede implicar, entonces los usan de manera implícita para organizar su valoración positiva o negativa.

Para la valoración de procesos de instrucción, el EOS propone como herramienta esencial la noción de idoneidad didáctica. Fijado un tema específico en un contexto educativo determinado la noción de idoneidad didáctica (Breda, Font & Lima, 2015; Breda, Font & Pino-Fan, en prensa) lleva a poder responder preguntas del tipo: ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza–aprendizaje implementado? ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de instrucción para incrementar su idoneidad didáctica en futuras implementaciones?

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como *idóneo* (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*). La noción de idoneidad didáctica se descompone en seis idoneidades específicas:

1) Idoneidad epistémica, se refiere a que las matemáticas enseñadas sean unas "buenas matemáticas". Para ello, además de tomar como referencia el currículo prescrito, se trata de tomar como referencia a las matemáticas institucionales que se han transpuesto en el currículo.
2) Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/implementados.
3) Idoneidad interaccional, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
4) Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
5) Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
6) Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, al entorno social, etc.

Para cada uno de estos criterios se propone un sistema de componentes e indicadores asociados que se pueden valorar en una escala. Se trata de un sistema de rúbricas que permite valorar (o autovalorar) de manera completa y equilibrada, los elementos que, en conjunto, conforman un proceso de instrucción de calidad en el área de matemáticas.

Conocimientos del profesor de matemáticas

El formador de profesores para desarrollar en la formación de profesores las competencias profesionales del profesor ha de analizar las prácticas profesionales que los profesores realizan para resolver las tareas profesionales propuestas por él y el conocimiento didáctico-matemático activado en ellas, de manera que pueda encontrar indicadores que justifiquen la asignación de grados de desarrollo de la competencia profesional que se pretende evaluar.

Existen diversos modelos respecto de los conocimientos que debería tener un profesor de matemáticas para gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus estudiantes (por ejemplo, Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Hill, Ball y Schilling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). En Pino-Fan, Assis y Castro (2015) se propone un modelo para caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) de los profesores, el cual considera, entre otros aspectos, los aportes y desarrollos de los diversos modelos del conocimiento del profesor de matemáticas, y los desarrollos teóricos y metodológicos del EOS. Así el modelo CDM (una parte del modelo CCDM) sugiere que el conocimiento del profesor se organiza en tres grandes dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática.

La primera dimensión, matemática, refiere al conocimiento que permite a los profesores resolver problemas o tareas matemáticas propias del nivel educativo en el que impartirán clase (conocimiento común), y vincular los objetos matemáticos de dicho nivel educativos con objetos matemáticos que se estudiarán en niveles posteriores (conocimiento ampliado) (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015).

No obstante, existe un acuerdo generalizado en la comunidad de investigación sobre formación de profesores de matemáticas, en que el conocimiento de las matemáticas que se enseñará no es suficiente para la práctica de enseñanza. Los autores de los diversos modelos del conocimiento del profesor de matemáticas coinciden en que, además del contenido matemático, el profesor debe tener conocimientos sobre los diversos factores que influyen cuando se planifica e implementa la enseñanza de dicho contenido matemático (Pino-Fan y Godino, 2015). En este sentido, la dimensión didáctica del CDM propone seis subcategorías del conocimiento del profesor:

1) Faceta epistémica, que refiere al conocimiento especializado de la dimensión matemática (uso de diversas representaciones, argumentos, estrategias de resolución de problemas y significados parciales para un objeto matemático concreto), e incorpora nociones tales como conocer las matemáticas con profundidad y amplitud (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008) y el "conocimiento especializado del contenido" (Hill, Ball & Schilling, 2008).
2) Faceta cognitiva, que refiere al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (dificultades, errores, conflictos, aprendizaje, etc.).
3) faceta afectiva, que refiere a los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes.
4) faceta interaccional, conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (profesor-estudiantes, estudiante-estudiante, estudiante-recursos, etc.).
5) faceta mediacional, conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes, y sobre los tiempos designados para la enseñanza.
6) faceta ecológica, conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos..., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes.

La tercera dimensión del CDM, la dimension metadidáctica, se refiere al conocimiento necesario para reflexionar sobre la propia práctica (Schön, 1983; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008), que le permita al profesor poder valorar el proceso de instrucción y realizar un rediseño que, en futuras implementaciones, lo mejore (Pino-Fan, Assis & Castro, 2015). Las tres dimensiones descritas anteriormente están presentes en las diferentes fases del proceso de instrucción de un determinado contenido matemático: estudio preliminar, planificación, implementación y valoración (Pino-Fan, Godino & Font, 2016).

Consideración final

En este trabajo se ha presentado un modelo teórico, el modelo Competencias y Conocimientos Didáctico – Matemáticas (modelo CCDM) del profesor de matemáticas, el cual está basado en una serie de investigaciones empíricas que, por una parte han permitido su desarrollo y refinamiento y, por otra parte, han puesto a prueba sus constructos teóricos. Aunque el planteamiento que se ha hecho aquí es básicamente teórico, hay que resaltar que se vienen realizando numerosas investigaciones empíricas sobre los diversos componentes del modelo. Este modelo abre, en consecuencia, un potente programa de

investigación focalizado en el diseño, experimentación y evaluación de intervenciones formativas que promuevan el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta las distintas categorías de conocimientos y competencias didácticas descritas en este trabajo.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos de investigación: EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y REDICE16-1520 (ICE-UB).

Referencias bibliográficas

Breda, A., Font, V. y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (*en prensa*). Criterios valorativos y normativos en en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Breda, A.; Silva, J. F., y de Carvalho, M. P. (2016). A formacao de professores de matemática por competências: trajetória, estudos e perspectivas do professor Vicenc Font, Universitat de Barcelona. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *5*(8), 10 - 32.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, *26*(1), 9-25.

Font, V., Breda, A. y Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional, 11*(19), 17-34.

Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing professional tasks for didactical analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 581-590). Oxford: ICMI studies.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM- The International Journal of Mathematics Education, 39*(1), 127 – 135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26*(1)*, 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59–76.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90 – 113.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.

Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L., Breda, A. y Font, V. (2017). Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach, en Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T. L., & Choy, B. H. (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Singapore: PME.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, *19*(1), 71-98.

Ramos, A. B. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, *11*(2), 233265.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis de doctorado no publicada, Universitat de Barcelona. España.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. Tesis de doctorado no publicada, Universitat de Barcelona. España.

Seckel. M. J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional*, *11*(19), 55-75.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). *ZDM Mathematics Education 48*(1), 1-27.

EL RAZONAMIENTO IMPLICADO EN EL ESTUDIO DEL MUESTREO. APORTES PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA INFERENCIAL

Amable Moreno
Universidad Nacional de Cuyo Argentina. (Argentina)
morenoamable6@gmail.com

Resumen

Estudios realizados sobre el aprendizaje de las muestras aleatorias y el muestreo en diferentes niveles educativos revelan la complejidad de estos tópicos desde la perspectiva de su enseñanza. En este trabajo analizamos el tipo de razonamiento implicado en la construcción del conocimiento estadístico relativo al muestreo; debido a que las ideas que surgen de este análisis son claves para la comprensión de la inferencia estadística. Comenzamos presentamos algunas ideas previas; luego realizamos una revisión bibliográfica de los estudios realizados sobre el razonamiento de los estudiantes en este tópico; y finalmente a modo de conclusión esbozamos algunas sugerencias para su enseñanza haciendo uso de la tecnología. De esta manera promovemos el desarrollo del razonamiento estadístico de los estudiantes en el muestreo, tan necesario para poder evaluar críticamente las declaraciones basadas en datos.

Palabras clave: muestreo, variabilidad muestral, razonamiento estadístico

Abstract

Studies on the learning of random samples and sampling at different educational levels show the complexity of these topics from their teaching perspective. In this paper we analyze the reasoning type involved in the construction of statistical knowledge related to sampling; due to the fact that the ideas that emerge from this analysis are essential for statistical inference understanding. We begin with some previous ideas; then, we review bibliography related to the studies carried out on the students' reasoning on this topic; to conclude, we outline some suggestions for its teaching by using technology. In this way we promote the development of students' statistical reasoning in sampling, which they need to be able to critically evaluate data-based statements.

Key words: sampling, sample variability, statistical reasoning

Introducción

La información contenida en los datos que aparecen en la vida cotidiana y profesional de las personas, nos obliga a orientar la enseñanza de la estadística hacia el análisis de la información para la toma de decisiones desde la perspectiva de la construcción del conocimiento estadístico. Esta forma de entender la formación de los estudiantes favorece el desarrollo de las competencias necesarias para evaluar críticamente las declaraciones basadas en los datos. Este enfoque de la enseñanza de la estadística se

potencia con la incorporación de los recursos informáticos disponibles en la web, y que están al alcance de todos los estudiantes; como es el software R de distribución libre.

Partimos de la idea de que el núcleo de la estadística consiste en tomar muestras representativas de una población y hacer inferencias sobre características poblacionales desconocidas. Lo que nos lleva a considerar las ideas centrales del muestreo: representatividad muestral y variabilidad muestral; que deben ser comprendidas y cuidadosamente balanceadas para el estudio de la estadística inferencial.

Para Rubin, Bruce y Tenney (1990) el exceso de confianza en la representatividad del muestreo lleva a los estudiantes a pensar que una muestra nos dice todo acerca de una población, mientras que la dependencia en la variabilidad del muestreo lleva a los estudiantes a creer que una muestra no nos dice nada útil de una población. Los estudiantes debe tener la oportunidad de encontrar el equilibrio entre la representatividad y la variabilidad (Shaughnessy, 2007). Es decir que, debemos ayudar a desarrollar las ideas del lenguaje probabilístico necesarias para articular "esta muestra no me dice nada, esta muestra me dice todo, esta muestra me dice algo".

Los estudiantes, en general, están familiarizados con la idea de muestra y tienen un sentido bastante bueno de que cada muestra puede diferir de otras muestras extraídas de la misma población; sin embargo, tienen dificultades para hacer la transición al significado estadístico formal de muestra aleatoria (Watson y Moritz, 2000). También tienen dificultad en la comprensión del comportamiento de todas las muestras aleatorias cuando se estudian ciertos estadísticos, y cómo se relacionan los estadísticos con la población; en particular cuando se consideran los estadísticos en una distribución de muestreo.
A pesar de que el muestreo y la distribución del muestreo son temas importantes y presentan cierta dificultad para los estudiantes, no existe suficiente investigación sobre el mismo en comparación con otros conceptos estadísticos.

Marco conceptual

Para Saldanha y Thompson (2002); Wild y Pfannkuch (1999) aprender a razonar sobre las muestras y el muestreo implica establecer diferencias entre muestras y poblaciones; reconocer similitudes y diferencias entre las múltiples muestras tomadas de una población y examinar distribuciones de estadísticos muestrales. Para Garfield y Ben-Zvi (2008), el estudio de las distribuciones de las medias muestrales para muchas muestras de una población nos permite ver como una muestra se compara con el resto de las muestras, lo que nos lleva a determinar si una muestra es poco probable o no. También comparando las medias de todas las muestras aleatorias de la misma población podemos construir la idea de variabilidad en el muestreo; un componente de la inferencia estadística.

La idea de muestra y distribución muestral se construye sobre varios conceptos fundamentales de la estadística, y si estos conceptos no se comprenden en profundidad, los estudiantes nunca llegarán a comprender las ideas importantes del muestreo. Por ejemplo, las ideas de distribución y variabilidad subyacen a la idea de variabilidad muestral y distribución muestral. La idea de centro, es decir promedio, es también involucrada en la comprensión de la media de la distribución muestral; como así también la idea de modelo; como la distribución normal, que es el modelo que ajusta las distribuciones muestrales bajo ciertas condiciones. También, son importantes las ideas de aleatoriedad y probabilidad, las que no

siempre son comprendidas fácilmente, como ocurre con los estudiantes para profesor de matemáticas y de biología (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2014; 2015). Finalmente, el tamaño de la muestra se relaciona con la ley de los grandes números, de hecho las muestras más grandes representan mejor a la población de la cual fueron extraídas, y los estadísticos muestrales están más cerca de los parámetros. De acuerdo con lo expresado, las ideas relativas a muestras y muestreo, como así también sus interrelaciones con otros conceptos claves, son de suma importancia, cuando se pretende realizar inferencias estadísticas confiables (Bakker, 2004).

Para que los estudiantes entiendan qué es el razonamiento estadístico y como funciona, es conveniente partir del análisis de los resultados que brindan las simulaciones computacionales, las que proporcionan una base conceptual que les permitirá comprender el tratamiento formal de las métodos estadísticos.

Indagación bibliográfica

Entre los estudios realizados sobre muestras y muestreo, podemos mencionar el trabajo de Tversky y Kanheman (1971), quienes han sugerido en un artículo sobre "Creencias en la ley de los pequeños números", que: "Las personas tienen intuiciones fuertes sobre el muestreo aleatorio; y que estas intuiciones están equivocadas en aspectos fundamentales; que son compartidas por sujetos ingenuos y por científicos capacitados, que cuando las aplican producen consecuencias desafortunadas en el curso de la investigación científica" (p. 24). Estos autores afirman que, las personas ven una muestra tomada al azar de una población altamente representativa. En consecuencia, esperan que cualquier par de muestras tomadas aleatoriamente de la misma población sean similares entre sí.

Desde que se publicó este artículo, algunos investigadores han examinado y descripto las dificultades de los estudiantes en la comprensión de muestras aleatorias, variabilidad muestral, distribución muestral y el teorema del límite central. Así encontramos que Well, Pollatseck y Boyce (1990) han señalado que las personas a veces razonan correctamente sobre el tamaño muestral y otras veces no; por ejemplo, en ocasiones consideran que muestras grandes representan mejor a la población; y otras veces piensan que muestras grandes y muestras chicas representan bien a la población. Para revelar las razones de esta discrepancia, ellos realizaron una serie de experimentos, donde les hicieron preguntas que involucraban el razonamiento sobre muestras y variabilidad muestral. Los investigadores encontraron que los estudiantes usaron tamaños muestrales apropiados dependiendo de las preguntas; por ejemplo, cuando les preguntaron ¿cuál es el tamaño muestral más preciso? contestaron correctamente; pero no ocurrió lo mismo cuando la pregunta se refería a qué muestras deberían recoger para producir un valor en la cola de la distribución poblacional; los investigadores afirmaron que los estudiantes no comprendían la variabilidad de las medias muestrales. Además, notaron que los estudiantes no detectaron diferencias entre las distribuciones muestrales para muestras grandes de las distribuciones para muestras pequeñas; concluyendo que las intuiciones estadísticas de los estudiantes no siempre son correctas, pero se pueden desarrollar concepciones correctas a través del diseño cuidadoso de la instrucción.

En una serie de estudios, Sedlmeier y Gigerenzer (1997) encontraron que cuando los estudiantes tienen una buena comprensión del efecto del tamaño muestral, los estudiantes no tienen dificultades en la determinación de la distribución muestral de un estadístico a partir de muchas muestras. Sedlmeier (1999) continuó con esta investigación y encontró que si cambiaba los ítems que requerían considerar

distribuciones muestrales por otros que requerían distribuciones de frecuencias, se obtuvieron un alto porcentaje de respuestas correctas.

Watson y Moritz (2000) estudiaron las ideas intuitivas sobre muestras de los alumnos de una escuela elemental; y señalan que mientras los estudiantes tienen buenas ideas acerca de lo que es una muestra, ellos tienen dificultad para hacer la transición al significado estadístico y las connotaciones relacionadas. Por ejemplo, los estudiantes pueden hacer generalizaciones apropiadas de una pequeña muestra de comida a la entidad más grande de la cual se extrajo, pero estas ideas intuitivas no generalizan la noción de variabilidad muestral y la necesidad de extraer muestras grandes, como así tampoco la necesidad de que la muestra sea aleatoria. Estos autores sugieren hacer explícitas estas diferencias, por ejemplo entre tomar una muestra chica de comida la cual representa a una entidad homogénea, con la muestra de la población de los estudiantes para estimar una característica como puede ser la altura, la cual tiene variabilidad.

Por otra parte, Saldanha y Thompson (2002) encontraron en un experimento de enseñanza, que si se presenta y usa el concepto de muestreo como parte de un proceso repetido, con variabilidad de muestra en muestra, esta estrategia favorece la comprensión de lo que es una distribución, la cual es necesaria para comprender las distribuciones muestrales. Continuando con este trabajo, estudiaron el razonamiento de estudiantes de secundaria sobre muestras y distribuciones muestrales. Estos investigadores encontraron que los estudiantes usaban una estrategia aditiva en el cálculo de la probabilidad de una muestra aleatoria. Estos autores sugieren la necesidad de distinguir entre tres niveles de los datos: la distribución de la población, la distribución de la muestra y la distribución muestral de un estadístico.

Posteriormente, Watson (2004) en una investigación sobre razonamiento en el muestreo, describe como los estudiantes a menudo, para ser justos, prefieren un muestreo sesgado, como puede ser un muestreo voluntario, porque no confían en el muestreo aleatorio como proceso que produce muestras “justas”.

Bakker (2004) en un experimento con estudiantes de octavo grado, logró que los estudiantes comprendieran que las muestras grandes son más estables y representan mejor a la población; usando una secuencia de muestras de tamaño creciente. De esta manera los estudiantes fueron inducidos gradualmente a incrementar el tamaño muestral hasta que tomaban toda la población; y para cada muestra los estudiantes fueron interrogados para hacer inferencias informales. Este enfoque es apropiado para lograr un razonamiento coherente con conceptos estadísticos claves, como la distribución, la variabilidad, la tendencia y el muestreo. Además, es una herramienta pedagógica útil para lograr el decrecimiento de la variabilidad en muestras de tamaño creciente (Ben-Zvi, Aridor y Bakker; 2012).
delMas, Garfield y Chance (2004) enumeran las siguientes creencias de los estudiantes en razonamiento sobre distribuciones muestrales:

- La distribución muestral debería verse como la población (n > 1)
- Las distribuciones muestrales para muestras de tamaño grande y chico tienen la
- misma variabilidad.
- Las distribuciones muestrales para muestras grandes tienen más variabilidad.
- Una distribución muestral no es la distribución de un estadístico muestral
- Una muestra, de datos reales, se confunde con todas las muestras posibles, en
- distribución, o potenciales muestras.
- La ley de los grandes números (muestras grandes representan mejor a la población)

- es confundido con el teorema del límite central (distribuciones de medias para
- muestras grandes tienden a la distribución normal)
- La media de una distribución con asimetría positiva será más grande que la media
- de la distribución muestral de muestras grandes tomadas de la población
- considerada.

Para confrontar las concepciones erróneas y construir un razonamiento sólido sobre muestras y distribuciones muestrales, educadores e investigadores han recurrido al uso de herramientas interactivas tecnológicas (Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina, 2007) para ilustrar los procesos abstractos involucrados en muestreo repetido de poblaciones.
Lane-Getaz (2006) proporciona un modelo visual en su denominado Modelo del proceso de simulación. Este modelo fue adaptado por Garfield y Ben-Zvi (2008) y lo llamaron "Simulación de muestras" (SOS). Este modelo distingue entre el primer nivel de datos (población), muchas muestras aleatorias de la población (nivel 2) y la distribución de los estadísticos muestrales (nivel 3).

Moreno, A. (2017) en un estudio con estudiantes universitarios encontró dificultades en el concepto de muestra aleatoria, que se vio reflejado en la incorrecta enumeración de todas las muestras de igual tamaño de una población dada, debido a la falta de razonamiento combinatorio; y además encontró dificultades en la determinación de la probabilidad de una muestra, al identificar la idea de muestra aleatoria con la de subconjunto de la población.

Conclusiones

Estudios realizados sobre el aprendizaje de las muestras aleatorias y el muestreo en diferentes niveles educativos, revelan las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de estas ideas. Esto se debe en gran medida a la multiplicidad de conceptos abstractos intervinientes y a sus relaciones; como así también a la falta de estrategias didácticas que involucren a la tecnología. Concluimos que para ayudar a los estudiantes a desarrollar ideas sobre el muestreo se requiere de bastante tiempo, mucho más del asignado en el curriculum de las distintas carreras; idea que ha sido señalada por otros autores como Wild, Pfannkuch, Regan y Horton (2011). Los estudiantes necesitan experimentar auténticas situaciones, tomando muestras y aprendiendo como las muestras representan o no a la población. Estas experiencias pueden incluir colecciones de datos de encuestas y de experimentos, donde aprendan las características de las buenas muestras y las razones que hacen que algunas no sean buenas muestras y puedan crear modelos usando herramientas de simulación para estudiar la relación entre muestra y población. Estas experiencias pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar una profunda comprensión del muestreo y de la inferencia informal.

Debemos comenzar por lograr que los estudiantes reconozcan la importancia de tomar muestras aleatorias simples; luego logren comparar diferentes muestras tomadas de la misma población, observando la forma, el centro y la extensión, lo que les permitirá la construcción de la idea de variabilidad muestral. Además, las simulaciones computacionales pueden ayudarlos a comprender que una muestra suficientemente grande proporciona información casi exacta de la distribución de la población. Finalmente, podrán concluir que cuando el tamaño de la muestra aumenta, los estadísticos muestrales tienden a los parámetros poblacionales. Con la ayuda de los recursos tecnológicos, la visualización de las distribuciones

correspondientes en cada caso, y donde el cálculo no sea un obstáculo; se genera un contexto propicio para la comprensión de las ideas relativas al muestreo.

A pesar de los numerosos recursos informáticos que existen para hacer estos conceptos difíciles más concretos (Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Maker, 2013), y a pesar que los diseños curriculares presentan estos tópicos; no hay suficiente investigación sobre las formas que permiten apoyar efectivamente y eficientemente la emergencia del razonamiento estadístico de los estudiantes; y cómo evaluarlos. Tampoco se conoce mucho sobre la comprensión de los profesores sobre estos temas, ni qué estrategias didácticas son suficientemente idóneas para lograr en los estudiantes el desarrollo de estas ideas.

Referencias bibliográficas

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools.* Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.

Ben-Zvi, D., Aridor, K., y Bakker, A. (2012). Students´emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 44*(7), 913-925.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., y Maker, k. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. In M.A. Clements, A. Bishop, C.Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education (pp.643-690).* New York: Springer.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., y Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education, 1*(1).

delMas, R.C., Garfield, J., y Chance, B.(2004). *Using assessment to study the development of students´reasoning about sampling distributions.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students´statistical reasoning: Connecting research and teaching practice.* Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Lane-Getaz, S.J. (2006). What is statistical thinking, and how is it developed? In G.F. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning about data and chance: Sixty-eight NCTM Yearbook* (pp. 273-289). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moreno, A. (2017). Dificultades en la comprensión del concepto de muestra aleatoria simple en estudiantes universitarios. Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Investigación Matemáticos. En J.M Contreras, P. Arteaga, G.R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M.M. López-Martín (Eds), *Actas del Segundo Congreso Internacional sobre el Enfoque Ontosemiótico.* ISBN: 978-84-617-9047-0

Moreno, A., Cardeñoso, J.M., y González-García, F. (2015). Los significados de la probabilidad en los profesores de matemática en formación: un análisis desde la teoría de los modelos mentales. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28,* 1320-1327. México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISSN: 2448-6469

Moreno, A., Cardeñoso, J.M., y González-García, F. (2014). Los significados de la aleatoriedad de los profesores de matemática y de biología en formación. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27,* 1963-1972. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rubin, A., Bruce, B., y Tenney, Y. (1990). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics,* Vol. 1, 314-319.Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Saldanha, L.A., y Thompson, P.W. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics, 5*(3), 257-270.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning: Theoretical models and practical implications.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sedlmeier, P., y Gigerenzer, G. (1997). Intuitions about sample size: The empirical law of large numbers. *Journal of Behavioral Decision Making, 10*(19); 33-51.

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F.K.Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* 957-1009. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin, 76*(2), 105-110. (reimpreso en D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (1982) *Judgment under uncertainty: Heuristics an biases.* Cambridge University Press.

Watson, J.M. (2004). Developing reasoning about samples. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 277-294). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Watson, J.M., y Moritz, J.B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 44-70.

Well, A.D., Pollatsek, A., y Boyce, S.J. (1990). Understanding the effects of sample size on the variability of the mean. *Journal of Organizational Behavior and Human Decision Processes, 47*(2), 289-312.

Wild, C.J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Wild, C.J., Pfannkuch, M., Regan, M., & Horton, N.J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society, 174*(2), 247-295.

CREATIVIDAD EN LAS PROPUESTAS DE TRABAJOS DE FINAL DE MÁSTER DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Alicia Sánchez[1], Vicenç Font[1], Adriana Breda[2], Luis Pino-Fan[2]
[1]Universidad de Barcelona. (España), [2]Universidad de Los Lagos. (Chile)
asanchezb@ub.edu, vfont@ub.edu, adriana.breda@ulagos.cl, luis.pino@ulagos.cl

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo explorar las reflexiones que hacen los futuros profesores de matemáticas sobre creatividad. Para ello, hemos analizado los trabajos de fin de máster de cinco promociones de un máster de formación de profesores de secundaria. Observamos que en más de la mitad de estos trabajos se incluyen referencias a la creatividad, aunque no siempre tiene un papel relevante en la propuesta presentada. Por otra parte, encontramos también amplia variedad en los comentarios, que tratan diferentes aspectos de la creatividad, pudiendo así identificar diversas categorías de reflexiones relacionadas con el desarrollo del pensamiento creativo.

Palabras clave: futuros profesores, trabajo final de máster, criterios de idoneidad didáctica, creatividad

Abstract

The aim of this study is to explore mathematics prospective teachers' reflections on creativity. Thus, we have analyzed the master's degree final research works of five groups in the Master's Degree of Secondary Education Teacher Training. We observed that more than a half of these works include references to creativity, although it does not always have a significant role within the proposals. On the other hand, we also found a great variety of comments that consider different aspects of creativity, which enables us to identify several categories of reflections related to the development of creative thinking.

Key words: future teachers, master degree works, didactical suitability criteria, creativity

Introducción

Actualmente, el desarrollo de la creatividad destaca como uno de los principales objetivos de los sistemas educativos modernos (Pásztor, Molnár y Csapó, 2015). Concretamente en matemáticas, algunos autores (Sriraman, 2005; Silver, 1997; Lai, 2011; Mann, 2006) señalan la importancia de fomentar la creatividad matemática de los alumnos, aunque esto no se corresponda a menudo con la realidad de las aulas.
Los currículos de formación del profesorado se estructuran en base a competencias profesionales, que han sido estudiadas por nuestro grupo de investigación en varios proyectos I+D (EDU2009-08120; EDU2012-32644 y EDU2015-64646-P). Como conclusiones principales de estas investigaciones tenemos que: 1) dos de las principales competencias profesionales del profesor de matemáticas son la competencia en análisis e intervención didáctica y la competencia matemática; y 2) el desarrollo de la competencia en análisis e intervención didáctica influye en el desarrollo de otras habilidades y competencias profesionales.

En relación a la segunda conclusión, este trabajo se enmarca en una investigación más amplia cuyo objetivo es analizar la relación entre el desarrollo de la competencia en análisis e intervención didáctica (Breda, Pino-Fan y Font, en prensa) y el diseño de secuencias didácticas que promuevan el pensamiento matemático creativo de los alumnos.

Marco teórico

Para analizar las reflexiones que hacen los futuros profesores sobre su propuesta didáctica se utilizan los criterios de idoneidad didáctica (Breda, Font y Lima, 2015; Breda, Font y Pino-Fan, en prensa) propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

Criterios de idoneidad didáctica

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2013; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Breda, Font y Lima, 2015; Breda, Font y Pino-Fan, en prensa) de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). La idoneidad didáctica es un constructo multidimensional compuesto por seis idoneidades parciales: idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad interaccional, idoneidad mediacional, idoneidad emocional e idoneidad ecológica. A cada criterio se asocia un conjunto de componentes e indicadores que permiten la valoración de la idoneidad (Breda y Lima, 2016).

Creatividad matemática

No existe una definición única de creatividad. Beghetto y Kaufman (2007) distinguen diferentes tipos de creatividad: Big-C, little-c y mini-c. Sriraman (2004) describe diversos modelos en el estudio de la creatividad. Según el modelo de la teoría de la inversión de la creatividad (Sternberg, 2012), ésta se considera la convergencia de seis componentes: la inteligencia, el conocimiento, la manera de razonar, la personalidad, la motivación y el entorno. El componente de conocimiento hace referencia al dominio que tiene una persona de una cierta materia para poder avanzar en ella. Sriraman (2004) destaca la importancia fundamental de este componente, especialmente al hablar de creatividad matemática. También señala que algunos ejemplos célebres de creatividad en matemáticas se relacionan con largos períodos de trabajo sobre un problema concreto antes de llegar a una posible solución. El modelo Gestalt de la creatividad divide el trabajo creativo en cuatro fases: preparación, incubación, iluminación y verificación. Precisamente, la primera de estas fases, la *preparación*, es un período en el cual la persona trabaja intensamente sobre el problema de manera consciente, para lo cual necesita disponer de un conocimiento más o menos amplio sobre la materia. El estudio de Sriraman (2004) muestra la vigencia del modelo Gestalt aplicado a la creatividad de matemáticos profesionales. También señala, junto con otros autores (Silver, 1997; Mann, 2006), la necesidad de fomentar la creatividad matemática en la educación básica.

Preguntas de investigación

En este trabajo analizamos las reflexiones sobre creatividad de los futuros profesores de secundaria de matemáticas en sus trabajos finales de máster (TFM), con el objetivo de responder a las siguientes preguntas:

1) ¿En las propuestas didácticas presentadas en los TFM aparecen muchas o pocas referencias a la creatividad?
2) ¿Existe una relación entre la presencia de la creatividad en los TFM y el nivel al cual está dirigida la propuesta didáctica?
3) ¿Cómo se caracteriza la creatividad en estas reflexiones?

Metodología

La muestra se compone de 141 TFM de cinco promociones del Máster de formación del profesorado de Secundaria entre los cursos 2009-2010 y 2013-2014. La mayoría de estos trabajos presentan una estructura similar. La parte central correspondería a los apartados de valoración de la unidad didáctica implementada durante el período de prácticas en los centros educativos, búsqueda bibliográfica sobre los aspectos a mejorar de la unidad didáctica y la propuesta de mejora. Para valorar su intervención, los futuros profesores utilizan los criterios de idoneidad didáctica del enfoque ontosemiótico (Godino, 2013; Breda y Lima, 2016). El uso de estos criterios permite llevar a cabo un análisis sistémico de las diferentes facetas de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Se aplica una metodología fundamentalmente cualitativa, a través de la interpretación de los comentarios sobre creatividad que encontramos en algunos TFM, aunque también presentamos resultados cuantitativos. Primero, se ha realizado un registro de información con todos los TFM estudiados. En este registro se incluyen datos, tanto cualitativos como cuantitativos, que nos permiten extraer información para responder a las primeras dos preguntas que planteamos en el apartado anterior. Después, con aquellos TFM en los que encontramos comentarios sobre creatividad, se han elaborado fichas donde se recogen datos generales de cada trabajo, el número de referencias a la creatividad y los extractos del texto correspondientes. En la tabla 1 se muestra un ejemplo de estas fichas. También se ha realizado un resumen de cada uno de estos trabajos para poder tener una visión general y determinar el papel de la creatividad en el conjunto de la propuesta, con lo que pretendemos responder a la tercera pregunta de nuestro estudio.

Es importante señalar que para determinar los TFM que contienen referencias a la creatividad, se han considerado comentarios donde aparece explícitamente la palabra "creatividad" u otras de su misma red léxica: creativo, creación, crear, creador. De manera que otros comentarios con palabras que podrían relacionarse dependiendo del contexto, como "inventar" u "originalidad", quedan excluidos del análisis y resultados aquí presentados.

Título	Fracciones
Nombre del alumno	O. D.
Curso del máster	2011 - 2012

Curso donde se ha aplicado	1º de ESO
¿Qué contenido / proceso matemático se estudia?	Aritmética
¿Hay referencias a la creatividad en el trabajo?	Sí
En caso afirmativo, ¿cuántas hay?	1
Extracto	Trabajar las matemáticas de una forma creativa i experimental mediante la utilización del software de creación de partituras, con la finalidad de ofrecer a los alumnos una visión física y aplicada de las fracciones, fomentando la competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico, así como la competencia en el tratamiento de la información y la competencia digital.
Comentarios	Hace un comentario sobre trabajar de manera creativa las matemáticas mediante una actividad.

Tabla 1. Ejemplo de ficha con los datos de un TFM.

Resultados

El primer resultado hace referencia a la cantidad de TFM que incluyen comentarios sobre la creatividad. Como se muestra en la tabla 2, encontramos comentarios al respecto en 76 TFM del total de 141.

Promoción del máster	TFM con referencias a la creatividad	Total de TFM
2009 - 2010	9	15
2010 - 2011	13	21
2011 - 2012	16	34
2012 - 2013	14	24
2013 - 2014	24	47

Tabla 2. Comparación cuantitativa de los TFM con referencias a la creatividad desglosada por promociones del máster.

En cuanto a la segunda pregunta, se ha considerado el nivel al cual se dirigen las propuestas didácticas dividiendo los trabajos en 6 categorías que corresponden a: los cuatro niveles de Educación Secundaria Obligatoria; una categoría conjunta para los dos niveles de Bachillerato; y una categoría de otros trabajos donde aparecen propuestas para varios niveles. La tabla 3 muestra los resultados obtenidos.

Nivel	TFM con referencias a la creatividad	Total de TFM
1º ESO	7	21
2º ESO	22	34
3º ESO	15	30
4º ESO	23	41
Bachillerato	5	9
Otros	4	6

Tabla 3. Comparación cuantitativa de los TFM con referencias a la creatividad por niveles.

Entre los trabajos donde hay referencias a la creatividad encontramos diferentes reflexiones al respecto. Basándonos en los criterios de idoneidad didáctica del EOS y las interacciones entre idoneidades (Godino, 2013), se ha realizado una clasificación de los TFM. A continuación, se describen las principales categorías de esta clasificación.

1) Trabajos donde los comentarios sobre creatividad aparecen vinculados a la mejora de la idoneidad epistémica. En la propuesta de mejora de la unidad didáctica se incluyen cambios metodológicos, como el uso de contextos significativos o el planteamiento de proyectos interdisciplinares, para dar solución a los aspectos deficientes detectados en el análisis de la práctica. Los cambios metodológicos se relacionan con el aumento de la riqueza de procesos y la representatividad, indicadores de la idoneidad epistémica. Se plantea que estas estrategias también fomentan de alguna manera la creatividad. En algunos trabajos estas reflexiones se concretan en el diseño de nuevas actividades.

2) Trabajos donde la creatividad se relaciona con la competencia social y ciudadana, el desarrollo de la capacidad crítica y la responsabilidad. En estos casos, consideramos que la creatividad se vincula a la idoneidad ecológica, porque los comentarios tienen en cuenta el entorno social donde se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3) Trabajos en los cuales la creatividad se menciona en comentarios sobre la idoneidad mediacional. La estructura que identificamos es similar a la de la primera categoría, con la diferencia de que se proponen recursos manipulativos o herramientas TIC para solucionar los aspectos mejorables de la unidad didáctica. Estos recursos, relacionados con la idoneidad mediacional, facilitarían de alguna manera el fomento de la creatividad.

4) Trabajos con propuestas para mejorar el sistema de evaluación de la unidad didáctica y que incluyen en estos apartados referencias a la creatividad. En general, son trabajos donde se destaca la importancia de la evaluación formativa y se propone cambiar la manera de evaluar, más competencial y utilizando instrumentos como las rúbricas. La creatividad se relaciona con la competencia de aprender a aprender y la de autonomía e iniciativa personal. Los comentarios se vinculan sobre todo a la idoneidad cognitiva, la afectiva y la interaccional, porque se hace referencia al aprendizaje, la evaluación, la autorregulación del aprendizaje y la autonomía de los alumnos.

5) Trabajos en los que la creatividad aparece en comentarios referentes a la idoneidad interaccional. Se plantea que las interacciones de los alumnos en situaciones de aprendizaje cooperativo hace posible el desarrollo de la creatividad.
En algunos TFM la diversidad de comentarios hace que puedan relacionarse con varias de estas categorías. También, encontramos TFM donde se hace referencia a la creatividad en reflexiones generales sobre la labor docente o la actividad matemática, que no se incluirían en ninguna de las categorías anteriores.

Por último, en un TFM se desarrolla el tema de la pedagogía de la creatividad como uno de los ejes del apartado de búsqueda de bibliografía para solucionar los aspectos mejorables de la unidad didáctica. Se señala la postura de algunos profesores contraria a que sus alumnos participen de manera creativa en las clases y se apuesta por un cambio al respecto. Sin embargo, estas reflexiones no se ven reflejadas en nuevas actividades como propuesta de mejora.

Conclusiones

La creatividad aparece referenciada en más de la mitad de los TFM estudiados. No obstante, el grado de relevancia de los comentarios al respecto es muy diverso. Por un lado, encontramos trabajos con referencias generales y poco detalladas del componente creativo de las matemáticas. Por otro, hay trabajos donde la creatividad se trata de manera más extensa o se relaciona con aspectos centrales de la nueva propuesta. Los futuros profesores no recibieron ninguna indicación para que tratasen el tema de la creatividad en sus trabajos. Por tanto, podemos considerar que las reflexiones que hacen al respecto son una muestra de la importancia que le atribuyen a este concepto en la implementación de las clases y cómo lo relacionan con sus prácticas.

El nivel del grupo de alumnos al cual se dirige la unidad didáctica se podría relacionar con el componente de conocimiento de la teoría de la inversión (Sternberg, 2012). De esta manera, cabe esperar que a medida que aumenta el nivel de conocimiento de los alumnos, sea más factible que realicen una actividad matemática creativa, con el estímulo oportuno. La segunda pregunta hace referencia a esta posible relación, reflejada en los TFM de los futuros profesores. De todos modos, los datos analizados hasta ahora no permiten responder con claridad esta pregunta, puesto que algunas categorías incluyen pocos trabajos. Se prevé ampliar la muestra de TFM con las siguientes promociones del máster. Así, los resultados podrían ofrecer más información acerca de las cuestiones que aquí planteamos y otras.

Finalmente, con el objetivo de caracterizar los TFM donde aparecen referencias a la creatividad, se han identificado diferentes "rutas de desarrollo de la creatividad", en base a los criterios de idoneidad didáctica del enfoque ontosemiótico. Esta clasificación, aún sujeta a modificaciones por la incorporación de nuevos TFM o la reconsideración de los ya analizados, refleja la naturaleza polifacética del término creatividad.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el contexto de los Proyectos: EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y REDICE16-1520 (ICE-UB).

Referencias bibliográficas

Beghetto, R.A. y Kaufman, J. C. (2007). Toward a broader conception of creativity: A case for "mini-c" creativity. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts, 1*(2), 73-79.

Breda, A., Font, V., & Lima, V. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 8*(1), 4-41.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 13*(6), 1893–1918.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (en prensa). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*

Breda, A. y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, *5*(1), 74-103.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Lai, E.R. (2011). *Critical thinking: a literature review.* Disponible en, http://www.pearsonassessments.com/hai/images/tmrs/CriticalThinkingReviewFINAL.pdf

Mann, E.L. (2006). Creativity: the essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Pásztor, A., Molnár, G., & Csapó, B. (2015). Technology-based assessment of creativity in educational context: the case of divergent thinking and its relation to mathematical achievement. *Thinking Skills and Creativity, 18,* 32-42.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education, 29*(3), 75-80.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator, 14(1),* 19-34.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20-36.

Sternberg, R. J. (2012). The assessment of creativity: an investment-based approach. *Creativity Research Journal, 24*(1), 3-12.

AMBIENTES DE APRENDIZAJE PARA EL AULA DE MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD

Silvia Vrancken, Daniela Müller, Adriana Engler
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral. (Argentina)
svrancke@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar, aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen

La sociedad actual plantea la necesidad de diseñar ambientes de aprendizaje innovadores, que tengan en cuenta las nuevas formas de acceder y producir conocimiento. Se requieren prácticas educativas que puedan hacer del aula de matemática un ambiente en el que los estudiantes lleven adelante experiencias de aprendizaje, favoreciendo la construcción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático.
El propósito de este trabajo es compartir lo obtenido de una revisión bibliográfica, que nos permitió analizar el significado de un ambiente de aprendizaje y describir los aspectos más importantes que deben considerarse en su diseño y desarrollo, teniendo en cuenta aportes de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y su articulación con las tecnologías de la información y la comunicación.

Palabras clave: aprendizaje, enseñanza, ambientes, universidad, matemática

Abstract

Present-day society raises the need to design innovative learning environments, which consider new ways to have access to, and to construct knowledge. Educational practices are required to turn the mathematic classroom into an environment in which students carry out learning experiences, favouring the construction of knowledge and the development of mathematical thinking.This work is aimed at sharing the result of a bibliographic review, which allowed us to analyze the meaning of a learning environment and to describe the most important aspects that should be considered in its design and development, according to the contributions of inquiries on the teaching and learning of mathematics and its link with information and communication technologies.

Key words: learning, teaching, environments, university, mathematics

Introducción

Un gran desafío de la educación superior en la sociedad actual es preparar al estudiante para buscar y encontrar respuestas a los problemas que se plantean y renuevan constantemente. La matemática que necesitan aprender, especialmente las personas que estudian carreras no matemáticas, debe fomentar el surgimiento de habilidades, o competencias, requeridas para su labor profesional, "como parte de un conjunto de conocimientos que, al articularse con los provenientes de otras áreas del pensamiento posibiliten comprender la realidad y así contribuyan a su transformación mediante la resolución de problemas…" (García, 2014, p. 13).

En este contexto, desde las asignaturas del área matemática de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral nos propusimos lograr que los alumnos comprendan, planteen y resuelvan problemas concretos relacionados a las áreas de interés, desarrollen el pensamiento matemático y acrecienten su creatividad, espíritu crítico y capacidad de adquirir nuevos conocimientos en forma autónoma.

La consecución de estos objetivos requiere prácticas educativas en el aula para favorecer el otorgamiento de significado a los conocimientos que los estudiantes ya poseen, la construcción de nuevos y el desarrollo de su pensamiento matemático.

En el marco de la Educación Matemática, Cantoral, Montiel y Reyes (2014) expresan que las teorías que estudian y analizan los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática comparten la postura de que "el significado, el pensamiento y el razonamiento son producto de la actividad social" (p. 22), siendo las interacciones sociales el motor que estimula la actividad de los individuos de construir significados. De esta manera, reconocen la importancia de la actividad social en la construcción de conocimiento, pero asumida ésta en relación a los usos del conocimiento matemático. Según los autores, esto significa que la escuela o la universidad "debe proveer de conocimientos funcionales, esto es, de herramientas matemáticas importantes en sí mismas y para interactuar con el entorno que les rodea: poner en uso el conocimiento matemático" (p. 22).

Desde esta posición, se considera que, aunque la matemática es universal, su enseñanza no lo es, sino que se ubica en escenarios sociales y culturales específicos. Esto implica, que al momento de planificar propuestas para el aula, deberán tenerse en cuenta las realidades tanto de quien enseña como de quien aprende, atendiendo al escenario donde se contextualizan los saberes específicos.

Aprender matemática no se limita a la adquisición de conocimientos desde una perspectiva formal y teórica ni a la repetición memorística de algoritmos y resultados, sino que es consecuencia de construcciones sucesivas, que posibilitan, por un lado, el conocimiento de definiciones, teoremas y propiedades, y, por otro, el uso de esas nociones y teoremas para enfrentar problemas y nuevas situaciones.

Esto requiere dar al alumno un papel más activo, otorgándole responsabilidad de su propio proceso de aprendizaje. Según Cantoral, Reyes y Montiel (2014, p. 93):

> …el aprendizaje es un proceso complejo de significación compartida que ocurre en contextos específicos y es por tanto un proceso situado en el juego de prácticas socialmente compartidas en el mundo de las experiencias del aprendiz, dentro y fuera del aula y a lo largo de todas las actividades de su vida diaria.

Esta perspectiva rompe con el esquema según el cual el profesor enseña y el alumno aprende. Enseñar se refiere a la creación de las condiciones que facilitarán la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes. No por esto el rol del docente pierde importancia, sino por el contrario. Su función es la de guiar el aprendizaje, proponiendo actividades que favorezcan el proceso de pensamiento, que permitan que el alumno se enfrente a nuevas situaciones y proponga soluciones. Para lograr esto, se requiere que el docente diseñe, coordine y aplique distintas estrategias que favorezcan el aprendizaje.

Por otro lado, para que haya enseñanza y aprendizaje, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante en la interacción entre el profesor y sus alumnos. Cantoral, Montiel y Reyes (2014) expresan que los diseños didácticos que buscan el desarrollo del pensamiento matemático deben tener en cuenta no sólo el cómo enseñar, sino también el qué enseñar. Las situaciones de aprendizaje que se planteen en el aula deben fundamentarse en la problematización del saber. Esto significa asumir, en primer lugar, la legitimidad de toda forma de saber, ya sea popular, técnico o culto. Este saber se "…construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y el espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa… para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos" (p. 97).

Es preciso propiciar las condiciones que puedan hacer del aula de matemática un ambiente en el que los estudiantes desarrollen experiencias de aprendizaje, que fomenten procesos de exploración e indagación a través de estrategias de enseñanza que favorezcan la construcción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático.

Planteamos la necesidad de generar esos espacios, entornos o "*ambientes de aprendizaje",* de forma sistémica y organizada, en los que los estudiantes participen de manera consciente y activa en sus procesos de aprendizaje, teniendo en cuenta la problematización de los saberes matemáticos y las formas de ponerlo en uso, que favorezcan procesos de análisis y reflexión en el aula, que permitan dar sentido y significado a la actividad matemática.

El propósito de este trabajo es compartir lo obtenido de la revisión bibliográfica realizada, que nos permitió examinar diversas concepciones propuestas para los ambientes, así como las características y elementos que los constituyen. Presentamos el análisis de la definición de ambiente de aprendizaje y la descripción los aspectos más importantes que deben considerarse en su diseño y desarrollo, teniendo en cuenta las ideas planteadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y su articulación con las tecnologías de la información y la comunicación.

Ambientes de aprendizaje

La palabra ambiente fue introducida inicialmente por los geógrafos, quienes consideraban que la palabra medio no era suficiente para dar cuenta de la acción de los hombres sobre su medio. De esta manera, señala Duarte (2003), la utilización del término ambiente se deriva de la necesidad de mostrar la interacción del hombre con el entorno que lo rodea:

> Se trata de una concepción activa que involucra al ser humano y, por tanto, involucra acciones pedagógicas en las que quienes aprenden están en condiciones de reflexionar sobre su propia acción y sobre las de otros, en relación con el ambiente. (p. 99)

Teniendo en cuenta que la noción de ambiente derivó en otros ámbitos, como el de educación, Sauvé (1994, citado en Duarte, 2003) distingue seis concepciones sobre ambiente: como problema para solucionar, como recurso para administrar, como naturaleza para apreciar, como biosfera, como medio de vida y el ambiente comunitario para participar.

Cada una de estas concepciones, explica Duarte (2003), define prácticas que se complementan, de manera que los ambientes implican una realidad compleja y contextual, que requieren ser abordados desde la pluralidad de perspectivas.

Así, es importante comprender que trascienden totalmente la noción de espacio físico, concibiéndose como entornos de desarrollo humano, que tienen en cuenta especialmente las relaciones entre todos los actores que participan.

En educación, los ambientes de aprendizaje fueron concebidos originalmente como:

> …todos aquellos elementos físicosensoriales, tales como la luz, el color, el sonido, el espacio, el mobiliario, etc., que caracterizan el lugar donde un estudiante ha de realizar su aprendizaje. Este contorno debe estar diseñado de modo que el aprendizaje se desarrolle con un mínimo de tensión y un máximo de eficacia (Husen y Postlethwaite, 1989, citado por Morales, González, Carmona Soto, Torres, López y Zárate, 2000, p.5).

Más adelante, Bransford, Brown y Cocking (2007), presentan cuatro perspectivas sobre ambientes de aprendizaje, centrados en quien aprende, en el conocimiento, en la evaluación y en la comunidad. Si bien los caracterizan por separado, estas perspectivas se definen como un sistema de componentes interconectados que se apoyan mutuamente.

Al referirse a ambientes centrados en quien aprende, prestan atención especialmente a los conocimientos, habilidades, actitudes y creencias que los estudiantes traen al espacio escolar. Estar centrado en quien aprende significa construir en el aula a partir de sus conocimientos previos. Es importante descubrir qué piensan los estudiantes acerca de los problemas que enfrentan, discutir sus errores, y construir situaciones de aprendizaje que les permitan ponerlos alumnos en conflicto cognitivo y reajustar sus ideas.

Los ambientes centrados en el conocimiento buscan ayudar a los estudiantes a que comprendan y pueden transferir los conocimientos. Incluyen también un énfasis sobre la construcción de sentido de esos conocimientos.

Los ambientes de aprendizaje efectivos deberán centrarse también en la evaluación, proporcionando oportunidades de retroalimentación y de revisión y teniendo en cuenta que lo evaluado sea acorde con los objetivos de aprendizaje.
Al referirse a ambientes de aprendizaje centrados en la comunidad, tienen en cuenta los diversos ámbitos, desde el aula de clases, la escuela, el hogar, la ciudad, el país y el mundo.
Por otro lado, en el portal educativo “Colombia aprende”, definen:

> Un ambiente de aprendizaje es un espacio en el que los estudiantes interactúan, bajo condiciones y circunstancias físicas, humanas, sociales y culturales propicias, para generar experiencias de aprendizaje significativo y con sentido. Dichas experiencias son el resultado de actividades y dinámicas propuestas, acompañadas y orientadas por un docente. (Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia, s.f)

Valero, Meaney, Alrø, Fairhall, Skovsmose y Trinick (2008) consideran al ambiente de aprendizaje como una forma de interpretar la educación matemática como red compleja de prácticas sociales, constituida por diferentes dimensiones interrelacionadas. Entre estas dimensiones consideran los conocimientos adquiridos por los estudiantes, la diversidad cultural de los estudiantes, las perspectivas, opiniones y prioridades de enseñanza del docente, el contenido del aprendizaje, las herramientas o recursos que los estudiantes disponen para aprender, la interacción en el aula (entre estudiantes y entre estudiantes y docentes), padres, familias y amigos, que constituyen su grupos de referencia.

En base a lo expuesto, podemos concebir los ambientes de aprendizaje como escenarios construidos para favorecer de manera intencionada las situaciones de aprendizaje. Todo ambiente de aprendizaje tiene una intención formativa, orientándose a la construcción y apropiación de saberes que permitan el desarrollo de competencias en el estudiante, es decir que puedan ser utilizados por los individuos en las distintas situaciones que se le presenten en su vida cotidiana y en su trabajo profesional.

Viveros (s.f) señala, a partir del análisis de diversos estudios, algunos aspectos que es necesario considerar en los ambientes de aprendizaje:

- Un cuerpo teórico organizado y flexible, métodos heurísticos y habilidades metacognitivas que favorezcan la transferencia de habilidades de un dominio de conocimiento a otro.
- Modelo de aprendizaje como proceso activo, cooperativo, progresivo y autodirigido, que propicie el aprendizaje autónomo y busque la construcción de conocimientos y el otorgamiento de significados a partir de las experiencias en situaciones reales.
- Aprendizaje como proceso constructivo, autorregulado, intencional, autónomo.
- En los ambientes de aprendizaje se modifica la relación entre el docente y los alumnos. El alumno se vuelve responsable de sus procesos de aprendizaje. El docente deja de ser la única fuente de conocimiento, estimula y desafía al alumno, favorece la interacción con él y con sus pares.
- Herrera (2006) distingue cuatro elementos esenciales en un ambiente de aprendizaje:
- Un proceso de interacción o comunicación entre sujetos. La interacción puede ser de manera oral o escrita y, lo que es más importante, en diferentes direcciones entre los distintos actores, a manera de diálogo.
- Un grupo de herramientas o medios de interacción. Los recursos van desde los impresos (apuntes, libros) hasta los digitalizados (textos, imágenes, material multimedia). También se cuenta con el apoyo de otros medios provenientes de bibliotecas físicas y virtuales, hemerotecas, sitios web, etc.
- Una serie de acciones reguladas relativas a ciertos contenidos.
- Un entorno o espacio en donde se llevan a cabo dichas actividades. En él, diversos factores como iluminación, ventilación, mobiliario, acceso a computadoras y a internet, son fundamentales al planificar ambientes de aprendizaje y es necesario monitorear los recursos de la institución y de los estudiantes.

De esta manera, un ambiente de aprendizaje no sólo se refiere a un contexto físico y a recursos materiales, sino que constituye un entorno en el que interactúan personas con propósitos educativos. Estos entornos deben proveer los medios que permitan instrumentalizar el proceso de aprendizaje.

Incorporación de recursos tecnológicos a los ambientes de aprendizaje

Los avances tecnológicos de las últimas décadas y su inclusión en el ámbito educativo han favorecido la creación de ambientes de aprendizaje renovados. El desarrollo y uso de tecnologías de la información y la comunicación, entre las que se encuentran la computadora, los medios masivos de comunicación, los celulares y principalmente internet, ha sido asumido en gran medida por las universidades, requiriendo procesos de renovación e innovación en la formación de los futuros profesionales.

Cada vez se hace más notoria la utilización de recursos tecnológicos que buscan facilitar la tarea de enseñar y aprender. Los procesos de enseñanza y de aprendizaje se ven fortalecidos con la generación de distintas estrategias, apoyadas por el uso, dentro y fuera del aula, de software especializado, material audiovisual, herramientas digitales, entre otros recursos, con el propósito de diseñar formas alternativas de presentar y adquirir el conocimiento.
Una de las consecuencias más importantes del impulso que han alcanzado las nuevas tecnologías en el ámbito educativo, es la transformación de los tiempos así como de los espacios o entornos para el aprendizaje. Al respecto, Gros (2015, p. 59) señala: "Los espacios de aprendizaje están formados por una red en la que se combinan los espacios físicos y los espacios virtuales fortaleciendo la idea del aprendizaje en cualquier momento y en cualquier lugar". La autora agrega:

> Las tecnologías móviles permiten a los estudiantes de todas las edades operar a través de diferentes contextos. Los alumnos pueden iniciar un tema de trabajo en clase, a continuación, realizar una recogida de datos en casa o al aire libre, elaborar un nuevo conocimiento con la ayuda del software, y realizar un intercambio de conocimientos en el aula o en un entorno virtual. (p. 61)

Esta accesibilidad ha modificado sustancialmente el sentido y la forma de acceder y producir conocimiento. Estos cambios exigen que el estudiante evolucione hacia el aprendizaje autodirigido, autónomo y autorregulado.

El docente debe estar preparado para facilitar esos procesos, diseñando ambientes de aprendizaje innovadores, que consideren la articulación entre lo académico y el entorno sociocultural. Es el encargado de crear estos ambientes, seleccionando las estrategias y los recursos tecnológicos que faciliten que se establezcan relaciones cooperativas entre los estudiantes, de manera que cada uno de los miembros logre sus objetivos de aprendizaje y que, entre todos, construyan conocimiento aprendiendo unos de otros.

La posibilidad de trabajar en entornos virtuales de aprendizaje basados en las tecnologías de la información y la comunicación, permite superar las barreras espacio temporales y facilita tanto el aprendizaje individual como el colaborativo.
Herrera (2006) muestra cómo se potencian y amplían los elementos constitutivos de los ambientes de aprendizaje al incorporar el aula virtual, modificándose también las relaciones psicológicas entre los distintos actores, ya que se regulan a través de la interacción. Es en este punto, que las herramientas tecnológicas "actúan en la mediación cognitiva entre las estructuras mentales de los sujetos que participan en el proyecto educativo" (p. 3), constituyéndose en el factor central del aprendizaje.

Así, entre el aula tradicional y las posibilidades de acercamiento a materiales de aprendizaje a través de las tecnologías de la información y la comunicación, existe una gran cantidad de oportunidades de acceso a recursos de aprendizaje y de establecer conexiones entre lugares, personas y disciplinas. En este sentido, destacamos la reflexión de Gros (2015):

> Desde el punto de vista de la persona, el reto es dar significado a las conexiones entre las experiencias, datos e informaciones obtenidas en los diferentes espacios y recursos. Desde el punto de vista del profesional de la educación, el reto es diseñar situaciones que permitan dar sentido y coherencia a los espacios facilitando las conexiones y, por consiguiente, el aprendizaje. (p. 59)

De esta manera, las tecnologías de la información y la comunicación constituyen herramientas cuya utilidad va mucho más allá de lo instrumental, permitiendo mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Su integración exige nuestro esfuerzo permanente, en cuanto al conocimiento de las herramientas disponibles como a la capacidad para seleccionarlas de acuerdo a nuestras necesidades y a utilizarlas de manera adecuada.

Consideraciones finales

Lo expuesto a lo largo del trabajo nos lleva a considerar la importancia de entender la enseñanza y el aprendizaje como procesos no universales. El aprendizaje, como proceso de construcción de significados, se produce de manera diferente en cada estudiante, a partir de su experiencia individual y de la interacción con los demás. Para iniciarlo, es importante partir de sus conocimientos previos y plantear experiencias y problemas relacionados a contextos de la vida real, que permitan poner en uso el conocimiento matemático. Los ambientes de aprendizaje que se diseñen deben fomentar el aprendizaje autónomo, que motive a los estudiantes a asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje. Por otro lado, deben propiciar el trabajo colaborativo, generando espacios de interacción entre los estudiantes y de los estudiantes con el docente.

Como docentes con más de treinta años de experiencia en el aula universitaria, hemos trabajado siempre en pos de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, tratando de estudiar e incorporar a las clases los resultados de investigaciones en educación matemática. También hemos apoyado la incorporación de recursos tecnológicos, utilizados de una manera reflexiva en el aula. Sin embargo, notamos que cuesta mucho superar el paradigma tradicional de enseñanza y aprendizaje, y la concepción de que, si como docentes trasmitimos un conocimiento, los alumnos debieron recibirlo, comprenderlo y tienen que ser capaces de aplicarlo.

Planteamos el desafío de diseñar ambientes de aprendizaje innovadores, dinámicos y en constante cambio, ricos en experiencias significativas, que seguramente incluirán las nuevas tecnologías, pero cuyo énfasis principal deberá estar puesto en otros aspectos, como la manera en que trabajan los alumnos (individualmente e interactuando con sus compañeros y con los docentes), en los materiales y en las actividades que se propongan, que permitan al estudiante actuar y reflexionar sobre su propia actividad, favoreciendo el desarrollo de un pensamiento autónomo y crítico.

Referencias bibliográficas

Bransford, J.; Brown, A.; y Cocking, R. (2007). The design of learning environments. En J. Bransford,; A. Brown y R. Cocking (Eds.). *How People Learn: Brain Mind, Experience, and School* (pp. 117-142). Washington, D. C., National Academy Press. Recuperado el 02 de julio de 2017 de http://books.nap.edu//html/howpeople1/ch6.html

Cantoral, R; Montiel, G. y Reyes, D. (2014). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Pedagógica Escri/viendo*, *11(24),* 17-26.

Cantoral, R.; Reyes, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7(3),* 91-116. Recuperado el 10 de febrero de 2016 de http://www.redalyc.org/ articulo.oa?id=274032530006

Duarte, J. (2003). Ambientes de aprendizaje: una aproximación conceptual. *Estudios Pedagógicos*, *29,* 97-113. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id= 173514130007

García, J. (2014). Ingeniería, matemáticas y competencias. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación, 14(1),* 1-29.

Gros, B. (2015). La caída de los muros del conocimiento en la sociedad digital y las pedagogías emergentes. *Education in the knowledge society (EKS)*, *16(1)*, 58-68.

Herrera, M. (2006). Consideraciones para el diseño didáctico de ambientes virtuales de aprendizaje: una propuesta basada en las funciones cognitivas del aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación, 38(5),* 1-19. Recuperado el 2 de marzo de 2016 de http://rieoei.org/deloslectores/1326Herrera.pdf

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (Sin fecha). *Ambientes de aprendizaje. Desarrollo de competencias matemáticas.* Portal educativo "Colombia Aprende". Recuperado el 8 de junio de 2016 de http://www.colombiaaprende. edu.co/html/productos/1685/w3-article-288989.html

Morales, C.; González, Y.; Carmona V.; Soto, C.; Torres K.; López, O. y Zárate, M. (2000). *Ambientes de Aprendizaje Computarizados*. México: Instituto latinoamericano de la comunicación educativa. Recuperado el 20 de agosto de 2017 de http://investigacion.ilce.edu.mx/panel_control/doc/c36,ambientes,d1.pdf

Valero, P.; Meaney, T.; Alrø, H.; Fairhall, U.; Skovsmose, O. y Trinick, T. (2008). School mathematical discourse in a learning landscape: understanding mathematics education in multicultural settings. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *13(4)*, 69–94. Recuperado el 5 de junio de 2017 de http://www3.kau.se/kurstorg/files/1/ 53E9C9911db0d3639CptgtA386C6/13_4_069094_valero.pdf

Viveros, P. (Sin fecha). *Ambientes de aprendizaje. Una opción para mejorar la calidad de la educación.* Recuperado el 15 de febrero de 2016 de http://148.208.122.79/mcpd/ descargas/Materiales_de_apoyo_3/Viveros_Sánchez,J_Ambientes de aprendizaje_una opción para mejorar la educación.pdf

LA INVESTIGACIÓN BASADA EN DISEÑO COMO SUSTENTO DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE PARA EL AULA DE MATEMÁTICA

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral. (Argentina)
svrancke@fca.unl.edu.ar, aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar

Resumen

En este reporte se presenta un proyecto de investigación planteado con el propósito de renovar los ambientes de aprendizaje para el aula de matemática, que permitan favorecer aprendizajes significativos y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. El interés por diseñar nuevos productos para el aula y la necesidad de aportar conocimiento teórico sobre esos diseños y los resultados de su implementación, llevaron a seleccionar como marco metodológico la investigación basada en el diseño y los experimentos de enseñanza. Se realiza una revisión teórica sobre estos enfoques, analizando su pertinencia y alcances, así como sus principales características y fases.

Palabras clave: aprendizaje, enseñanza, ambientes, universidad, matemática

Abstract

This report presents a research project that is aimed at renewing the learning environments for the mathematics classroom, which allow promoting students' meaningful learning as well as the development of their mathematical thinking. The interest in designing new products for the classroom and the need for a theoretical knowledge about these designs, and the results of their implementation led to choose as the methodological framework, a research based on the design and teaching experiments. A theoretical review is performed based on these aspects, analysing their relevance and scope, along with the main characteristics and phases.

Key words: learning, teaching, environments, university, mathematics

Introducción

Como docentes de matemática en una carrera no matemática y como investigadoras en educación matemática, una preocupación permanente está relacionada con mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Se espera que los estudiantes puedan construir conocimiento significativo y funcional que les dé la posibilidad de enfrentar las situaciones más diversas en su vida cotidiana y profesional.

Es importante propiciar las condiciones que puedan hacer del aula de matemática un ambiente que favorezca la construcción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático. Es necesario que

se fomenten procesos de exploración a través de estrategias de enseñanza para que los estudiantes desarrollen experiencias de aprendizaje.

Se plantea la necesidad de generar esos ambientes de aprendizaje, de forma sistémica y organizada, en los que los estudiantes participen de manera activa, teniendo en cuenta la problematización de los saberes matemáticos y las formas de ponerlo en uso, que permitan dar sentido y significado a la actividad matemática.
Conocedoras de la importancia de fundamentar las innovaciones en el aula con los aportes de la investigación, resulta imprescindible explicar cómo, por qué, en qué contextos y condiciones funcionan en la práctica. Esto llevó a plantear el proyecto "Nuevos ambientes de aprendizaje que promueven el desarrollo del pensamiento matemático en Ingeniería Agronómica". Su objetivo principal es incorporar ambientes de aprendizaje al aula de matemática, que permitan la renovación de la enseñanza favoreciendo aprendizajes significativos y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

En este trabajo se presenta una breve descripción del marco teórico de la investigación planteada y luego, como punto central del trabajo, se realiza una revisión teórica sobre la metodología seleccionada para llevar adelante el proceso de investigación, la investigación basada en el diseño y los experimentos de enseñanza. Se analiza la pertinencia y los alcances de este enfoque, así como sus características y fases.

Marco teórico

En el marco de la Educación Matemática se han realizado en las últimas décadas un número considerable de investigaciones con el propósito de explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático. Si bien las mismas tratan múltiples problemáticas, aparece como punto en común el reconocimiento de la importancia de promover el desarrollo del pensamiento.

Al describir el pensamiento matemático, Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2003), destacan su desarrollo en el enfrentamiento cotidiano de los seres humanos a múltiples tareas, explicando:

> …el pensamiento matemático no se encuentra enraizado ni en los fundamentos de la matemática, ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana. (p. 19)

De esta manera se asume que la construcción de conocimiento matemático tiene muchos niveles y profundidades y el pensamiento matemático se desarrolla a lo largo de la vida de los individuos. Incluye, por un lado, pensamiento sobre conceptos matemáticos, y por otro, procesos avanzados del pensamiento, como la abstracción, la justificación, la visualización, la estimación o razonamientos bajo hipótesis.

Entonces, el pensamiento matemático debe operar sobre una red compleja de conceptos avanzados y elementales, articulados bajo diferentes contextos de representación, para construir y reconstruir significados con un carácter local y eventualmente temporal.

Se coincide con Cantoral, Montiel y Reyes (2014), quienes expresan que las teorías que estudian y analizan los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática comparten la postura de que "el significado, el pensamiento y el razonamiento son producto de la actividad social" (p. 22). De esta manera, las interacciones sociales son el motor que estimula la actividad de los individuos de construir significados. Los autores reconocen la importancia de la actividad social en la construcción de conocimiento, pero asumida ésta en relación a los usos del conocimiento matemático. Esto significa que la escuela o la universidad "debe proveer de conocimientos funcionales, esto es, de herramientas matemáticas importantes en sí mismas y para interactuar con el entorno que les rodea: poner en uso el conocimiento matemático." (p. 22)

Desde esta posición, se considera que, aunque la matemática es universal, su enseñanza no lo es, sino que se ubica en escenarios sociales y culturales específicos. Esto implica, que al momento de planificar propuestas para el aula, deberán tenerse en cuenta las realidades tanto de quien enseña como de quien aprende, atendiendo al escenario donde se contextualizan los saberes específicos.

Por otro lado, para que haya enseñanza y aprendizaje, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante en la interacción entre el profesor y sus alumnos. Generalmente se enfrenta a los alumnos a situaciones ficticias o sin relación con sus áreas de interés, con la vida cotidiana o con las ciencias. Esto provoca falta de disposición por parte de los estudiantes, ya que no existe una motivación para adquirir los conocimientos.

Los diseños didácticos que buscan el desarrollo del pensamiento matemático deben tener en cuenta no sólo el cómo enseñar, sino también el qué enseñar. Cantoral, Montiel y Reyes (2014) expresan que las situaciones de aprendizaje que se planteen en el aula deben fundamentarse en la problematización del saber. Esto significa asumir, en primer lugar, la legitimidad de toda forma de saber, ya sea popular, técnico o culto. Este saber se "…construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y el espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa… para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos." (p. 97)

En este contexto, la investigación plantea la incorporación de nuevos ambientes de aprendizaje, concibiéndolos como escenarios construidos para favorecer de manera intencionada las situaciones de aprendizaje. Se pretende llevar adelante un proceso sistémico y planificado, fundamentado en la teoría, que permita producir materiales para la enseñanza, presencial o virtual, tales como módulos de aprendizaje, unidades didácticas u otros recursos educativos. Las innovaciones irán más allá de los contenidos, ya que se planean como experiencias que permitan al estudiante actuar y reflexionar sobre su propia actividad. El proceso abarcará desde la revisión de los objetivos de aprendizaje, pasando por el diseño, desarrollo, implementación y evaluación de las propuestas, hasta la evaluación de todo el proceso de aprendizaje.

Metodología de investigación

Como procesos en construcción, los ambientes de aprendizaje demandan una constante mirada que posibilite calificar su desarrollo y su dinámica. Esto requiere la selección de una metodología de investigación que

favorezca la generación de conocimientos y el desarrollo de estrategias que enriquezcan la práctica en el diseño e implementación de estos ambientes.
Por otro lado, vincular el conocimiento matemático a los contextos de uso de ese conocimiento, exige reflexionar sobre la naturaleza del conocimiento matemático necesario para la enseñanza. Esto plantea preguntas como cuál es el conocimiento matemático que debemos presentar a los alumnos, cómo se aprende ese conocimiento, qué contextos y qué tipo de tareas favorecen el aprendizaje.

Se suma además la necesidad y el interés, como docentes e investigadores, de conocer qué sucede en el aula cuando los alumnos adquieren conocimiento.
Estos cuestionamientos ponen de manifiesto la necesidad de relacionar constantemente la investigación y la práctica.

En este contexto, surge la investigación de diseño como un enfoque metodológico sensible a la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje y, por lo tanto, adecuado para analizar qué ocurre y cómo ocurren estos procesos.
La investigación de diseño es un enfoque o paradigma de investigación de naturaleza cualitativa. Se trata de una familia de aproximaciones metodológicas desarrollada en el campo de las ciencias del aprendizaje.

Según Plomp (2013), la investigación basada en el diseño es el estudio sistemático de diseñar, desarrollar y evaluar intervenciones educativas (como programas, estrategias o los materiales de enseñanza y aprendizaje, productos y sistemas), como soluciones a problemas complejos de la práctica educativa, que al mismo tiempo tiene por objetivo avanzar en el conocimiento sobre las características de estas intervenciones y sobre los procesos de diseño y desarrollo de las mismas, con el propósito de desarrollar o validar teorías.

Los estudios de diseño se dirigen principalmente a comprender los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los que el propio investigador se encuentra implicado. Se destaca en esta perspectiva la idea de aprendizaje situado, es decir, la influencia del contexto, así como la relación fundamental entre los procesos individuales y sociales que se producen en el aula.
Según Molina, Castro, Molina y Castro (2011), la investigación de diseño "persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" (p.75). Su objetivo es: "…analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (p. 76).

Se caracteriza por la interdependencia entre el diseño instruccional y la investigación, buscando ayudar a crear y ampliar el conocimiento sobre el desarrollo e implementación de ambientes de aprendizaje innovadores. De esta manera, se refiere directamente a problemas de la práctica y, al mismo tiempo, conduce al desarrollo de conocimiento utilizable sobre el diseño, instrumentación y sostenimiento de entornos de aprendizaje innovadores.

Molina et al. (2011) señalan: "El diseño de ambientes de aprendizaje sirve como contexto para la investigación y, a su vez, tanto los análisis continuados que se van realizando como el análisis retrospectivo de la misma informan sobre el diseño permitiendo su mejora" (p. 76).

Acorde a estas características, la metodología debe permitir la documentación del aprendizaje matemático colectivo de la clase y el registro del desarrollo del razonamiento matemático individual de los estudiantes a medida que participan en los procesos en el aula.
Según Confrey (2006, citado en Molina et al., 2011, p. 76) es importante analizar:

> …qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los alumnos en las tareas, cómo interaccionan los alumnos y profesores, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción; todo ello mediante el estudio del trabajo de los alumnos, grabaciones de vídeos y evaluaciones de la clase.

Esta naturaleza de la investigación de diseño lleva a que el proceso de investigación incorpore siempre procesos sistemáticos de diseño educativo. Las actividades de análisis, diseño, evaluación y revisión iteran con carácter cíclico hasta lograr un equilibrio entre lo pretendido y lo logrado (Plomp, 2013).

Así, la investigación basada en el diseño intenta superar la brecha entre las investigaciones desligadas de la práctica educativa y las innovaciones realizadas de manera no rigurosa. Si bien la teoría que se genera a partir de una investigación de diseño es humilde, teniendo en cuenta que se desarrolla para un dominio específico, debe ser lo suficientemente amplia como para ser aplicada en otros contextos, como las aulas de otras escuelas o de otras ciudades o países. En estos casos, aclaran Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003), se puede hablar de transferibilidad.

Entre las limitaciones de las investigaciones de diseño, Molina et al. (2011) señalan las dificultades que surgen de la complejidad del análisis del mundo real, lo que lleva a que se manipule un gran número de variables, que muchas veces no pueden ser controladas. Otro problema es la coordinación de la participación de varios investigadores en la recogida de datos, la complejidad de la comparación entre diseños y la dificultad de delimitar el origen del conocimiento que los investigadores manejan a lo largo de la investigación, debido al diálogo continuo entre la teoría y la práctica.

Otra dificultad se relaciona con el proceso de recogida y manejo de gran cantidad de datos, así como la naturaleza de su procedencia. La recolección de datos incluye generalmente el trabajo de los estudiantes, evaluaciones antes y después de la instrucción, grabaciones de audio y video de toda la clase, entrevistas con estudiantes y profesores. Su análisis debe combinar tanto aspectos cualitativos como cuantitativos.

En este paradigma, una de las metodologías más utilizadas la constituyen los experimentos de enseñanza, cuya característica principal es la ruptura de la diferenciación entre docente e investigador, motivada por el propósito de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos (Steffe y Thompson, 2000).

Desde el enfoque de la investigación de diseño, un experimento de enseñanza consiste, de forma general, en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).
Cobb et al. (2003) señalan que existen distintos tipos de experimentos de diseño, de los cuales, teniendo en cuenta los objetivos de la investigación planteada en este trabajo, interesan:

- Experimentos de diseño uno a uno (profesor-experimentador y estudiante). Un equipo de investigación conduce una serie de sesiones de enseñanza con un pequeño número de estudiantes, con el objetivo de crear a pequeña escala un entorno para el aprendizaje en el aula ordinaria, de manera que pueda ser estudiado con mayor profundidad y detalle.
- Experimentos en el aula. Un equipo de investigación colabora con un profesor, que puede ser miembro del equipo de investigación, para asumir la responsabilidad de la enseñanza.

En conformidad con la investigación de diseño, un experimento de enseñanza contempla un ciclo de investigación en tres fases (Gravemeijer, 2004):
Fase 1: Diseño y planificación de la instrucción que comprende:

- La definición de los objetivos de aprendizaje que delimitan las metas a alcanzar.
- El diseño de tareas.
- La explicitación de una trayectoria hipotética de aprendizaje. Esto implica una predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes pueden evolucionar cuando resuelven las tareas propuestas.

La noción de trayectoria hipotética de aprendizaje es central en la investigación de diseño. Incluye, según Bakker y Van Eerde (2015), objetivos de aprendizaje, puntos de partida de los estudiantes con información sobre conocimientos previos, problemas matemáticos y suposiciones sobre los potenciales procesos de aprendizaje de los estudiantes y sobre cómo el docente podría apoyar estos procesos.

Simon y Tzur (2004) explican que la determinación de las tareas de aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje son interdependientes. Las tareas se eligen teniendo en cuenta las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje. Las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas. Se fundamenta en las siguientes suposiciones (Simon y Tzur, 2004, p. 93, la traducción es propia):

- La generación de una trayectoria hipotética de aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes involucrados.
- Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares.
- Las tareas matemáticas aportan herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares y son, por lo tanto, una parte clave del proceso de instrucción.
- Debido a la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el docente se involucra regularmente en la modificación de todos los aspectos de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Fase 2: Experimentación en el aula o en un entorno virtual de las tareas diseñadas. En esta fase, los investigadores y los profesores utilizan actividades y métodos de enseñanza que, según la trayectoria hipotética de aprendizaje, parecen más apropiados en cada momento.
Fase 3: Análisis retrospectivo. El equipo docente e investigador observa y analiza la experiencia, apoyando los análisis desde las referencias teóricas que fundamentan la trayectoria hipotética de aprendizaje. En esta fase se trata de investigar si los materiales diseñados permiten generar la actividad esperada, y si la actividad cognitiva y social desarrollada por los estudiantes se corresponde o no con lo previsto en la primera fase.

Una característica importante de esta metodología es que sus componentes prospectivos y reflexivos no se separan en la formulación de hipótesis, antes y después de un experimento de enseñanza. Al implementar los experimentos, los investigadores confrontan el aprendizaje hipotético, es decir, sus conjeturas (la parte prospectiva) con sus observaciones, el aprendizaje real (la parte reflexiva). La reflexión se puede realizar al final de cada clase, aún si el experimento de enseñanza es más largo, y puede llevar a cambios en el plan para las siguientes clases (Cobb et al., 2003).
El análisis e interpretación se realiza de manera colaborativa entre todas las componentes del equipo docente e investigador y puede dar lugar a realizar modificaciones en las tareas propuestas a los estudiantes. El producto de esta forma de trabajar es:

- una secuencia de actividades y formas de llevarla a cabo,
- un nuevo conocimiento sobre cómo parece funcionar la instrucción, y
- una información que se transforma en material docente.

De esta manera, se espera que el alumno construya conocimiento, que e investigador-docente construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento por parte de los alumnos y que los demás investigadores construyan conocimiento sobre ambos y sobre sus interacciones (Molina et al., 2011).
Por todo esto, consideramos que los experimentos de enseñanza constituyen una metodología de investigación acorde a este proyecto, ya que permite interrelacionar la investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje y la práctica en el aula, a través del diseño e implementación de ambientes de aprendizaje.

Consideraciones finales

Los asuntos relacionados a la Educación Matemática toman actualmente cada vez mayor importancia. Los requerimientos de la sociedad exigen al profesional una visión científica amplia y su formación en relación a aspectos formativos de la matemática y a las formas de pensamiento que le faciliten estar preparado para interpretar la realidad.
Teniendo en cuenta los objetivos planteados, con esta investigación se pretende incorporar nuevos ambientes de aprendizaje para el aula de matemática, que permitan la renovación de la enseñanza favoreciendo aprendizajes significativos y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Por esto, los resultados más importantes surgirán de la generación e implementación de distintas actividades de aula, en las que se utilicen nuevas formas de aplicar, transferir y relacionar conocimientos. Se espera desarrollar recursos de calidad que permitan trabajar los contenidos de la asignatura de manera conjunta o complementaria al trabajo en el aula, presencial o virtual, y que sean pertinentes para las capacidades, los estilos de aprendizaje, las experiencias, las concepciones previas y las habilidades de los alumnos.
Del análisis de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje surgirán indicadores importantes. Cuando el profesor se encuentra ante sus alumnos en la clase, se espera que enseñe un conocimiento específico y que los estudiantes aprendan. Sin embargo, si no comprendemos la manera en que opera su pensamiento matemático, no podremos lograr que el aprendizaje sea significativo. Proyectamos analizar sus producciones ante las tareas matemáticas, de manera de comprender el proceso de construcción de conocimiento, teniendo en cuenta que en esa labor, su pensamiento está en permanente constitución.

Se espera provocar un impacto significativo en el mejoramiento de la enseñanza y en especial del aprendizaje de distintos contenidos curriculares de matemática en el primer año de la universidad en carreras de Ingeniería mediante el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

Toda investigación basada en las perspectivas teóricas vigentes, que busque reflexionar y debatir sobre distintos aspectos de la formación matemática, en pos a mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, resulta una contribución importante a las metas de la educación actual.

Referencias bibliográficas

Bakker, A. y Van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education. En A. Bikner-Ashbash, y N. Knipping (Eds.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods*. (pp. 429-466). Bremen, Germany: Springer.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R; Montiel, G. y Reyes, D. (2014). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Pedagógica Escri/viendo*, *11(24),* 17-26.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*. *32*(1). p. 9-13.

Gravemeijer, K. (2004) Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, 6(2), 105-128.

Molina, M.; Castro, E.; Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29(1)*, 75-88.

Plomp, T. (2013). Educational Design Research: An Introduction. En Plomp, T. y Nieveen, N. (Eds.).*Educational Design Research. Part A: An introduction*. (pp. 10-51). Enschede, the Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Simon, M. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

REGULARIDADES EN EL ANÁLISIS DIDÁCTICO QUE REALIZAN LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN SITUACIONES VALORATIVAS

Adriana Breda
Universidad de Los Lagos. (Chile)
adriana.breda@gmail.com

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar cuáles son los criterios utilizados por los profesores para justificar que sus propuestas didácticas son innovadoras y representan una mejora en la enseñanza de las matemáticas. Para eso, se analizarón cualitativamente 29 trabajos de fin de máster realizados en un Máster Profesional en Matemáticas, buscando identificar el tipo de innovación elegida, las fases del proceso de instrucción contempladas y los criterios de idoneidad utilizados. Se concluye que: a) en la mayor parte de los trabajos, se lleva a cabo la innovación matemática y la innovación en recursos informáticos; b) el aspecto relacionado a los procesos de instrucción presenta un rol secundario, dado que la mayoría de las propuestas no fueron implementadas y c) los criterios utilizados, se relacionan, sobre todo, con los criterios de idoneidad epistémica, ecológica y mediacional al paso que lo cognitivo, lo emocional y lo interaccional están poco presentes.

Palabras clave: análisis didáctico, criterios de idoneidad

Abstract

The aim of this paper is to analyze the criteria used by teachers to justify that their didactic proposals are innovative and represent an improvement in mathematics teaching. That´s why, twenty-nine final research works of Mathematics Master's Degree students were analyzed, seeking to identify the type of innovation chosen, the proposed phases of the training process, as well as the suitability criteria that were used. It is concluded that: a) in most of the works, mathematical innovation and innovation in computer resources are carried out; b) the aspect related to the processes of instruction plays a secondary role, since most of the proposals were not implemented, and c) the used criteria are related, above all, to the criteria of epistemic, ecological and mediating suitability, meanwhile, cognitive, emotional and interactional elements are limited.

Keywords: didactic analysis, suitability criteria

Introducción

Las políticas de formación continuada tienen por objetivo general que los profesores realicen una práctica que sea cada vez mejor, de más calidad. En un intento de formar a los profesores de matemáticas en ejercicio, se inició en 2010, el *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* (PROFMAT), constituido como un curso de postgrado, semipresencial, ofrecido en todo el territorio nacional de Brasil

que tiene como objetivo principal atender a los maestros de matemáticas que trabajan en la enseñanza básica, especialmente en las escuelas públicas. Su objetivo es la mejora de su formación profesional, con énfasis en el dominio profundizado del contenido matemático relevante para su desempeño docente.
Las orientaciones establecidas en el PROFMAT exigen que el trabajo final de máster debe ser desarrollado sobre temas específicos del currículo de matemáticas de la etapa de Enseñanza Básica de forma innovadora y que tenga, preferencialmente, aplicación directa en el aula (PROFMAT, 2013). Dicho trabajo, llamado *Trabajo de Fin de Máster* (TFM) es un trabajo de reflexión final en el que el estudiante debe mostrar, por medio de una presentación oral y pública, que, en alguna medida, alcanzó los objetivos del programa, los cuales le capacitan para mejorar su actuación como profesor de matemáticas en un centro de Educación Básica. En este sentido, según las orientaciones del PROFMAT, el TFM debe ser un espacio para que se efectúe un trabajo transversal contemplando buena parte de los saberes previstos en el máster.

El trabajo que se presenta aquí tiene por objetivo investigar cuáles son los criterios utilizados por los profesores que realizan el *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT),* para justificar que sus propuestas didácticas son innovadoras y representan una mejora en la enseñanza de las matemáticas que se realiza habitualmente.

Marco teórico

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas se concibe que la mejora de la enseñanza de las matemáticas se puede materializar en las distintas fases del proceso de instrucción realizado por el profesor por medio, entre otros, de la incorporación de: i) las tendencias en la enseñanza de las matemáticas, ii) los principios y estándares para una enseñanza de las matemáticas de mejor calidad; y, particularmente, iii) los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemotico. A seguir explicamos brevemente cada uno de ellos.

Fases del proceso de instrucción

La primera fase de un proceso de instrucción es el diseño de una secuencia de tareas para enseñar un determinado tema. Esta secuencia debe tener en cuenta: un tiempo determinado, un público al que se destina y, preferiblemente, las actividades propuestas de manera detallada. La segunda fase es la implementación de la planificación. Por último, la tercera etapa es la evaluación del proceso de instrucción implementado y, si es el caso, su rediseño, (Godino, Contreras & Font, 2006). Para dichos autores, un proceso de instrucción implica una secuencia de configuraciones didácticas que incluyen: (i) una configuración epistémica, se refiriere a una tarea, los procedimientos para su resolución, el lenguaje, los conceptos, las proposiciones, los argumentos; (II) una configuración instruccional, es la red de aspectos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego en la resolución de la tarea; (III) una configuración cognitiva, red de conocimientos personales (conocidos y/o aprendidos) que se ponen en juego en la implementación. Por otro lado, Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009), argumentan que una fase importante de los procesos de instrucción es su evaluación y rediseño (Breda, Font y Lima, 2015a), lo que permite al profesor centrarse en la mejora de sus futuras implementaciones.

Tendencias en la enseñanza de las matemáticas

Las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas es una primera manera, un poco difusa, de observar consensos en la comunidad que se preocupa por la educación matemática. Estas tendencias se pueden considerar como regularidades que se pueden hallar en los discursos sobre la mejora de la enseñanza de las matemáticas, ya que se considera que la enseñanza realizada según estas tendencias es de calidad. Las principales tendencias que se tuvieron en cuenta para generar el constructo criterios de idoneidad didáctica fueron: la incorporación de nuevos contenidos, presentación de una matemática contextualizada, dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos (resolución de problemas, modelización matemática, etc.), enseñanza y aprendizaje de tipo activo (constructivista), considerar que saber las matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos, principio de equidad en la educación matemática obligatoria y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC), (Font, 2008).

Principios NCTM

El caso paradigmático de reconversión de algunas de las tendencias comentadas anteriormente en principios explícitos, es el caso de los principios y estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000). Precisamente, este caso es un buen ejemplo de cómo se genera una lista de principios siguiendo un proceso que procura generar un amplio consenso. En el proceso seguido para establecer dichos principios y estándares intervinieron profesores, formadores de profesores de matemáticas, representantes de las administraciones educativas, investigadores y matemáticos, todos ellos con gran experiencia educativa, también participaron asociaciones de profesores y los documentos elaborados se difundieron en congresos para su discusión. Los principios consensuados fueron: currículum, enseñanza, aprendizaje, evaluación, tecnología e igualdad.

Criterios de idoneidad didáctica

Tal como se muestra en la revisión de la literatura realizada en Breda, Font y Lima (2015a), la noción de idoneidad didáctica ha tenido un impacto relevante en la formación de profesores en diferentes países (Mallart, Font y Malaspina, 2015; Seckel y Font, 2015; Pochulu, Font y Rodriguez, 2015). Dicho impacto está relacionado con la idea de que uno de los componentes del conocimiento didáctico-matemático del profesor es aquél que permite valorar y justificar la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, (Pino-Fan, Font y Breda, 2017). Por esta razón, en esta investigación se ha tomado como referencial teórico para analizar las categorías utilizadas para justificar la mejora de la enseñanza de las matemáticas, que se deriva de las propuestas innovadoras de los TFM, los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS, (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, 2015):

> 1. Idoneidad Epistémica, para evaluar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas". 2. Idoneidad Cognitiva, para evaluar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar. 3. Idoneidad Interaccional, para evaluar si las interacciones

> resuelven dudas y dificultades de los alumnos. 4. Idoneidad Mediacional, para evaluar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción. 5. Idoneidad Emocional, para evaluar la implicación (intereses, motivaciones, etc.) de los alumnos durante el proceso de instrucción. 6. Idoneidad Ecológica, para evaluar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional (Font, Planas y Godino, 2010, p. 101).

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada una de las facetas del proceso de estudio.

Metodología

A partir de una metodología de investigación cualitativa, se seleccionaron veintinueve TFM realizados y publicados en el estado de Rio Gran del Sur, desde el primer semestre de 2013 hasta el segundo semestre de 2014. El análisis se realizizó en 4 fases: en la primera fase se clasificó el tipo de innovación desarrollada en los trabajos de fin de máster, en la segunda fase se identificaron las fases del proceso de instrucción contempladas (planificación, implementación y rediseño), en la tercera fase se hizo un mapeo de las caracteristicas en el análisis didáctico realizados en los TFM para justificar que la propuesta apresentada representa una mejora en la enseñanza de las matemáticas (con base en los criterios de idoneidade didáctica) y en la cuarta fase se estudió la relación que hay entre las propuestas implementadas y el tipo de análisis didáctico realizado.

Resultados

En relación a la primera fase, tipos de innovaciones, los resultados muestran que los profesores tienen en cuenta, básicamente, tres tipos: i) matemática, en la que se contempla la incorporación de contenidos de nivel superior en la Educación Básica, o bien el estabelecimiento de conexiones intramatemáticas o extramatemáticas; ii) de recursos, que se caracteriza por la incorporación de materiales visuales y manipulativos y la incorporación de recursos informáticos; iii) en valores, dónde se introduce el pensamiento crítico y la ciudadanía.

En Breda, Font y Lima (2015b), se muestra que las justificaciones dadas por los profesores en relación a la incorporación de contenidos de nivel superior en la Educación Básica (Matemática Discreta, Introducción al Cálculo Diferencial e Integral, Geometría Proyectiva, entre otros) son las que la incorporación de contenidos de nivel superior permite: 1) nuevas formas de relacionar y acercar los contenidos matemáticos, 2) la realización de procesos relevantes (por ejemplo, la generalización, la modelación de situaciones extramatemáticas, establecimiento de relaciones intramatemáticas, de significación), 3) clases más atractivas que despiertan el interés de los estudiantes.

Breda, Lima y Pereira (2015) muestran que las justificaciones dadas por los profesores para el uso de las TIC (*GeoGebra*, *Winplot*, *wxMáxima*, Hoja de Cálculo, *Widgets*) son que el uso de estas herramientas informáticas hacen las propuestas más atractivas y motivadoras, permiten un aprendizaje constructivista

y significativo mediante la interacción profesor-alumno-software y posibilitan la riqueza de los procesos matemáticos, lo que contribuye a la apropiación de los conocimientos matemáticos de los estudiantes.

En Breda, Font, Lima y Pereira (2017) se muestra que las justificaciones dadas por el profesor en relación a la innovación en valores (desarrollo de la ciudadanía y pensamiento crítico) es que las actividades por él propuestas son significativas a los estudiantes, dado que los estimula a reconocer, interpretar, actuar y tomar decisiones en el mundo donde viven, además de motivarlos.

En relación a la segunda fase, etapas del proceso de instrucción contempladas, trece de los TFM presentan la planificación de una secuencia didáctica, once realizan la implementación, sólo uno incluye el rediseño y cuatro no presentan ningún proceso de instrucción.

En relación a la tercera fase, las características en el análisis didáctico realizado segundo los criterios de idoneidad didáctica, evaluamos el nivel del uso de cada criterio (epistémico, cognitivo, medios, interactivo, emocional y ecológico) en cada TFM. Para eso, utilizamos una escala discreta de 0 a 3. Cero indica que el autor del TFM no tiene en cuenta, en su análisis didáctico determinado criterio; uno indica si el autor utiliza de manera esporádica alguno de los componentes o descriptores perteneciente a un determinado criterio; dos significa que el criterio tiene un peso importante en la argumentación y, en ese sentido, el autor contempla gran parte de los componentes y sus respectivos descriptores; el nivel tres corresponde a la gran relevancia que el autor da cuando utiliza con profundidad los componentes y descriptores contemplados en determinado criterio de idoneidad. Es importante señalar que el nivel de cada criterio fue establecido, no sólo teniendo en cuenta el número de componentes y descriptores de cada criterio asumidos por el autor del TFM, sino también, a la profundidad que el autor da a un determinado componente.

Cuadro 1. Ejemplo de uso del nivel de los criterios de idoneidad por los profesores que asumían la innovación matemática (conexiones extramatemáticas) en sus TFM. Fuente: Breda (2016).

TFM	Epistémico				Cognitivo				Mediacional				Interaccional				Emocional				Ecológico				Proceso de Instrucción	Innovación
	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3		
Ehlert (2014)		1				1				1			0					1						3	Diseño	Conexiones Extramatemáticas
Oliveira (2013)			2			1				1				1				1					2		Diseño	Conexiones extramatemáticas
Fortes (2014)		1				1				1			0					1					2		Diseño	Conexiones extramatemáticas
Bartz (2014)			2				2				2				2					3				3	Diseño e implementación	Conexiones extramatemáticas
Rodrigues (2014)				3				3				3				3				3			2		Diseño e implementación	Conexiones extramatemáticas
Abeeg (2014)				3				3				3				3				3				3	Diseño e implementación	Conexiones extramatemáticas

La tercera fase del análisis nos ayuda a concluir que los TFM que implementaron la propuesta didáctica presentan un nivel más equilibrado y elevado en el uso de los criterios de idoneidad didáctica comparado a las propuestas que no fueron implementadas (cuarta fase del análisis). Este tipo de resultado nos conlleva a un indicativo de que el nivel en análisis didáctico en los trabajos que implementan la propuesta está mucho más desarrollado y más fino en relación a los trabajos que no contemplaron las fases de implementación y/o rediseño de los procesos de instrucción.

Estudio de un caso donde se presenta la implementación de una propuesta de innovación matemática

Este caso tuvo como innovación la introducción de contenidos de nivel superior en la Educación Básica, en particular, la introducción de las nociones intuitivas del calculo integral en el tercer año de la Enseñanza Media.
En relación a la idoneidad epistémica, Lopes (2014) justifica la calidad 'innovadora' de su propuesta, señalando que ésta fomenta que los alumnos realicen procesos matemáticos relevantes, como conexiones, construcciones significativas, resolución de problemas, modelación, etc.

En relación a la idoneidad cognitiva, el profesor realiza una evaluación de los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema. Por otro lado, los resultados de aprendizaje, según el profesor, fueron alcanzados por los alumnos, "para lo cual se tiene una confirmación de que los métodos de Arquímedes y de Riemann se encuentran en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes" (Lopes, 2014, p. 19). En cuánto al aprendizaje, además de la evaluación inicial el profesor realiza tres evaluaciones formativas que muestran la apropiación de los conocimientos/competencias implementadas. Con dichas evaluaciones el profesor concluye que el aprendizaje fue alcanzado claramente para el tema del cálculo de áreas de cuadriláteros y triángulos, y para el método de Arquímedes, pero no se puede afirmar lo mismo para el método de *Riemann*, lo cual atribuye a la falta de tiempo.

El profesor, de manera implícita, utiliza todos los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS. Un problema a resaltar es que el profesor evidencia el problema de encontrar un equilibrio entre los criterios de idoneidad; por un lado, el autor plantea una innovación con una alta idoneidad epistémica y en su reflexión se evidencia que además se preocupa por conseguir una alta demanda cognitiva. No obstante, para lograr esto renuncia a algunos contenidos previamente planificados, y en particular, no consigue resolver el problema inicial que había propuesto, en ese sentido el aprendizaje no fue completo, esto se debió a la falta de tiempo, es decir, no logró una buena idoneidad mediacional.

Consideraciones

De lo estudiado se concluye que en la mayor parte de los trabajos se lleva a cabo la innovación matemática y la innovación en recursos informáticos. El aspecto relacionado a los procesos de instrucción presenta un rol secundario - no se considera obligatorio el proceso de instrucción. Observamos, también, que los criterios utilizados para justificar que las propuestas promueven una mejora en la enseñanza de las matemáticas, se relacionan, sobre todo, con los criterios de idoneidad epistémica, ecológica y, en menor

medida, con lo criterio mediacional y que otros criterios como lo cognitivo, lo emocional y lo interaccional están poco presentes.

Fue posible inferir que los profesores que implementan la propuesta manejan una mayor cantidad de criterios (y de sus descriptores), y además, están preocupados por el equilibrio entre de los diferentes criterios (epistémico, cognitivo, mediacional, interaccional, emocional y ecológico). En el grupo de profesores que no han implementado la propuesta, no presentan reflexiones sobre el tema del equilibrio.

El análisis de los TFM presentados muestran que la reflexión llevada a cabo por los profesores va más allá de una reflexión espontánea, sin embargo, esta reflexión no es lo suficientemente guiada, entre otras razones, a la falta de una pauta explícita y amplia que sirva para orientar el análisis didáctico de los profesores que realizan el PROFMAT.

Para estimular la mejora de la enseñanza de las matemáticas y causar un impacto positivo en la práctica se requiere mucho más que la profundización de los contenidos disciplinares y la planificación de una propuesta "innovadora". Nuestros análisis muestran que el profesor debe implementar y analizar de manera sistemática la secuencia de tareas planificadas e implementadas, (Breda, Pino-Fan y Font, 2016, 2017). En este estudio se comprobó que: a) cuando las justificaciones son claramente valorativas se organizan de manera implícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica y b) que la valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad.

Agradecimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y CAPES/PDSE, proceso número 99999.004658/2014-00.

Referencias bibliográficas

Breda, A. (2016). *Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado profmat no rio grande do sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso*. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil:

Breda, A., Font, V. e Lima, V. M. R. (2015a). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V., Lima, Valderez M. R. (2015). Propuestas de incorporación de contenidos matemáticos de nivel superior en la educación básica: un estudio de los trabajos finales de curso del Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 8(3), 53-65. Doi: 10.3895/rbect.v8n3.3189.

Breda, A., Font, V., Lima, Valderez M. R., Pereira, Marcos Villela. (2017). Criterios utilizados por un profesor para justificar su propuesta didáctica: un estudio de un trabajo de fin de máster. In: *Segundo Congreso Internacional*

Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico, Granada. II CIVEOS. Granada: J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín, p. 1-61.

Breda, A. y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 5, 74-103.

Breda, A., Lima Valderez M. R., Pereira, Marcos Villela. (2015). Papel das TIC nos trabalhos de conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional: o contexto do Rio Grande do Sul. *Práxis Educacional (Online)*, 11 (19), 213-230.

Breda, A., Pino-Fan, L. e Font, V. (2016). Establishing criteria for teachers' reflection on their own practices. In Csíkos, C., Rausch, A. & Szitányi, J. (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp-283). Szeged, Hungary: PME.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Font, V. (2008). Enseñanza de las matemáticas. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (Ed.), *Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (21-62). Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Font, V. (2015*). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Documento no publicado. Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universitat de Barcelona.

Font, V., Planas, N., Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje, 33(1), 89-105.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education.*ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Contreras A. e Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. e Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59–76.

Lopes, A. (2014). *Um relato sobre à introdução às somas de Riemann na educação básica.* Dissertação de Mestrado. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Federal de Santa Maria, Brasil.

Mallart, A., Font, V. & Malaspina, U. (2015). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos*, 38(152), 14-30.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA and National Council of Teachers of Mathematics.

Pino-Fan, L. R., Font, V., Breda, A. Mathematics teacher Knowledge and Competences Model Based on the Onto-Semiotic Approach. Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L., & Choy, B.H. (Eds.). (2017). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4). Singapore: PME.

Pochulu, M., Font, V. & Rodríguez, M. (2015). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1), 71-98.

PROFMAT (2013). Uma análise quali-quantitativa de perfis de candidatos a o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Sociedade Brasileira de Matemática.

Seckel, M.J., & Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Práxis Educacional*, 11(19), 55-75.

INCIDENCIAS EN LATINOAMÉRICA DE UN MARCO TEÓRICO INCLUSIVO EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA II

Vicenç Font[1], Luis R. Pino-Fan[2], Adriana Breda[2], María Seckel[3]
[1]Universitat de Barcelona. (España), [2]Universidad Los Lagos. (Chile), [3]Universidad Católica del Maule. (Chile)
vfont@ub.edu, luis.pino@ulagos.cl, adriana.breda@ulagos.cl, mjseckel@gmail.com

Resumen

El objetivo de este trabajo es resumir lo realizado al seno del Grupo de Discusión (GD) de la RELME31 "Incidencias en Latinoamérica de un Marco Teórico Inclusivo en la Investigación en Educación Matemática". Este GD se llevó a cabo, por segundo año consecutivo, en el marco de la RELME, con el objetivo de reflexionar sobre las implicaciones del modelo teórico inclusivo conocido internacionalmente como *Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos* (EOS), en las investigaciones sobre Educación Matemática realizadas en Latinoamérica.

Palabras clave: enfoque ontosemiótico, competencias y conocimientos del profesor

Abstract

The aim of this paper is to summarize what was done within the Discussion Group of the 31st RELME, "*Effects of an Inclusive Theoretical Framework in Mathematical Education Research in Latin America*". This group of discussion was carried out, on two consecutive years, within the framework of the RELME, with the aim to reflect on the implications of the inclusive theoretical model, known internationally as Onto-Semiotic Approach (OSA), to mathematical knowledge and instruction, in the Mathematics Education research carried out in Latin America.

Introducción

El Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), es un marco teórico inclusivo modular que ha ido ganando cada vez más atención en la comunidad internacional, y más específicamente en la iberoamericana, de investigación sobre Didáctica de la Matemática, aspecto que se refleja en diversas publicaciones (e.g., Godino, 2012; Godino y Contreras, 2017). En el marco de la Relme 30, en Monterrey, México, se dio inicio al Grupo de Discusión (GD) "Incidencias en Latinoamérica de un Marco Teórico Inclusivo en la Investigación en Educación Matemática" (Font, Pino-Fan y Breda, 2017), y debido al éxito obtenido, en el marco de la Relme 31 en Lima, Perú, los organizadores de este Grupo de Discusión fuimos invitados para darle continuidad, llevándolo a cabo por segundo año consecutivo. El GD se ha convertido en un espacio para profesores e investigadores interesados por el uso del EOS, tanto en investigaciones como en la práctica docente.

En general, el balance de este segundo año del GD es muy bueno, pues se contó con la participación de cerca de 55 investigadores asistentes a la RELME 31. En este trabajo presentamos el resumen del trabajo realizado al seno de este grupo de la RELME.

Método de trabajo del grupo de discusión

Se llevaron a cabo dos sesiones de 90 minutos, en las cuales se discutieron los trabajos que, previo a la RELME31, fueron recibidos, revisados y aceptados por los organizadores. Para hacer más dinámica y centrar la discusión, los trabajos presentados fueros divididos en cuatro mesas temáticas: *i*) Significados de los objetos matemáticos y conocimiento del profesor; *ii*) Criterios de idoneidad y sus aplicaciones; *iii*) Currículum y evaluación en el EOS; *iv*) Procesos argumentativos en el EOS. Después de cada mesa se abrieron espacios de discusión y reflexión.

La primera sesión comenzó con una pequeña bienvenida al GD y se explicó la dinámica a seguir. Posteriormente, el Dr. Juan D. Godino realizó una charla introductoria en la cual se abordó, entre ostros aspectos, la relevancia de las publicaciones actualmente disponibles en el sitio web del EOS (http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/index.html). También explicó el impacto de los trabajos presentados en el Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico (II CIVEOS), detallando el número y porcentaje de inscritos y visitantes, los cuales correspondieron a 30 países de cuatro continentes (ver Godino y Contreras, 2017). Después de la intervención del Dr. Godino, dio inicio el desarrollo de las mesas temáticas, lo cual presentamos en la siguiente sección.

Desarrollo de las mesas temáticas

En la primer mesa temática, *Significados de los objetos matemáticos y Conocimiento del Profesor*, se profundizó en las herramientas teórico-metodológicas que proporciona el EOS para realizar el análisis de la actividad matemática, tanto institucional como personal, mediante el análisis de prácticas, procesos y configuraciones de objetos matemáticos primarios, y su relación con los conocimientos del profesor de matemáticas. Con respecto a este tipo de análisis se presentaron cuatro contribuciones:

- ✓ En la primera presentación, *Implicaciones del estudio de la perspectiva epistémica y fenomenológica de los objetos matemáticos en el Enfoque Ontosemiótico (EOS)* (Sepúlveda y Suárez, 2017) se utilizaron herramientas del EOS (Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013) para responder a preguntas como: ¿Qué es la estructura Grupo? (problema epistémico). Para responderla, se realizó un estudio histórico y fenomenológico donde se identificaron diversas problemáticas que dieron origen a los diversos significados del objeto matemático grupo, generados a lo largo de la historia, lo cual permitió caracterizar un significado de referencia para dicho objeto matemático. Dicho significado de referencia se utilizó para el estudio de los significados en cuatro libros de texto. Por otra parte, se presentó una reflexión sobre las implicaciones de estos estudios histórico-epistemológicos de los objetos matemáticos, para el profesor que tiene que enseñar la Teoría de Grupos.

- ✓ En la segunda presentación, *Un estudio de los conocimientos didáctico-matemáticos de probabilidad con profesores de matemáticas de los años finales de la enseñanza fundamental participantes de un programa de formación inicial en Brasil*, (Carvalho, 2017), se explicó cómo un programa de formación, en el que se tiene en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos y sus diferentes significados, favorece la construcción de conocimientos didácticos-matemáticos sobre la probabilidad en profesores de matemáticas de los últimos cursos de Educación Primaria. En la investigación desarrollada con 40 profesores en el ámbito del proyecto de investigación nombrado "Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos concernientes la probabilidad y estadística" que pertenece al Programa Observatorio de la Educación del Ministerio de Educación (OBEDUC-UNIAN), se identificó que los conocimientos iniciales que han demostrado el grupo de profesores que participaron en la investigación sobre la probabilidad y su enseñanza, son insuficientes para un proceso de enseñanza y aprendizaje adecuado para los alumnos de esta etapa educativa. También se constató que los maestros han desarrollado y ampliado el conocimiento sobre la probabilidad y la enseñanza como resultado del proceso formativo.

- ✓ En la tercera presentación, *Algunas transformaciones de las representaciones de una función* (Amaya, 2017), se presentó un cuestionario que involucra una relación funcional, propuesto en un registro fenomenológico con algunas indicaciones del lenguaje coloquial. Se reflexionó sobre las conversiones y los tratamientos del cuestionario desde una perspectiva onto-semiótica. Se evidenciaron dificultades, tanto en estudiantes como en profesores, al reproducir diferentes representaciones de una función, así como para identificar y luego relacionar los elementos de dichas representaciones en uno o varios registros. Se concluyó que las conversiones y tratamientos, unido a la posibilidad de identificación en contextos de los objetos matemáticos que se pretenden abordar en la clase, es vital en la comprensión de dicho concepto, puesto que la identificación de un concepto en un contexto determinado, le permite al docente plantear situaciones-problema contextualizados a sus estudiantes, que les permitan relacionar los elementos de los objetos matemáticos estudiados con elementos del medio sociocultural, para que sea el propio estudiante quien asigne significado y sentido a tales objetos matemáticos al resolver una tarea socialmente compartida.

- ✓ En la cuarta presentación, *Geometría emergente en algebra lineal: estrategias inspiradas por la teoría del Enfoque Ontosemiótico* (Sbitneva y Moreno, 2017), se discutió sobre la importancia de "reconstruir" la geometría Euclidiana con base en el Álgebra Lineal. Sin embargo, bajo este enfoque se han reportado dificultades de aprendizaje, como el caso del concepto de espacio vectorial. Para atender dicha problemática se describieron algunas actividades exploratorias que se apoyan en algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico, donde los estudiantes trabajaran con el desarrollo de registros semióticos de tipo analítico (algebraico) en paralelo con la contraparte sintética geométrica (sin coordenadas).

En la segunda mesa temática, *Criterios de Idoneidad y sus aplicaciones*, se profundizó en aquellas herramientas teórico-metodológicas del EOS que permiten que el profesor realice valoraciones de los procesos de instrucción propios o ajenos. Con respecto a este tipo de análisis se presentaron dos contribuciones:

- ✓ En la primera presentación, *Análisis didáctico de textos diseñados con un enfoque intercultural* (Reyes-Escobar, 2017), se presentó el estudio y valoración de dos textos escolares de matemáticas. Se analizó bajo la faceta ecológica de la idoneidad didáctica, los primeros textos de matemáticas con enfoque intercultural de Chile y Costa Rica, en el eje de numeración. Una de las diferencias entre la educación formal y la educación intercultural bilingüe, es la producción de textos, ya que la interculturalidad ha comenzado a investigarse recientemente y el énfasis está puesto en el rescate de las lenguas de los pueblos indígenas y los recursos mayoritariamente están enfocados hacia lenguaje y no hacia matemática. La idoneidad didáctica propuesta por el EOS viene desarrollándose por Godino y sus colaboradores en diversos trabajos científicos. La metodología utilizada en el trabajo fue cualitativa, poniendo énfasis en el análisis de contenido de los dos textos matemáticos, con un enfoque etnomatemático, y lo que se buscaba era identificar si está presente la faceta ecológica de la Idoneidad Didáctica, indicando las actividades o páginas en el que se encuentra.

- ✓ En la segunda presentación, *Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica* (Breda, 2017), se discutió que en diversas investigaciones se ha observado el siguiente fenómeno: los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el enfoque ontosemiótico funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando justifican que sus propuestas didácticas representan una mejora, sin que se les haya enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Se explicó dicho fenómeno situando el constructo idoneidad didáctica en la problemática del papel que deben jugar las valoraciones y los principios normativos en la práctica del profesor. En general, se realizó un trabajo de desarrollo teórico del constructo idoneidad didáctica: cómo se originó, hacia qué nos conduce y cómo puede afectar a la práctica del profesor.

La tercera mesa temática, *Currículum y Evaluación en el EOS*, trató sobre cómo se operan las herramientas del EOS en los procesos de evaluación del currículo y del aprendizaje matemático. Con respecto a este tipo de análisis se presentaron dos contribuciones:

- ✓ En el primer trabajo, *Categorías analíticas para la evaluación del currículum matemático.Segunda aproximación* (Angulo, Moreno y Reducindo, 2017), se dio continuidad a la discusión de un trabajo previo, presentado en este mismo GD en la RELME 30, en donde se presentó una reflexión teórica acerca de la relación entre teoría curricular crítica y algunas categorías analíticas de los enfoques teóricos Ontosemiótico y Matemática Crítica. Se discutió la ausencia de una teorización curricular en matemáticas que no tenga como escenario el aprendizaje. Se plantearon las concepciones de Currículum de estado, Currículum como síntesis cultural y conversación compleja. Estas categorías del currículum crítico se interrelacionaron con la dimensión normativa y sistema de prácticas del EOS, con las nociones skovsmosianas de selección crítica de los contenidos y competencia crítica. A partir de eso se presentó una estrategia para una evaluación de pertinencia de un curriculum de matemática educativa de educación superior en atención a las categorías analíticas propuestas en Angulo-Villanueva (2017): los juegos del lenguaje a los que responde, el campo de estructuración curricular epistemológico teórico las características de la adecuación continua de contenidos que se presentan en los currículos vividos en carreras o posgrados en matemática educativa, la interrelación entre la matemática educativa y otros campos de saber a partir del tipo de conversación compleja que se establece.

- ✓ En el segundo trabajo, *La evaluación del aprendizaje en matemáticas*, (Ibarra, Ramírez, Ayala y Liñan, 2017), se presentaron las características de tres proyectos relacionados con la evaluación del aprendizaje, diseñados en el marco de un programa investigativo de la Universidad de Sonora, México, el cual buscaba reconocer la importancia de la evaluación del aprendizaje dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los presentadores centraron su discusión en cómo las distintas herramientas teórico-metodológicas del EOS permitieron desarrollar cada uno de los proyectos, y en uno de los casos (el primero de los proyectos que ha finalizado), obtener conclusiones sobre los significados personales sobre evaluación del aprendizaje que manifiestan profesores de matemáticas de bachillerato al enseñar ecuaciones lineales.

En la cuarta mesa, *Procesos Argumentativos en el EOS*, se discutió cómo el sistema de normas y metanormas puede constituir determinados procesos argumentativos en las matemáticas. El trabajo, *Sistemas de normas y argumentación: gestión del profesor en una clase de geometría del espacio de nivel universitario* (Molina, 2017), presentó la problemática de que desde la década del noventa, existe una tendencia generalizada hacia la inclusión de los procesos de argumentación y demostración en los currículos escolares, como consecuencia del consenso generalizado sobre su importancia en la actividad matemática de los estudiantes.

En relación con el conocimiento de los profesores sobre el tema, la investigación se ha centrado principalmente en su comprensión sobre la demostración como producto final de una actividad argumentativa y no tanto en los procesos de argumentación y construcción de una demostración.

En esta dirección, el expositor señaló que actualmente está llevando a cabo un estudio investigativo, mediante el cual se pretende analizar aspectos instruccionales que tienen lugar en un aula de Geometría Plana y del Espacio, en que los estudiantes y la profesora se involucran en la resolución de problemas empleando Entornos de Geometría Dinámica (EGD), en procesos de argumentación y en la construcción de un sistema teórico formal. De manera específica, señaló que las preguntas que orientan su actual el estudio de tesis doctoraa son las siguientes: ¿Cuál es el sistema de normas y metanormas que regula la práctica de argumentación y fomenta la producción de varios tipos de argumentos específicos (inductivos, abductivos, deductivos) que tienen lugar en un curso de Geometría de Plana y del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD? ¿Cuál es papel del profesor durante el proceso de instrucción en un curso de Geometría de Plana y del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD, respecto de la gestión del sistema de normas y metanormas que regulan la práctica de argumentación? ¿Cuál debe ser el conocimiento didáctico-matemático de un profesor de Geometría Plana y del Espacio de nivel universitario con relación a la práctica argumentativa, considerando un análisis del sistema de normas y metanormas emergentes de los procesos de interacción en el aula? Para abordar el estudio se pretende hacer un análisis didáctico en torno a las trayectorias e interacciones didácticas, la identificación de normas y metanormas y la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción, todas ellas nociones teórico-metodológicas del EOS. Además el análisis será complementado con la teoría de los intercambios interaccionales. En relación con el proceso de argumentación que tiene lugar en la interacción se usarán propuestas que usan el Modelo de Toulmin.

Conclusiones

Finalizadas las mesas temáticas se invitó a los profesores Dr. Juan D. Godino y Dr. Vicenç Font, a hacer un cierre de la jornada de trabajo del GD en la RELME 31. El Dr. Vicenç Font aprovecho para retomar algunos aspectos relevantes de las discusiones de los trabajos presentados, y proporcionó un panorama general del impacto de las nociones del EOS para el desarrollo de los trabajos discutidos durante la jornada. Por su parte el Dr. Juan D. Godino aprovecho para dialogar sobre la importancia de contar con estos espacios de discusión y reflexión, como el otorgado por la RELME, y presentó algunas iniciativas de cara al futuro del Grupo de Discusión EOS. Por ejemplo, hacer seminarios virtuales sobre el EOS periódicamente, mediante las plataformas http://civeos.com/index.php y http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/, y aprovechar los espacios como el que brinda la RELME para avanzar y profundizar en discusiones previamente iniciadas.

Referencias bibliográficas

Amaya, T. R. (2017). Algunas transformaciones de las representaciones de una función. Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Angulo-Villanueva, R. G. (2017). Pensar acerca del currículum matemático. Un avance a categorías analíticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Angulo-Villanueva, R. G., Moreno, N., Reducindo, I. (2017). Categorías analíticas para la evaluación del currículum matemático. Segunda aproximación. Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Breda, A. (2017). Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa***.**

Carvalho, I. F. (2017). Un estudio de los conocimientos didáctico-matemáticos de probabilidad con profesores de matemáticas de los años finales de la enseñanza fundamental participantes de un programa de formación inicial en Brasil. Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa***.**

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124. doi: 10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Pino-Fan, L., y Breda, A. (2017). Incidencias en Latinoamérica de un Marco Teórico Inclusivo en la Investigación en Educación Matemática. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 30, pp. 67-74). Ciudad de México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa - CLAME, A.C.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2017). Desarrollo actual del *Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática* (EOS). Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa***.**

Godino, J. D. y Contreras, J. M. (2017). Uso de recursos virtuales en la difusión y construcción de conocimiento científico: el caso del congreso CIVEOS. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/evaluacion_civeos2.pdf

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1/2), 127-135.

Ibarra, S. E., Ramírez, R. A., Ayala, R. y Liñan, Y. A. (2017). La evaluación del aprendizaje en matemáticas. Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Molina, O. (2017). Sistemas de normas y argumentación: gestión del profesor en una clase de geometría del espacio de nivel universitario. Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Reyes-Escobar, M. E. (2017), Análisis didáctico de textos diseñados con un enfoque intercultural. Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Sbitneva, L. y Moreno, N. (2017). Geometría emergente en algebra lineal: estrategias inspiradas por la teoría del Enfoque Ontosemiótico. Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Sepúlveda, O. D., Suárez, E. Z. (2017). Implicaciones del estudio de la perspectiva epistémica y fenomenológica de los objetos matemáticos en el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Comunicación presentada al grupo de discusión "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la *31 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

REGULARIDADES EN LA REFLEXIÓN DE FUTUROS PROFESORES SOBRE SU PRÁCTICA

María José Seckel, Adriana Breda, Vicenç Font
Universidad Católica del Maule. (Chile), Universidad de los Lagos. (Chile), Universidad de Barcelona. (España)
mjseckel@ucm.com, adriana.breda@ulagos.cl, vfont@ub.edu

Resumen

El objetivo de este trabajo es describir un experimento de diseño en el que se pusieron a prueba las cuatro regularidades detectadas en diversos estudios y contextos de formación en los que se implementan ciclos formativos para que los profesores (o futuros profesores) desarrollen las competencias del modelo Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), propuesto en el marco del Enfoque ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática. El resultado es que se cumplieron las dos primeras regularidades en este caso: 1) Los profesores, cuando opinan sobre un episodio de aula, expresan comentarios de tipo descriptivo y/o explicativo y/o valorativo. 2) Éstas opiniones son evidencias de alguna de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y afectiva) del conocimiento del profesor (una parte del CCDM).

Palabras clave: reflexión del profesor, idoneidad didáctica, profesor de matemáticas

Abstract

This report is aimed at describing a design of experiment in which we study the four regularities detected in several research works and educational contexts where training cycles are implemented for teachers or prospective teachers to develop the competences described in the Didactic-Mathematical Knowledge &Competencies model (DMKC) proposed in the framework of the Onto-semiotic Approach of Mathematics Cognition and Instruction (OSA). The findings from this analysis showed that the two first regularities in the study case were met: 1) when teachers give opinions on a classroom episode, they make comments of descriptive and/or explanatory and/or assessing type. 2) These opinions are the evidence to any of the six dimensions (epistemic, cognitive, ecological, interactive, mediative and affective) of teachers' knowledge (part of DMKC).

Keywords: teacher's thoughts, didactical suitability, math teacher

Marco teórico

En el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas llamado *Conocimientos y Competencias Didáctico–Matemáticas del profesor de matemáticas* (modelo CCDM) (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2017; Breda, Pino-Fan y Font,

2017). Algunos de los constructos de dicho modelo se usan en esta investigación. En particular, se usan las facetas del conocimiento del profesor consideradas en este modelo:

1. *Faceta epistémica*, que refiere al conocimiento especializado de la dimensión matemática (uso de diversas representaciones, argumentos, estrategias de resolución de problemas y significados parciales para un objeto matemático concreto), e incorpora nociones tales como conocer las matemáticas con profundidad y amplitud (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) y el "conocimiento especializado del contenido" (Hill, Ball y Schilling, 2008).
2. *Faceta cognitiva*, que refiere al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (dificultades, errores, conflictos, aprendizaje, etc.).
3. *Faceta afectiva*, que refiere a los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes.
4. *Faceta interaccional*, conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (profesor-estudiantes, estudiante-estudiante, estudiante-recursos, etc.).
5. *Faceta mediacional*, conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes, y sobre los tiempos designados para la enseñanza.
6. *Faceta ecológica*, conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos..., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes.

En diferentes investigaciones y contextos de formación, se han diseñado e implementado ciclos formativos para que los profesores (o futuros profesores) desarrollen las competencias de este modelo y aprendan los conocimientos que se contemplan en él (por ejemplo, Rubio, 2012; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016, Seckel, 2016). Se trata de ciclos formativos en los que se pretende enseñar a los participantes algunos de (o todos) los tipos de análisis didáctico contemplados en el modelo de análisis didáctico propuestos por el EOS (Font, Planas y Godino, 2010), ya que se supone que realizar estos tipos de análisis didácticos permite desarrollar la competencia clave de este modelo, la competencia de análisis e intervención didáctica, y también el aprendizaje de los diferentes tipos de conocimientos contemplados en el modelo CCCD. Por esta razón, en numerosas ocasiones los autores de este trabajo han realizado ciclos formativos (muchos de ellos con un formato de taller) con el objetivo de enseñar el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS.

Se trata de ciclos formativos (talleres) diseñados como entornos potentes de aprendizaje de manera que: 1) los asistentes tengan una participación activa a partir del análisis de episodios de aula; y 2) los tipos de análisis que propone dicho modelo de análisis emerjan de la puesta en común realizada en el gran grupo. En Breda, Pino-Fan y Font (2017) se explican una serie de experimentos de diseño, estudio de caso y talleres, que han permitido, por una parte, el desarrollo del modelo Conocimientos y Competencias Didáctico–Matemáticas (modelo CCDM) del profesor de matemáticas, y por otra parte, ponerlo a prueba. También se explica que en ellos se observaron regularidades como las siguientes:

1. Los profesores o futuros profesores, cuando tienen que opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula implementado por otro profesor, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.
2. Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de algunas de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor de matemáticas (una parte del CCDM).

3. Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica (otro componente del modelo CCDDM) propuestos por el EOS (idoneidad epistémica, mediacional, ecológica, emocional, interaccional y cognitiva).
4. La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad. Estas tendencias (Guzmán, 2007) se relacionan con el modelo CCDM ya que algunas de ellas son la base para proponer algunos de los criterios de idoneidad didáctica.

Por esta razón, nos hemos planteado tomar estas cuatro regularidades observadas, relacionadas con el modelo CCDM y diseñar estudios empíricos y estudios de caso de tipo naturalista para corroborarlas. En este trabajo describimos brevemente uno de dichos estudios.

Metodología

Se trata de un experimento de diseño que presenta las siguientes características: 1) interviene como observador no participante uno de los investigadores, 2) se parte de cuatro regularidades previas que se quieren poner a prueba 3) se diseña un ambiente de aprendizaje/enseñanza en colaboración con el profesor que imparte el curso que busca provocar un aprendizaje en los participantes que permita corroborar (o no) las regularidades de partida.

Ha participado un grupo de 17 estudiantes que se encontraban cursando el segundo semestre del cuarto año de la Carrera de Pedagogía en Educación General Básica con Mención en Matemática en una Universidad chilena ubicada en la región del Maule. Los datos o unidades de análisis se han obtenido luego de preparar e implementar una actividad de diagnóstico. Para ello, se grabó en video una clase de matemática de séptimo año de educación básica (educación primaria, 30 niños entre 12 y 13 años de edad), después se seleccionó un episodio que se presentó a los futuros profesores con la consigna abierta de que reflexionaran de manera individual sobre el episodio. Sus respuestas quedaron registradas en sus hojas.

Resultados

El episodio seleccionado del video comienza cuando la profesora pide a dos alumnas que pasen a la pizarra a mostrar cómo han resuelto la siguiente tarea (en el semestre anterior los estudiantes habían trabajado temas de proporcionalidad, por lo que en teoría tenían los conocimientos requeridos para resolverla):

> Tarea: Identifica si el problema se trata de proporcionalidad directa o inversa y luego resuélvelo:
> A) El dueño de un supermercado ha abonado $ 1.800 por 15 cajas de ajos ¿cuánto deberá pagar por un nuevo pedido de 13 cajas de ajo?
> B) Un grifo que arroja un caudal de 3 litros por minuto, llena un depósito en 20 minutos ¿cuánto tardará en llenar ese mismo depósito otro grifo cuyo caudal es de 5 litros por minuto?

Los comentarios de los futuros profesores muestran un bajo nivel de competencia de reflexión sobre la práctica ajena y son relativamente superficiales, aunque hay aspectos descriptivos, explicativos y valorativos entremezclados y formulados de manera confusa (se corrobora la primera regularidad). Ahora bien, dado que los comentarios explícitamente valorativos no se dieron no hubo posibilidad de corroborar (o no) las regularidades tres y cuatro. Para corroborar la segunda regularidad, se realizó una agrupación de afirmaciones de los futuros profesores utilizando las facetas del modelo del conocimiento didáctico-matemático (un componente del modelo CCDM). A continuación, se muestran algunos ejemplos de cómo se realizó dicha agrupación (la letra "A", que va acompañada con un número, representa los registros de distintos alumnos).

Faceta epistémica:
A10**:** "La profesora utiliza el lenguaje matemático (magnitudes, aumenta-disminuye)".
A4: **"**La profesora es preocupada por conceptualización de términos lógicos de matemática".
Faceta cognitiva:
A8: "Se observa que los alumnos tienen conocimiento del procedimiento para realizar los problemas, pero presentan dificultades para identificarlas. Dar respuestas a través de funciones a ellos"
A4: **"**Manejan bien operaciones básicas en este caso la multiplicación".
Faceta interaccional:
A9: "Sentí que la profesora no dejaba expresar a la alumna, le daba poco tiempo para que armara su respuesta, quizás si la hubiese dejado que analizara…"
A1: **"**La docente podría haber utilizado la duda de la primera estudiante en el ejercicio de proporcionalidad directa para preguntar a los demás estudiantes".
Faceta mediacional:
A4: "Falto imágenes del problema, muy abstracto".
A11: **"**Otro punto que podría ser favorable es la "visualización matemática", así las estudiantes podrían identificar de que proporcionalidad se trata en cada ejercicio".
Faceta afectiva:
A3: "Se nota una dinámica de parte de la docente, lo que logra captar la atención de los estudiantes para así recibir más participación e interés por lo que están realizando en clases".
A6: "En relación con la niña del ejercicio 1, me quedo con la sensación de que la profesora le decía todo a la hora de revisar el problema y como que al final la niña le dijo "directa" porque ya era muy obvio que era lo correcto y no por entenderlo realmente, y con la segunda niña bien, aunque en ambas siento que quizás hubiera sido más provechoso que las niñas explicaran lo que hicieron.".
Faceta ecológica:
A10: "Las alumnas que desarrollan el ejercicio en el pizarrón verbalizan como realizaron el ejercicio, desde identificar datos hasta responder la pregunta al problema, lo que permite desarrollar una habilidad que se estipula en las bases curriculares de argumentar y comunicar".

En la tabla 1 presentamos de manera general los resultados de todo el grupo (17 futuros profesores).

Tabla 1. Categorías en las reflexiones de futuros profesores

Alumno (a)	CATEGORÍAS						Total
	Faceta epistemológica	Faceta cognitiva	Faceta mediacional	Faceta afectiva	Faceta interaccional	Faceta ecológica	
A1	*	*			*		3
A2		*			*		2
A3				*	*		2
A4	*	*	*	*	*		5
A5	*			*	*		3
A6			*	*			2
A7		*		*	*		3
A8		*			*		2
A9	*					*	2
A10	*	*	*	*	*		5
A11	*			*	*		3
A12				*			1
A13					*		1
A14			*		*		2
A15		*			*		2
A16	*	*			*		3
A17			*				1
Total	**7**	**8**	**5**	**8**	**13**	**1**	

Fuente: de los autores.

Conclusiones

Si se hace una mirada a todo el grupo de participantes, la categoría que tiene mayor presencia en los registros entregados es la de faceta interaccional, presente en los comentarios de 13 futuros profesores. Por el contrario, la categoría con menos presencia es la ecológica, que solo ha estado presente en uno de los participantes. En cuanto a las otras facetas (epistémica, cognitiva, mediacional y emocional), aparecen en menos de la mitad del grupo. La preponderancia de evidencias relacionadas con la faceta interaccional, en cierta manera, es un resultado esperable por dos razones:

1) La tarea propuesta era un episodio de clase grabado en video, en este tipo de registro es más fácil observar aspectos de la interacción que otros.
2) Los aspectos interacciónales, en general, son más evidentes que otros porque su observación no requiere de muchos conocimientos disciplinares y/o curriculares.

Se observa que solo 2 de 17 participantes contemplan en su reflexión 5 de las 6 perspectivas (facetas), y que el resto de los participantes (15) contemplan un máximo de 3 miradas (facetas) en sus respuestas. Cabe destacar que cada una de las facetas encontradas en los distintos participantes se halla implícita. Asimismo, se observa que en su discurso prima la descripción y, en pocas ocasiones, la explicación. Hay que resaltar que ninguno llega a la valoración explícita ni a la formulación de propuestas de mejoras

(regularidad 1). Por otra parte, se corrobora que si bien un participante puede poner énfasis en solo alguna de las facetas, cuando se mira a todo el grupo, aparecen las seis facetas del conocimiento didáctico-matemático (regularidad 2). En cuanto a las regularidades 3 y 4 se puede señalar que, dado la ausencia de valoraciones por parte de los futuros profesores en sus comentarios, no fue posible ponerlas a prueba.

Finalmente, es importante agregar que este experimento de diseño es una réplica de otro realizado con alumnos de una promoción anterior, en ambos casos se obtuvieron resultados similares.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación: EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE).

Referencias bibliográficas

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 13, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., y Giacomone, B. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, 31 (57), 90 – 113. Doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1), 127 – 135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372–400.

Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, 19(1), 71-98. Doi: 10.12802/relime.13.1913.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis de doctorado no publicada. Universdad de Barcelona.

Seckel, M.J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación básica con mención en matemática*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Barcelona.

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.

LO MATEMÁTICO: UNA APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO Y A LA REPRESENTACIÓN DOCENTE

Francisco Emmanuel González Ángeles, Daniela Reyes-Gasperini
Dirección de Investigación y Docencia del Centro Universitario Japonés de Morelos, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
fga_1994@hotmail.com, dreyes@cinvestav.mx

Resumen

Las concepciones que han construido docentes y futuros docentes acerca de *lo matemático* es objeto de estudio en esta investigación mixta con carácter exploratorio. Su propósito es describir las representaciones que expresan y el uso que dan desde su cotidiano; se fundamenta teóricamente en la Teoría Socioepistemológica, pues realiza un estudio sistémico desde sus dimensiones: didáctica, social, cognitiva y epistemológica. Los resultados que se obtuvieron dan cuenta de las manifestaciones limitadas y extendidas al emitir juicios populares, técnicos y cultos sobre la disciplina. Finalmente se reflexiona sobre el efecto que estimulan dichas concepciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: Socioepistemología; superior; mixta

Abstract

The conceptions professors and prospective teachers have built about mathematics doing is the object of study in this mixed research, of exploratory nature. It is aimed at describing the representations they set out and the uses given in day-to-day activities; it is supported by the socio-epistemological theory, since a systematic study is carried, from the didactic, social, cognitive and epistemological dimensions. The results show limited and also extended expressions when giving popular, technical and cultured opinions about the discipline. Finally, we reflect on the encouraging effect to these conceptions in the teaching and learning process.

Keywords: Socioepistemology; higher, mixed

Introducción

Contexto, planteamiento del problema y preguntas indagatorias

La formación inicial docente y la profesionalización de los que se encuentran en servicio con respecto al dominio de competencias didácticas específicas orientadas a la mejora profesional en términos de habilidades para la práctica pedagógica, habilidades intelectuales y responsabilidades ético profesionales, demandan en la propuesta curricular formalizada a través del nuevo modelo educativo para la educación obligatoria, reconocer la importancia de desarrollar aprendizajes clave, añadiendo prácticas cruciales para la vida evitando así el fenómeno de exclusión social al abrirse la posibilidad de ser un ciudadano que

funciona con, para, y por la sociedad; uno de estos aprendizajes clave es el pensamiento matemático, derivado del conjunto de campos de formación académica. En este sentido los principios pedagógicos han solicitado del mediador, quien instrumenta el curriculum formal estableciendo al mismo tiempo relaciones entre lo real y lo oculto, el reconocimiento de la naturaleza social del conocimiento, así como la existencia y el valor que debe tener el aprendizaje informal (SEP, 2016; 2017) entendido este como el conjunto de saberes socialmente compartidos que se forman y reconstruyen en espacios populares, conformándose así una relación bidireccional entre el sujeto que aprende-aprehende y las representaciones del mediador cuya figura no siempre recae en un docente, acotando lo anterior mediante la frase sucesiva "No toda enseñanza es causa de un aprendizaje, y no todo aprendizaje es consecuencia de una enseñanza", al respecto la descentración en las últimas décadas de la que ha sido objeto el profesor le ha desplazado de su participación protagónica, provocando entonces un cambio, y como todo cambio, una resistencia, movilización e incertidumbre magisterial, aquí entonces radica el problema de esta investigación en curso, al tener como propósito analizar las representaciones gráficas desde su actividad matemática cotidiana que se han ido formando los docentes de una escuela privada que ofrece educación preescolar hasta bachillerato, así como los docentes en formación de una Universidad del Estado de Morelos quienes cursan la Licenciatura en Educación en una modalidad no escolarizada, con el futuro interés de tipificar estas representaciones dada la escasa eficiencia terminal de los egresados, pero a la vez mirando el posicionamiento exitoso en el servicio profesional docente de los pocos recursos humanos que logran cumplir con los requisitos de titulación, reconociendo que una manera matemática de pensar pudiera orientar la construcción de un objeto de estudio para el desarrollo de una tesis por parte de los estudiantes universitarios, futuros docentes. Las preguntas que entonces orientan el rumbo de la investigación se plantean así: ¿Cómo se concibe a lo matemático desde la docencia? ¿De qué forma se apropian los docentes de los diversos conceptos matemáticos en su práctica? ¿Qué implicaciones socioculturales tienen dichas concepciones? ¿Es la matemática que ha provocado barreras didácticas para desarrollar constructos sobre ella misma?

Revisión de la literatura

Desde una mirada panorámica, comprensiva, pero a la vez fugas veamos ahora algunas investigaciones realizadas en torno al pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional; línea de investigación en la que se pensó el presente trabajo. Para Ernest (1996) la reflexión docente se da preferentemente a través de la interacción entre pares como una posibilidad de interactuar con el fin de mejorar la práctica, lo cual produce una discrepancia respecto a los ciclos reflexivos de corte más individual. De forma más específica Martínez y Arévalo (2016) nos aportan en su estudio con estudiantes de profesorado a nivel primaria que un profesor con un conocimiento profundo de los fundamentos matemáticos y didácticos estará en condiciones de actuar ante eventos imprevisibles dentro del aula valorando esta aportación como necesaria en al campo de la formación inicial docente incluso de preescolar y de secundaria. Así como llama la atención la postura de Vaillant (2002) refiriendo que en la actualidad no basta que para ser un buen formador se tenga únicamente conocimiento de lo que se va enseñar. En respuesta a estas coyunturas epistémicas respecto a porque se mira como se observa la formación docente, se buscan respuestas en las prácticas de quien hace la docencia, es decir aquel que se enfrenta en su cotidiano con la realidad áulica que por demás es impredecible por estar a la luz de la praxis; praxis que a distinción de la poiesis pedagógica no debiera ubicarse en aquellos procesos productivos de

conocimiento matemático, más bien merece voltear la mirada hacia las construcciones sociales que el mismo genera al ponerse en juego frente a dos o más sujetos.

Marco teórico

El aparato crítico que se adoptó tiene su fundamento en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa TSME (Cantoral, 2013) como enfoque, como escuela de pensamiento, que se ocupa de los fenómenos relacionados con la construcción social del conocimiento a su vez ligados a lo didáctico, teniendo como referencia cualquier escenario donde el fin sea el aprendizaje del otro. Se reconocen así sus cuatro dimensiones. La epistemológica atendiendo al origen del conocimiento, la didáctica relativa a las estrategias de enseñanza, la cognitiva aludiendo a los procesos psicológicos para la apropiación de los objetos cognoscibles, y la sociocultural en función de los contextos de formación docente, siguiendo una ruta intencionada en aras de la progresión intelectual esta perspectiva favorece el tránsito de acciones a actividades y de actividades a prácticas para la problematización del saber matemático que es puesto en evidencia todos los días ; y el pasaje del conocimiento al saber cómo conocimiento en uso a través del principio de aula extendida.

El aula extendida consiste en sí misma en una apertura al aprendizaje informal como se demanda en el discurso de la política educativa vigente, al permitir que los saberes externos al desarrollo de una clase cobren sentido en diversos ambientes de aprendizaje que gestiona el docente, comentando pertinentemente que esta "extensión" no tiene lugar únicamente en un salón, es decir que realizar las mismas actividades fuera de aula consistiría únicamente en un cambio de espacio de trabajo, sin embargo asumirse como docente en vías de empoderamiento (Reyes, 2016) invita a diseñar situaciones didácticas que propicien en el sujeto la idea de que existe una forma matemática de pensar (Cantoral, 2013), este diseño constituye en un primer momento de planificación, un acercamiento al mundo de los contenidos, las competencias, los aprendizajes esperados, rasgos del perfil de egreso, ejes, enfoques, estrategias docentes que propicien aprendizajes significativos (Díaz Barriga, 2009), la evaluación crítica (Domínguez, en Estrada, 2014), la reflexión en, de, por y para la práctica (Reyes, 2014) para que idealmente se tenga claridad en los objetivos que dichas situaciones didácticas pretenden alcanzar en una clase de matemática.

Estar cara a cara frente al curriculum es una tarea desafiante per se, ya que mientras para Casarini (2016) el plan de estudios constituye la planeación sostenida por la estructura académica, administrativa, legal y económica que cumple con las finalidades del proceso de *enseñanza-aprendizaje,* abriendo el debate frente a lo que se ha dialogado en los grupos de discusión sobre Aspectos Socioepistemológicos y Rediseño del Discurso Matemático Escolar, al soportar en colectivo que *enseñanza-aprendizaje* no pueden seguir siendo entendidos como una dupla insoslayable en la matemática que se requiere operar en los ciudadanos del siglo actual. Es por ello por lo que al tratarse de un estudio con profesores y sus ideas, resulta útil la discusión entre colegas investigadores, estudiantes de pregrado y posgrado, profesores en ejercicio y todo interesado en redefinir el espacio de aprendizaje como término polisémico que incluso implica repensar el aula, dando la posibilidad de ubicarla en el imaginario magisterial como esquema introyectado en el docente que de no ser flexible al cambio pudiera reducir su hacer a las cuatro paredes de un salón, en este sentido la enseñanza se constituye como unidad de análisis y el aprendizaje como otra sin llegar tampoco a una separación epistemológica.

Desde una perspectiva profesionalizante y alterna se sostiene que el docente, nuestro docente mexicano cuenta con lo elemental en cuanto a conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes para plantear situaciones didácticas encausadas al desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje producto de un diseño exhaustivo; al respecto se invita a evolucionar del concepto de capacitación al concepto de profesionalización docente asumiendo que como cualquier otra profesión los profesores van viviendo procesos de mejoramiento continuo (Reyes-Gasperini, 2016). Se insiste en el abandono de la palabra capacitación dado que no se busca certificar al colectivo docente, lo que se persigue es su profesionalización entendida como un estado permanente, dinámico, cíclico, reflexivo, logrando hasta determinado punto romper con los obstáculos de acceso a las elites académicas donde se propagan estados del arte relativos al aprendizaje y la enseñanza, de las diversas matemáticas, y decimos diversas porque tu matemática, no es la matemática (es decir, puede estar sujeta a transformaciones conceptuales, procedimentales y actitudinales por incomodo que parezca para las ciencias formales). Por otro lado, se recuperó de Gálvez (1994) el establecimiento de convenciones sociales asumiendo las diversas significaciones de saberes elaborados por el profesor resaltando la necesidad de reconocer el estilo docente *sui generis*.

El modelo educativo actual para la educación obligatoria recién presentado, señala que el profesor debe investigar y fomentar en los estudiantes el interés por aprender en distintos medios como lo ha dictado la SEP (2017). Por último, se revisó la idea de representación como articulación del pensamiento que se organiza, estructura y legitima desde la vida cotidiana, desde el día a día del profesor, con aquellos objetos representados por cada sujeto, es decir que cada uno representa su realidad de forma distinta, dotándola de maneras diversas que devienen de un constructo personal según lo señalado por Cabrera y Carbajal (2012). Por lo cual lo que para un profesor enseñar matemáticas como lo hace resulta una "experiencia exitosa" para el otro puede ser " un fracaso" "una necesidad", claro, visto desde una mirada subjetiva y variacional.

Método

El método aplicado es de naturaleza mixta con carácter descriptivo interpretativo al describir el pensamiento y las representaciones acerca de *lo matemático* en 10 profesores en formación y 3 profesores en ejercicio profesional como muestra seleccionada mediante cuestionarios estructurados en los cuales expresaron su perspectiva respecto de la palabra "Matemáticas" y "Socioepistemología", los usos matemáticos en su vida y la representación libre de algo matemático.

Resultados

En cuanto a la percepción instantánea sobre las matemáticas se obtuvo que de los 13 profesores encuestados tres las asociaron con algo complicado o de dificultad, tres con números como conjunto de elementos, dos con soluciones, dos con cálculos, dos con herramientas de razonamiento y uno con constancia como una actitud hacia la disciplina. En relación con la Socioepistemología cuatro relacionaron esta palabra con conocimientos, tres con orígenes, dos con sociedad, uno con algo interesante, uno como medio, uno con construcción y uno que no otorgó respuesta. Sobre la forma en que usan la matemática en su cotidiano cuatro expresaron usarla en diversos contextos de compra venta, cuatro durante actividades

laborales, tres en todo, uno en la medición de dosis al inyectar, uno en la vida cotidiana. En cuanto al uso de la matemática fuera de la escuela los informantes coincidieron en su aplicación extendida. Posteriormente en las representaciones libres sobre algo matemático seis de trece elaboraron sumas y/o restas , cuatro expresiones algebraicas, dos figuras sin cardinalidad y uno no realizó la representación gráfica. La siguiente figura 1 muestra una perspectiva sobre el objeto de estudio.

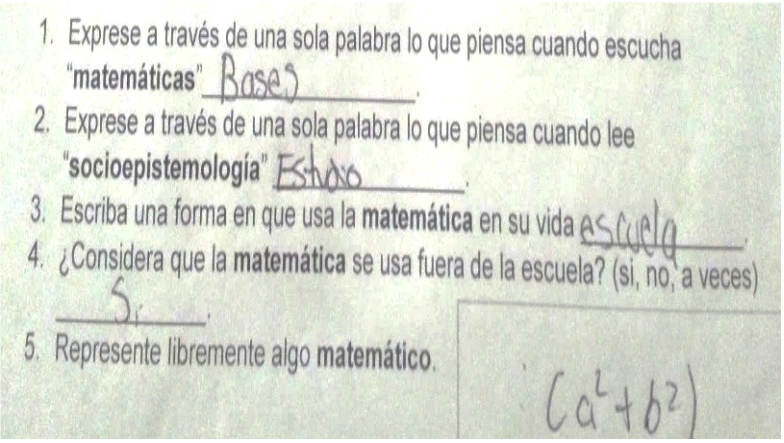


Figura 1. Instrumento aplicado a un docente en formación.

Al detectar que las respuestas dadas describen algunos rasgos de la TSME surgió otra pregunta ¿Cómo puede incidir la Socioepistemología en la formación docente inicial y continua para la transformación educativa? Enfoquémonos solo en la relevancia didáctica, ya que finalmente la TSME se está posicionando como una nueva teoría del aprendizaje, tan útil y tan propositiva que en los programas de las carreras afines al magisterio como la docencia, educación, pedagogía, ciencias de la educación, educación normal en sus especialidades, psicopedagogía, psicología educativa por mencionar solo algunas en el contexo de las IES Instituciones de Educación Superior mexicanas se invita dotar al futuro docente de sus principios, dimensiones, esquemas, modelos, autores; así con esa importancia que se menciona el conductismo de Pablov y Skinner, el cognitivismo de Brunner, Chomsky y Ausbel, la psicogenesis de Piaget, la sociogenesis de Vygotsky, el humanismo de Freire, se deberá aludir a la epistemogenesis de Cantoral, Gasperini y otros que han consolidado la teoría. Es entonces un motivo para abrir los espacios académicos en los que formadores y formadores de formadores discutan la utilidad empírica de la TSME en sus diseños didácticos.

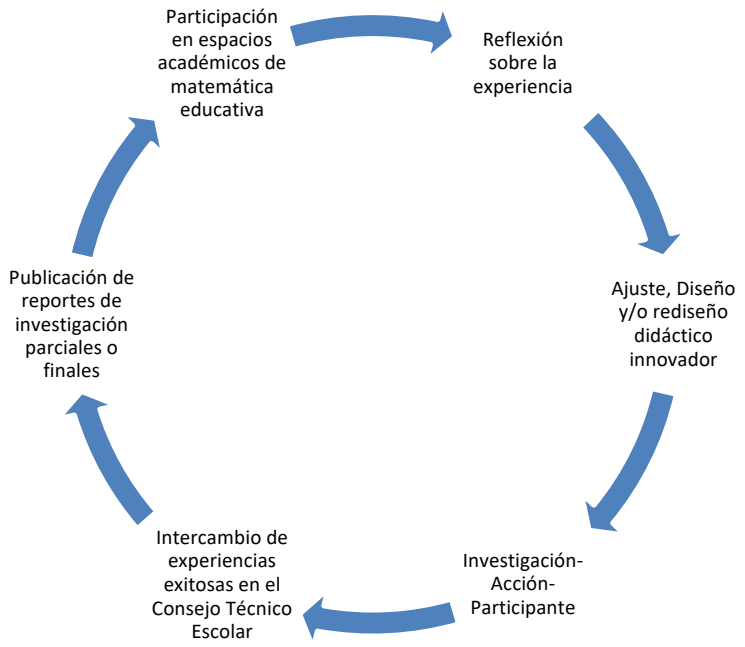
Conclusiones

Se concluye así bajo una perspectiva que reconoce las consecuencias de adoptar únicamente una visión operatoria de la matemática por parte de los profesores pudiendo repercutir en la predisposición del estudiante hacia el estudio de la disciplina. Al respecto de los afectos se ha podido comprobar la necesidad de crear atmósferas de aprendizaje idóneas para la construcción social del conocimiento matemático, en este sentido se retoma de Sánchez y Ursini (2010) que la actitud hacia lo matemático cobrando sentido al entenderla como construcción que se modifica en consecuencia de los acontecimientos y su percepción,

distinguiendo tres componentes: afectivo, cognitivo y conductual; ubicando al mediador como un puente u obstáculo en el intento del estudiante por apropiarse del saber matemático escolar y extra escolar; aspectos que se encuentran ligados al nuevo modelo educativo mexicano que contempla el desarrollo emocional tan ineludible en la realidad actual de las aulas en las que después de un fenómeno natural, la incorporación al centro de trabajo se ve trastocada por la incertidumbre de lo impredecible por parte de todos los actores educativos, a la vez siendo este un pretexto pedagógico para hacer uso didáctico de lo sucedido según sea pertinente de acuerdo a la madurez cognitiva del estudiante.

Por otro lado se reconoce como una emergencia la convocatoria permanente hacia el magisterio local a un seminario donde puedan profesionalizarse en matemática educativa con el fin de apropiarse de la propia práctica, y aprovechar los espacios del Consejo Técnico Escolar para el intercambio de experiencias exitosas que favorezcan el desarrollo de una forma matemática de pensar logrando el reconocimiento de saberes populares, técnicos o cultos al aceptar que el conocimiento matemático es aplicable en el entorno inmediato de acción diaria del docente y sus alumnos. El siguiente esquema es una propuesta autoformativa basada en el desarrollo profesional docente.

Esquema 1. Fases dinámicas de la práctica docente matemática para la Educación Básica en México.



Somos sin duda alguna los que pretendemos enseñar aquellos que de estar comprometidos con la promoción de una manera matemática de vivir, estaríamos en circunstancias de poner en marcha un rediseño del currículum oficial para volverlo real, plausible, operable y funcional; adoptando rasgos de cualquier sujeto innovador que tiene en la mira, la transformación (Moreno, 2000): primeramente asumiendo la postura de ser intelectualmente independiente, es decir, correr el riesgo de producir ideas, en segundo lugar reconociendo que lo único continuo es el cambio, y de ser necesario tener la disposición de abandonar constructos teóricos que han evolucionado por la necesidad misma de la sociedad cambiante,

y finalmente ser creativo, usando cosas que ya han sido usadas pero de distinta forma, atribuyendo otro sentido, original. Es pues pertinente comentar y cerrar la presente aportación con una idea: "Una relación distinta con la matemática, generara una actitud distinta hacia ella".

Referencias bibliográficas

Cabrera, D. y Carbajal, J. (2012). Emplazamiento analítico: Locus de intelección y subjetividad. En M. Jiménez (Coord.), *Investigación educativa. Huellas metodológicas* (pp. 121-137). México: Juan Pablos.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Casarini Ratto, M. (2016). *Teoría y diseño curricular*. México: Trillas.

Díaz Barriga, F y Hernández, G. (2009). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista. México: Mc Graw Hill.

Domínguez, Y. G. (2014). Alcances de la evaluación escolar en M.T. Estrada y E. Jasso (Ed.), *La evaluación educativa desde diversos espacios académicos* (pp.15-46). CDMX, México: Con-textos.

Ernest, P. (1996). Varieties of constructivism: A framework for comparison. En L.P. Steffe, et al. (Eds.), *Theories of mathematical Learning* (pp. 335-350). Nahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gálvez, G. (1994). Didáctica de las matemáticas. En C. Parra e I.Saiz (comps.), *La didáctica de las matemáticas: Aportes y reflexiones*. (pp.39-50) Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Martínez, M y Arévalo, E. (2016). Análisis didáctico de prácticas matemáticas de aula utilizando "the knowledge quartet". En L. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30 (pp. 1095-1104). México.

Moreno, M. (2000). Formación de Docentes para la Innovación Educativa. *Sinéctica,* 17 (200). Recuperado de https://sinectica.iteso.mx/index.php/SINECTICA/article/view/384

Reyes, D. (2016). Empoderamiento docente y Socioepistemología Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas. Barcelona, España: Gedisa.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 360-382.

Sánchez Ruiz, J. y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(4), 303-318. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33529137018

Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral Plan y Programas de Estudio para la Educación Integral*. CDMX, México: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública (2016). *Propuesta Curricular para la Educación Obligatoria*. CDMX, México: Secretaría de Educación Pública.

MATEMÁTICAS PARA TODOS: UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

Sandra Evely Parada Rico, Silvia Johanna Pineda Garavito
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
sanevepa@uis.edu.co, vidana0619@hotmail.com

Resumen

Se reporta aquí los primeros resultados de una investigación que tiene entre sus objetivos el diseño y desarrollo de un curso teórico-práctico enfocado en la atención a la diversidad en clase de Matemáticas. Se hace un ajuste a un curso ya existente en el Plan de Estudio de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS). En este curso se estudian algunas Necesidades Educativas Especiales (NEE): características y acercamientos didácticos desde el área de Matemáticas. El ajuste esencial del curso se realiza en el proyecto, parte práctica del curso, dicho proyecto se enfoca en la atención a la diversidad. El segundo objetivo propuesto es describir los significados negociados por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a las NEE en clase de matemáticas. Dichos significados se caracterizan alrededor del pensamiento matemático, didáctico y orquestal del profesor, haciendo uso del modelo de reflexión-y-acción de Parada (2011).

Palabras clave: formación inicial de profesores, necesidades educativas especiales, diseño curricular

Abstract

This report shows partial outcomes of an investigation that includes among its aims the design and development of a theoretical – practical course focused on the attention to the diversity in Mathematics class. We made some changes to an already existing course of the curriculum of the Bachelor's degree in Mathematics at the Industrial University of Santander (UIS). In this course, some Special Educational Needs (SEN) are studied: characteristics and didactic approaches from the area of Mathematics. The essential adaptation of the course is done in the project, practical part of the course. The project focuses on the attention to diversity. The second proposed aim is to describe the meanings negotiated by in-training teachers who receive instruction on attention to the SEN in mathematics class. Such meanings are characterized according to the teacher´s mathematical, didactic and orchestral thinking, using the model of reflection- and-action by Parada (2011).

Key words: preservice teacher, special educational needs, curricular design

Introducción y planteamiento del problema

Cuando se habla de una educación para todos se parte de la idea de que los niños y jóvenes, independientemente de sus características personales, socioeconómicas o culturales, pueden aprender, siempre y cuando su entorno educativo ofrezca las condiciones necesarias. En este sentido, una educación para todos implica que las personas asistan a la institución educativa de su sector y puedan gozar de todos

los recursos que tiene ésta, sin que se discrimine o limite su participación (UNESCO, 1990, 1994, 2000). A nivel nacional, varios documentos hacen referencia al derecho que tienen las personas a la educación (Congreso de Colombia, 1994). Así, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), establece algunos lineamientos para que las escuelas regulares orienten los procesos de las personas con alguna discapacidad o talento excepcional (MEN, 2009)

De esta revisión puede verse que la reglamentación internacional y nacional existe, no obstante es necesario indagar si ésta se implementa tanto en la formación de los profesores como en el currículo escolar. Al respecto, Figueroa y Muñoz (2014) afirman: "Hoy en día no cabe ninguna duda sobre el principio legal y moral de la inclusión educativa, pero todavía no se han conseguido garantizar prácticas que atiendan verdaderamente a la diversidad." (p. 182).

Es indispensable el profesor para atender la diversidad de estudiantes en el aula de clase, lo que lleva a pensar en la preparación de los profesores alrededor de dicho tema. Lo anterior es reiterado por Aké (2015) quien menciona dos clases de profesores alrededor del tema educación matemática y educación especial: los profesores de matemáticas y los profesores de educación especial. Los primeros, a pesar de contar con bases en matemáticas, no están familiarizados con las NEE, y los segundos, a pesar de estar formados en pedagogía no tienen conocimiento de didáctica de la matemática. Esto indica la falta de formación que tiene el profesor alrededor de la educación especial y la matemática educativa. Para efectos de esta investigación, al hablar de NEE se hace referencia a los niños con una serie de problemas físicos, sensoriales, intelectuales o emocionales; es decir, incluye a todos los niños que por algún motivo, no pueden beneficiarse de la enseñanza escolar regular (UNESCO, 1994). Los estudiantes con capacidades o talentos excepcionales requieren una atención especial en el aula y que para ellos también se debe preparar los profesores (MEN, 2006).

Algunas investigaciones reportan la necesidad de formar a los profesores alrededor de la atención a la diversidad, ya sea en la formación inicial o continuada, con el fin de lograr escuelas para todos. Al respecto, Aké (2015) expone que hay poca investigación en educación matemática asociada a las NEE y la formación de profesores. La autora considera que aún existe la creencia de la incapacidad de los niños con alguna deficiencia para aprender las matemáticas de manera significativa. Contrario a la creencia expuesta por la autora, investigaciones como Aldana y López (2014) y Bruno y Noda (2010) muestran el gran potencial de los niños con alguna NEE en particular.

El programa de Licenciatura en Matemáticas (contexto de estudio) de la Escuela de Matemáticas en la Universidad Industrial de Santander (UIS) explicita, entre las competencias del egresado, algunas relacionadas con la implementación, por parte de los profesores, de acciones educativas que posibiliten la inclusión de personas con NEE (Escuela de Matemáticas, 2012). Dichas competencias se respaldan en disposiciones actuales del MEN (2017), donde se establece que las instituciones de educación superior deberán garantizar el desarrollo de programas de formación sobre educación inclusiva para los docentes.

Teniendo en cuenta las disposiciones del MEN y las competencias que se tienen trazadas en el perfil profesional de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS, se decidió revisar el Plan de Estudios vigente a la fecha de escritura de este documento. En el plan de estudios encontrado, el cual reporta la Escuela de Matemáticas en el año 2012, en las asignaturas reportadas no se hace alusión explícitamente a la atención

a la diversidad. Por ello, se revisaron cada una de las asignaturas, sin encontrar algún acercamiento al tema.

Dado que el contexto la investigación que aquí se reporta se enmarca en la formación de Licenciados en Matemáticas de la UIS alrededor de las NEE, se plantean los siguientes objetivos: i) Diseñar y desarrollar un curso enfocado en la atención a la diversidad en clase de Matemáticas, y ii) Describir los significados negociados por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a las NEE en clase de matemáticas. Con relación al primer objetivo se aclara que León (1999) afirma no se trata de añadir contenidos nuevos o materias relacionadas con Educación Especial sino de dar un giro a las ya existentes en el currículo. Dadas las condiciones del contexto de investigación, inicialmente se hace una adaptación del currículo de una asignatura ya existente con el fin de proponer una nueva asignatura, dar un giro a las asignaturas requiere de una reforma curricular del programa en el que todos los actores estén involucrados. A continuación se describirá el marco conceptual usado y la metodología planteada para cumplir los objetivos mencionados.

Marco conceptual

El modelo de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011) fundamenta la metodología de la investigación en curso que aquí se reporta. En la Figura 1**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestra un bosquejo del modelo adaptado a los aspectos que puntualmente se abordan en la investigación.

Figura 3. Adaptación del Modelo "Reflexión-y-Acción" de Parada (2011)

Dentro de la espiral está el triángulo pedagógico, en cuyos vértices se encuentra el profesor (P) - estudiante (E) - matemática escolar (ME) y en su centro aparece la actividad matemática (AM). Según la autora, la actividad matemática del alumno durante la clase y del maestro antes, durante y después de ella es posible por las interacciones que se desarrollan al interior del triángulo pedagógico. Aunque esta investigación se enfoca en la formación inicial, se rescata que el profesor en formación puede desarrollar su pensamiento reflexivo mediante la práctica experimental que se llevará a cabo en la asignatura Seminario Práctica, y posteriormente, en la práctica vivencial que se hará en la asignatura Práctica Docente I.

El anillo exterior describe los tres procesos que son posibles cuando los educadores matemáticos se unen para negociar significados alrededor de su pensamiento reflexivo sobre el área. La autora se refiere a negociación de significados como el proceso mediante el cual se construyen interpretaciones de un saber propio permeado por los saberes de los demás, dicha idea es retomada de Wenger (1998). El docente desarrolla su pensamiento reflexivo sobre la actividad matemática que promueve en clase durante tres momentos: a) *reflexión-para-la acción*, cuando el profesor planifica la AM esperada por parte de los estudiantes en la clase; b) *reflexión-en-la acción*, se hace presente en la clase y se desarrolla en los intercambios entre el profesor y los estudiantes en torno al contenido matemático de estudio; y c) *reflexión-sobre-la acción*, se da después de la clase, cuando el maestro evalúa la actividad matemática que había planeado, comparada con la actividad matemática que logró.

Las tres flechas alrededor de la espiral representan aspectos sobre los cuales se propone desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas: *i) Pensamiento Matemático:* Surge de la necesidad del profesor al hacer uso de sus conocimientos de la ME para desarrollar sus prácticas profesionales (proponer tareas, comunicarse en el aula, evaluar, etc). Es conveniente que el profesor domine los contenidos matemáticos que enseña y, además, conozca los objetivos de aprendizaje correspondiente al grado en que labora para que pueda utilizarlos como guía para la enseñanza. *ii) Pensamiento Didáctico:* Surge cuando el profesor se cuestiona sobre las diferentes maneras de acercar los conocimientos matemáticos a los estudiantes, representando los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones que permitan hacer más comprensible a los alumnos dicho conocimiento. Para caracterizar este pensamiento en el profesor, el foco serán las adaptaciones curriculares que él realice en clase. *iii) Pensamiento Orquestal:* La autora lo caracteriza en torno a la conducción de su clase y a las maneras como usa los recursos que ha seleccionado, de acuerdo a la AM que tiene prevista para sus estudiantes. Se contribuye con este pensamiento del profesor cuando se le apoya para que pueda discernir y pensar sobre el cómo, el cuándo y el dónde usar tal o cual recurso, dependiendo de los propósitos de aprendizaje que deseen lograrse.

Aspectos metodológicos

El estudio aquí expuesto consta de seis fases y un estudio previo a dichas fases que permitirán responder a los dos objetivos propuestos. A continuación se hace una descripción del estudio preliminar y las fases de la investigación.
El *estudio preliminar* se desarrolló en dos partes:

a) Revisión curricular de la formación de profesores. Los objetivos de esta revisión son: i) Indagar sobre la formación de los profesores alrededor de la atención a la diversidad y ii) Indagar si las instituciones de educación superior garantizan el desarrollo de programas de formación sobre educación inclusiva para los docentes (MEN, 2006, 2017).
La consulta de los planes de estudio se realizó a través de la página web de cada universidad, dicha revisión se realizó en tres partes: i) Se revisó el plan de estudios de cinco programas de Licenciatura en Educación Especial y se encontró que en dos de los programas no se incluye en su plan de estudios asignaturas relacionadas con matemáticas o didáctica de las matemáticas, respaldando lo mencionado por Aké (2015); ii) Se revisó el plan de estudios de 159 programas de Licenciatura no enfocados en Educación Especial de universidades nacionales, se encontró que el 64% de ellos no incluyen en su plan de estudio alguna

asignatura relacionada con atención a la diversidad; y iii) Se revisó el plan de estudios de 18 programas de Licenciatura en Matemáticas que ofrecen algunas universidades del país y el 72% de éstos no incluyen alguna asignatura relacionada con la atención a la diversidad en el aula.

b) Aproximación a los entes gubernamentales locales encargados del proceso de inclusión. Al iniciar la investigación se realizaron entrevistas a personal de la Alcaldía de Bucaramanga (Colombia) encargados del proceso de inclusión educativa en la ciudad. En estas entrevistas se encontró que desde allí se pretende formar a los docentes que en sus aulas tienen estudiantes con alguna NEE, pero ésta no ha sido continua por cuestiones administrativas (cambio de dirigentes). El acompañamiento a las instituciones públicas que realiza la Alcandía es exclusivo para las instituciones donde hay niños incluidos.

Fase 1. Revisión del plan de estudios del programa

En esta etapa se realizó un análisis del plan de estudio de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS, reportado en Escuela de Matemáticas (2012), para identificar las asignaturas existentes en el plan de estudios y ver en ellas el acercamiento a la atención a la diversidad en el aula de matemáticas. Con esta revisión se constató que no había asignaturas direccionadas a la formación de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en atención a la diversidad, a pesar de que es una de las competencias planteadas para los egresados del programa, según se muestra en el Informe de autoevaluación con fines de acreditación reportado en Escuela de Matemáticas (2012). Por ello, se planteó la necesidad de diseñar un curso para atender esta falencia, lo cual se constituye en el primer objetivo de la investigación que aquí se reporta.

Fase 2. Primer acercamiento al fenómeno de estudio

Este acercamiento se hizo mediante una adaptación curricular a la asignatura Seminario Práctica (una de las asignaturas vigentes del programa). Dicha asignatura está ubicada en el sexto semestre del plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas y tiene como propósito: ofrecer -desde la teoría y la práctica- fundamentos para comprender el proceso de investigación en educación matemática. Además, Seminario Práctica es prerrequisito para cursar Práctica Docente I.

Para el logro de los propósitos, el curso generalmente se ha desarrollado mediante lectura y discusión de literatura (artículos, tesis) y, posterior a ello, se desarrolla una metodología teórico-práctica en la cual en la medida en que se va estudiando los aspectos teóricos del proceso investigativo, los estudiantes van diseñando y desarrollando una pequeña investigación. Para el proyecto cada estudiante elige la problemática que deseaba, según sus intereses.

El ajuste esencial del curso consistió en que el proyecto, esta vez se haría alrededor de la atención a la diversidad. Por ello el curso se dividió en tres grandes partes: i) acercamiento teórico a la investigación en Educación Matemática; ii) Estudio y reflexión alrededor de la atención a la diversidad (aspectos legales, características físicas, cognitivas, sociales, comportamentales, etc.) y del rol del maestro como facilitador del aprendizaje, esto desde la perspectiva de la Educación Matemática y iii) estudio teórico-práctico de metodología cualitativa (diseño y desarrollo de un proyecto en el que se problematiza sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en personas con características diferenciadas.

Algunas actividades que se realizaron durante el curso son: ensayos, exposiciones, discusiones y debates de las sesiones de trabajo, planes de clase y adaptaciones curriculares emergentes de las reflexiones de los futuros maestros alrededor de la atención de la diversidad en el aula de matemáticas. Cada sesión se grabó en audio y posteriormente se hizo un registro documental (diario de campo) en el que se resaltarán aspectos importantes, también se recogieron todos los trabajos realizados por ellos.
En este documento se presentan resultados del estudio preliminar y de las dos fases antes descritas.

Fase 3. Análisis de resultados del primer acercamiento

En esta fase se analizan los resultados del primer acercamiento en cuanto a los dos objetivos de la investigación. El análisis curricular del diseño y desarrollo de un primer curso que relacionará la atención a la diversidad desde la clase de matemáticas, se realizará basado en dos aspectos: los contenidos del curso (componente teórico) y los proyectos de clase (componente práctico). Los posibles aprendizajes de la experiencia realizada (en el primer acercamiento) se usarán para responder al segundo objetivo de investigación (Diseñar y desarrollar un curso enfocado en la atención a la diversidad en clase de Matemáticas). Dichos aprendizajes se reportarán mediante casos de estudio, dado que se quiere hacer el seguimiento completo del proceso de formación. Los casos seleccionados deberán: 1) Matricular y aprobar el curso de Seminario Práctica (con las adaptaciones hacía la atención a la diversidad, descrito en la fase 2); y 2) Matricular en semestre inmediatamente siguiente el curso de Práctica Docente I. Los casos de estudio se analizarán usando los compontes del pensamiento matemático del modelo de reflexión y acción descrito en el apartado II. Marco Conceptual.

Fase 4. Segundo acercamiento al fenómeno de estudio

Con base en el análisis curricular de la primera implementación se realizarán ajustes al plan del curso de Seminario Práctica para realizar un segundo acercamiento al fenómeno. De la puesta en escena de este curso, se realiza a lo largo del semestre el seguimiento que permita ir evaluando el logro de los objetivos de formación que se pretenden alcanzar tal como se tiene previsto.

Fase 5. Análisis de resultados del segundo acercamiento

Tal como se mencionó en la Fase 3, el análisis curricular valorará el logro de los objetivos tanto del componente teórico como práctico del curso. Los resultados de esta fase se usarán para el diseño curricular de un curso de educación matemática e inclusión escolar que se espera proponer para la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas (proceso en curso que se está realizando en la institución). Con dicho diseño se pretende responder al primer objetivo de esta investigación (Aportar elementos curriculares alrededor de las Matemáticas y la inclusión escolar en la formación de futuros profesores de matemáticas).
En esta fase no se toman datos que aporten al segundo objetivo, dado que se continúa con el seguimiento de los casos de estudio en su Práctica Docente I, tal como se describe en la siguiente fase.

Fase 6. Seguimiento de Práctica Docente I:

Se acompañará a los estudiantes que participaron en la Fase 2 y que matricularon la asignatura Práctica Docente I, de ellos se seleccionarán los casos de estudio, de quienes se lleva un seguimiento. En los casos

de estudio se evaluará su negociación de significados alrededor de la atención a la diversidad en la clase de matemáticas. Con los resultados de esta etapa se espera dar respuesta segundo objetivo de investigación.

Resultados

Algunos resultados del estudio preliminar, la Fase 1 y la Fase 2 son: i) No todos los programas de Licenciatura en Educación Especial estudiados incluyen en su plan de estudios asignaturas relacionadas con matemáticas o didáctica de las matemática; ii) A pesar de la legislación existente, hay programas de licenciatura que no incluyen, en su plan de estudios, asignaturas que formen al futuro docente en atención a la diversidad; iii) La mayoría de los programas de Licenciatura en Matemáticas revisados no incluyen en su plan de estudios asignaturas relacionadas con atención a la diversidad en el aula de matemáticas; y iv) No hay asignaturas direccionadas a la formación de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS en atención a la diversidad, a pesar de estar planteado entre las competencias de los egresados del programa.

Conclusiones

Debido a que en el momento de escritura del documento se iniciaba la Fase 3, se reportarán conclusiones relacionadas con el primer objetivo de investigación.
Se reconoce la complejidad de diseñar proyectos de aula donde se realicen adaptaciones curriculares para favorecer el aprendizaje de una persona con NEE, esto por la exigencia de conocer sobre las condiciones psicológicas, neurológicas o físicas.
Se reconoce que los aprendizajes tal vez pueden ser insuficientes para poder afrontar una NEE en el aula, pero por lo menos se posibilitó una sensibilización al respecto.
Durante la implementación del curso, se tuvo que ajustar constantemente el cronograma porque el tiempo no era suficiente debido a la gran participación de los estudiantes en clase. Por lo tanto, se considera que es necesario aumentar el número de horas de la asignatura, de tres horas continuas semanales a cuatro horas, dos franjas semanales de dos horas.
Los profesores en formación expresaron su satisfacción por los aprendizajes adquiridos en el curso pues antes no habían tenido un acercamiento a dicha problemática (atención a la diversidad en el aula) y la consideran oportuna ya que están próximos a su graduación.

Referencias bibliográficas

Aké, L. (2015). Matemáticas y educación especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En López-Mojica, J. y Cuevas, J. (Coords), *Educación especial y matemática educativa.* pp. 15-32, México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Aldana, E., y López, J. (2014). Una didáctica de la matemática para la formación en diversidad: síndrome de Down. En R. Flores (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 28 (71-77). México: CLAME, A. C.

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En Moreno, M., Estrada, A., Carrillo, J. y Sierra, T. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. pp. 141-162. Lleida: SEIEM.

Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994) Ley General de Educación. [Ley 115 de 1994]. DO: 41.214.

Escuela de Matemáticas. (2012). *Informe de autoevaluación con fines de acreditación*. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga.

Figueroa, I. y Muñoz, Y. (2014). La Guía para la Inclusión Educativa como herramienta de autoevaluación Institucional: Reporte de una Experiencia. *Revista Latinoamericana de Inclusión Educativa,* 8(2), 179-198.

León, M. (1999). La formación del profesorado para una escuela para todos. Un análisis de los planes de estudio del maestro especialista en educación primaria y en educación especial en las universidades españolas. *Revista de curriculum y formación del profesorado* 3(2), 1-24.

MEN (2006). Orientaciones para la atención educativa a estudiantes con capacidades o talentos excepcionales. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-75158_archivo.pdf

MEN (15 de septiembre de 2017) Por la cual se ajustan las características específicas de calidad de los programas de Licenciatura para la obtención, renovación o modificación del registro calificado, y se deroga la Resolución 2041 de 2016 [Resolución 18583 de 2017].

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional.* (Tesis de Doctorado). Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

UNESCO (1990). *Declaración mundial sobre la educación para todos*, UNESCO, Jomtien, Tailandia. Recuperado de http://www.unesco.org/education/pdf/JOMTIE_S.PDF

UNESCO (1994). *Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad*, Ministerio de Educación de España y UNESCO, Salamanca, España.

UNESCO (2000). *Informe final del Foro Mundial de la Educación en Dakar*, Dakar, Senegal.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

EDUCACIÓN PARA LA SOSTENIBILIDAD Y SU INCIDENCIA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Francisco M. Moreno-Pino, Esther García-González, Rocío Jiménez-Fontana
Universidad de Cádiz. (España)
franciscomanuel.moreno@uca.es, esther.garcia@uca.es, rocio.fontana@uca.es

Resumen

En este trabajo se aporta un primer resultado del proyecto EDINSOST como es el "Mapa de la Competencia en Sostenibilidad" deseable para el currículo de formación de profesores en las titulaciones de Maestro en Educación Infantil y Educación Primaria. El mapeo es un emergente del análisis documental y curricular de más de sesenta investigadores españoles al objeto de caracterizar -en términos de las cuatro subcompetencias en sostenibilidad, unidades de competencia y niveles de dominio- el perfil que se considera oportuno en los egresados desde la perspectiva de la sostenibilidad. Actualmente, a partir de este mapa, estamos analizando las diferentes asignaturas del área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Cádiz desde sus guías docentes, siendo la finalidad de este análisis la de sugerir un diseño para la mejora de los planes de estudios de la Didáctica de las Matemáticas en su conjunto, considerando la formación en Educación Matemática desde la Educación para la Sostenibilidad Curricular como referente deseable.

Palabras clave: Alfabetización Matemática, Sostenibilización Curricular, Complejidad

Abstract

In this paper, the "Map of Competence in Sustainability" is shown as an EDINSOST project partial contribution, which is necessary for the teacher's training curriculum in the Master's degrees in Early Childhood Education and Elementary Education. The mapping is an emergent of the documentary and curricular analysis of more than sixty Spanish researchers in order to characterize - in terms of the four sustainability sub-competencies, competence units and levels of mastery - the profile that is considered appropriate in the graduates, from the perspective of sustainability. Currently, by using this map, we are analyzing the different subjects in the area of Mathematics Didactics at the University of Cadiz, from their teaching guides. This analysis aims to suggest a design for the improvement of Mathematics Didactics curricula as a whole, considering mathematics education training from Education for the Curriculum Sustainability as a desirable reference.

Key words: Mathematical literacy, Curricular Sustainability, Complexity

Justificación del estudio: planteamiento del problema

Este trabajo forma parte de los resultados de EDINSOST, proyecto I+D+i 2015 del programa estatal de investigación, desarrollo e innovación orientado a los retos de la sociedad, EDU2015-65574-R (MINECO/FEDER), subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad: España. El objetivo

general de EDINSOST es "dotar a los futuros titulados de las competencias necesarias para catalizar el cambio hacia una sociedad más sostenible".
La matemática es una de las materias con la que los alumnos, a lo largo de su enseñanza obligatoria, interaccionan durante un tiempo más o menos prolongado desde la educación infantil. Así, los niños desde que nacen, y a medida que se van desarrollando, crean y maduran una serie de capacidades que les permitirá, desde edades muy tempranas, iniciarse en el establecimiento de relaciones y de representación mental, básicas para la elaboración del conocimiento matemático. *Relacionar* es, por tanto, el primer eslabón en el camino hacia el pensamiento abstracto (Torra, 1994). Pero matemáticas ¿cuáles?, ¿para qué sociedad?, ¿para construir qué cultura?, ¿para formar qué tipo de ciudadanos?

La sociedad actual se encuentra en un momento de crisis sin precedentes, crisis global, emergencia del diálogo de como mínimo tres crisis simultáneas: socio-ambiental, de valores y de conocimiento (Bonil et al, 2010); de reducción de lo político a lo económico y de lo económico al crecimiento desmedido (Morin, 2001). Una característica común a todas las problemáticas globales que a día de hoy afectan a nuestro planeta es que los factores y elementos presentes en cada una de ellas están en permanente *interrelación* influyéndose entre sí, provocando una dinámica de cambios en ocasiones muy intensa y con nuevos efectos. Es de la propia caracterización de estos problemas que se demanda, para su mejor comprensión, de la capacitación de personas para entender el mundo en términos de *relaciones* (Murga-Menoyo, 2013).

La radicalización de crisis epistémica de los últimos tiempos hace que, cada vez más, las sociedades demanden –para todos los ámbitos del saber- una adecuada alfabetización entre sus ciudadanos. En este sentido, la educación tiene que "despertar" al cambio de época y ser la herramienta capaz de transformar aquellos escenarios de crisis en escenarios de oportunidad (Bonil et al, 2010). ¿Cómo hacer esto?
La inclusión de la Educación para la Sostenibilidad (ES) en los sistemas educativos de los diferentes países del mundo se presenta como alternativa posible por tratarse de un tipo de educación que trabaja desde perspectivas complejas permitiendo profundizar en las *relaciones* que se producen en una realidad. En este sentido, la ES permite la construcción de posibles respuestas –de soluciones orientadas- (Jiménez-Fontana et al, 2015), que inciden sobre las causas de los problemas más que sobre los efectos de los mismos. Por otro lado, la Universidad como institución que forma, investiga y educa, tiene entre sus funciones preferentes la de formar ciudadanos en las competencias necesarias para la sostenibilidad de las sociedades (Aznar y Ull, 2013).

En el marco internacional, la Agenda 21 Educativa -derivada de la Agenda 21 aprobada en Río´92- es un instrumento que persigue la sostenibilización de la educación (Murga-Menoyo, 2013). En España, la Comisión Sectorial CRUE-Sostenibilidad aprobó en 2005 (actualizado en 2012) el documento *Directrices para la introducción de la sostenibilidad en el currículum*, texto en el que se plantean actuaciones recomendadas para la introducción de la sostenibilización curricular en los estudios universitarios.
Sin embargo, la ES resulta ser un área de estudio transversal muy compleja, por lo que no se la debe considerar como una asignatura más sino como punto de encuentro entre diferentes materias (Calabuig et al, 2004) entre las cuáles la Educación Matemática debe estar pues es función de la misma responder de manera crítica y comprometida, no sólo con el "saber matemático", sino con la democracia, la justicia social, la ética y la solidaridad (Azcárate, 2005; Azcárate et al, en prensa). Asimismo, el aporte que desde las diferentes dimensiones del currículo escolar de Matemáticas esta disciplina puede ofrecer en el nuevo marco curricular de Alfabetización Matemática, justifica la presencia de esta área de conocimiento desde la perspectiva de una Educación para la Sostenibilidad.

La omnipresencia de las matemáticas en la escuela de la que veníamos hablando al principio, el carácter holístico de efecto sistémico-complejo de las grandes problemáticas que afectan hoy al mundo, unida a nuestra posición de formadores en Educación Matemática de futuros docentes, nos lleva a formular el objetivo central de nuestra investigación en los siguientes términos:
¿Cuál es el estado actual de la Educación Matemática en relación a la inclusión de competencias profesionales coherentes con una Educación para la Sostenibilidad en las titulaciones de formación para Maestros en Educación Infantil y Educación Primaria en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Cádiz?

Con el fin de aproximarnos al problema de investigación anterior, en este trabajo se presenta un primer resultado como es el "Mapa de la Competencia en Sostenibilidad" deseable para el currículo de formación de futuros titulados en educación, logro de EDINSOST e instrumento compartido que nos permitirá, próximamente, diagnosticar las necesidades formativas en sostenibilidad del profesorado implicado en el área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Cádiz y el grado competencial en sostenibilidad que, a día de hoy, tienen los estudiantes de cada una de las materias objeto de estudio. La finalidad última que persigue este estudio es la de sugerir un diseño para la mejora de los planes de estudios de la Didáctica de las Matemáticas en su conjunto, considerando la formación en Educación Matemática desde la Educación para la Sostenibilidad Curricular como referente deseable.

Alfabetización Matemática

Las sociedades modernas persiguen, cada vez más, asegurar una adecuada alfabetización entre sus ciudadanos en general y en matemáticas en particular, pero: ¿por qué?, ¿por qué enseñar matemáticas?, ¿por qué las matemáticas forman parte de todos los sistemas educativos del mundo?
Por supuesto, "por su utilidad" es ya una de las razones que justifica la importancia que a la matemática se le otorga; razón que está vinculada a la dimensión social-utilitarista pero también cultural de nuestro currículo escolar. Sin embargo, el carácter utilitarista de las matemáticas no es la única razón vinculada a la dimensión social del currículo escolar. La asunción de que el conocimiento matemático se conforma socialmente es, a día de hoy, un hecho. Más aun, que *los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social facilitan la adquisición de conocimientos*, es un pilar básico del aprendizaje constructivista e idea básica de la psicología social apoyada en la obra de Vygotsky quien consideraba que los aprendizajes se producen en un medio social en el que abundan las interacciones (Chamorro, 2005).

Los conflictos socio-cognitivos, según Guilly (Chamorro, 2005), provocan, además, un doble desequilibrio: *interindividual*, motivado por las diferentes respuestas de los sujetos; e *intraindividual*, debido a la toma de conciencia -por parte del sujeto- de respuestas diferentes a la suya que le invita a dudar de la propia. La reflexión, la discusión, el debate de ideas, son vías que permiten la elección de una posible solución al problema planteado (respuesta "transitoria") que obliga, a su(s) artífice(s), dar cuenta de la idoneidad de la misma. "Las interacciones entre individuos produce la sociedad y ésta retroactúa sobre los individuos" (Morin, 2001, p. 54). Desde esta perspectiva, la dimensión social del currículo escolar de matemáticas resalta la parte axiológica en la intervención educativa.
Por otro lado, que el aprendizaje de esta disciplina favorece el desarrollo de capacidades tan importantes como las de *establecer relaciones*, básicas para la elaboración del conocimiento matemático, es otra razón

más de por qué enseñar matemáticas se hace tan necesario; razón ésta última vinculada con la dimensión cognitiva del currículo escolar de matemáticas.

Consideramos, sin embargo, que la respuesta a la pregunta de base sobre qué formación en Educación Matemática debiera recibir un estudiante para maestro con objeto de que la misma contribuya a su desarrollo personal en las competencias necesarias para la sostenibilidad de las sociedades, requiere del análisis de otras dimensiones del currículo escolar de matemáticas. En cualquier caso, conformar un currículo escolar (ya sea de matemáticas u otra área de conocimiento) única y exclusivamente desde sus dimensiones cultural, cognitiva o social-utilitarista es un planteamiento inane.

Hasta hace relativamente poco tiempo, el planteamiento instrumental de las matemáticas se centraba en el conocimiento en sí mismos de conceptos matemáticos (los instrumentos), haciendo así énfasis especial en la dimensión cultural-conceptual del currículo escolar. La evolución hacia un modelo más funcional de las matemáticas obliga a no centrarse en los instrumentos sino en la manera en que los mismos se hacen más o menos útiles cuando se aplican en determinados contextos. Es entonces, en el devenir del currículo escolar de matemáticas cuando, por fin, la dimensión ética del currículo escolar de matemáticas cobra sentido pleno y es alimentada.

El conocimiento matemático no es sólo un conjunto de conceptos o contenidos que deban aprenderse sino que es también un conocimiento técnico y constituye por ello una concreción potente de sus aplicaciones al correspondiente campo de fenómenos y situaciones propias de las sociedades avanzadas (Rico y Lupiáñez, 2014). Consecuencia de esto es que los estudiantes deben, por tanto, elaborar no sólo un conocimiento práctico de las matemáticas sino también un conocimiento crítico y reflexivo sobre las condiciones de construcción y aplicación de determinados modelos matemáticos así como una comprensión de sus funciones sociales (Azcárate, 2005).

En el proceso de resolución de problemas, Polya (1945) ya establecía cuatro fases para el trabajo: *comprender el problema*, *concebir un plan*, *ejecutar dicho plan* y *examinar la solución obtenida*. Es en la segunda y tercera de estas fases cuando se requiere de un planteamiento crítico-reflexivo de las matemáticas en relación a las razones que existen para la elección, o no, de determinadas estrategias de resolución (fase 2) y su posterior implementación (fase 3). Las consecuencias éticas derivadas de la toma continuada de decisiones, en primer lugar, y de sus aplicaciones, en segundo lugar, obliga a una comprensión previa del contexto donde se suceden y de cómo las relaciones hombre-naturaleza-sociedad se verían afectadas y/o alteradas (el principio de precaución es un pilar base del desarrollo sostenible). En medio de esta dinámica de permanente auto-organización emerge la *conciencia* (Morin, 2001).

Por todo ello, y desde nuestro interés por la inclusión de los principios relacionados con la educación para la sostenibilidad en nuestra área de conocimiento, orientar la escuela hacia la consecución de valores democráticos es un deber y para ello el empoderamiento de la dimensión ética-axiológica del currículo escolar de matemáticas se hace necesario. La alfabetización matemática de los ciudadanos sólo será posible cuando los sistemas educativos respondan a un equilibrio cierto para todas las dimensiones en sus respectivos currículos escolares. Que la formación en competencias (matemáticas o no) deba entenderse no sólo como el dominio de una serie de *procesos* y *métodos* para aprender de la experiencia sino, sobre todo, de la *intersubjetividad* Bazdresch (1998), sintetiza las ideas y argumentos expuestos hasta ahora.

Lo anterior hace perceptible los puntos de encuentro entre los intereses de una Educación Matemática basada en un aprendizaje crítico y reflexivo y los intereses de una Educación para la Sostenibilidad. Como Calabuig, Geli y Alsina (2011) afirman que la transdiciplinariedad consustancial de la educación para la sostenibilidad incluye a la Educación Matemática como pieza clave en la construcción el conocimiento. Por otro lado, queremos hacer hincapié en no perder de vista el hecho de que la realidad educativa entendida como sistema y al mismo tiempo como elemento de un sistema de orden superior -el sistema-sociedad- y en la medida en que ésta última tiene unas necesidades en términos de sostenibilidad, la misma educación en general y la Educación Matemática en particular (como subsistema de la anterior) se ven afectadas de la misma necesidad y hacen inexcusable relegar del término sostenibilidad.

Sólo desde el logro tendente ("aspiracional") en relación al *saber pensar*, *saber hacer* y *saber comprender* de la disciplina (matemáticas) se podrá atender los cuatro pilares del desarrollo calificado como sostenible: desarrollo humano, calidad de vida, equidad y -en especial- el de precaución. Es, en este contexto, cuando un estudiante se entenderá matemáticamente alfabetizado y para ello, la Sostenibilización Curricular de la Educación Matemática es irreemplazable si verdaderamente queremos contribuir a dar respuesta a una demanda compleja.

El Mapa de la Competencia en Sostenibilidad

En este contexto el proyecto EDINSOST, en el que participan un total de 15 titulaciones impartidas en 9 universidades de toda España (entre las que se encuentra la Universidad de Cádiz), tiene entre sus objetivos específicos: *Definir el mapa de sostenibilidad de las titulaciones participantes y establecer el marco que facilite su integración en los estudios de manera holística*
Este mapa de la competencia sostenibilidad constituye la base teórica en nuestra investigación. Se trata de un instrumento que nos permitirá caracterizar e implementar la práctica docente universitaria de la Didáctica de las Matemáticas desde la perspectiva de la Sostenibilidad Curricular.

Como punto de partida y para la elaboración del mapa, la CRUE (Conferencia de Rectores de las Universidades Españolas), recomienda a las universidades introducir en sus titulaciones 4 competencias en sostenibilidad (subcompetencias): SOS1, SOS2, SOS3 y SOS4 (Anexo 1). A partir de aquí, y para cada una de estas cuatro subcompetencias base, se definen una serie de "unidades de competencia" (UC), entendidas éstas como aspectos concretos que debieran tratarse dentro de la subcompetencia SOS*i* raíz (*i* = 1, 2, 3, 4).
Una problemática que suscita la evaluación de competencias es que, las mismas, son el producto de un *proceso* secuenciado (Manríquez, 2012). Por ello, y para fijar ideas, cada una de las UC se define, a su vez, en tres niveles competenciales acorde con la gradación de la pirámide de Miller (1990). El mapeo resultante (Anexo 1) es un emergente del análisis documental y curricular de más de sesenta investigadores españoles, al objeto pues de poder caracterizar en términos de las cuatro subcompetencias en sostenibilidad, unidades de competencia y niveles de dominio, el perfil que se considera oportuno en los egresados en Educación.

Consideraciones finales

Actualmente, el Mapa de la Competencia en Sostenibilidad (Anexo 1) es la base para el diseño de cuestionarios que nos permitirán diagnosticar, en un futuro próximo, las necesidades formativas en sostenibilidad del profesorado implicado en el área de Didáctica de las Matemáticas y el grado competencial en sostenibilidad que tienen los estudiantes.

Sugerir un diseño para la mejora de los planes de estudios de la Didáctica de las Matemáticas en su conjunto, considerando la formación en Educación Matemática desde la Educación para la Sostenibilidad Curricular como referente deseable es la finalidad última del estudio que estamos abordando. Por otro lado, no debe perderse de vista que para el docente que planifica, empoderar la dimensión ética del currículo escolar de matemáticas condiciona el *cómo* hacerlo, lo que obliga a reflexionar sobre qué metodologías formativas en matemáticas son las más adecuadas. En este sentido, parece lógico que debieran cobrar impulso metodologías activas de tipo participativo pues las mismas realzarían la figura de estudiante como ser social crítico, reflexivo y proactivo.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (2005). El profesor de matemáticas ante el cambio educativo: una visión desde la complejidad. *En Actas del V CIBEM*. Oporto: Universidad de Oporto.

Azcárate, P., García-González, E., Jiménez-Fontana, R., y Cardeñoso, J. M. (en prensa). La evaluación: actividad profesional clave de la educación matemática. En B. S. D´Ambrosio y C. E. Lopes (Eds.). *Actas First International Conference of Creative Insubordination in Mathematics* Education. São Paulo, Brasil: ICOCIME 1.

Aznar, P., y Ull, M. Á. (2013). *La responsabilidad por un mundo sostenible*. Bilbao, España: Desclée de Brouwer.

Bazdresch, M. (1998). Las competencias en la formación de docentes. *Educar. Revista de Educación. Formación docente, 5,* 1-5.

Bonil, J., Junyent, M., y Pujol, R. M. (2010). Educación para la sostenibilidad desde la perspectiva de la complejidad. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 7*(Nº Extraordinario), 198-215.

CADEP-CRUE (2012). *Direcrices para la introducción de la sostenibilidad en el curriculum*. Actualización de la declaración institucional aprobada en 2005. Recuperado de: http://www.crue.org/Sostenibilidad/CADEP/Paginas/Doumentos.

Calabuig, T., Alsina, À., y Geli, A. M. (2004). Diagnóstico del grado de ambientalización de la materia Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación y Psicología de la UdG. En R. Mª Pujol y L. Cano. (Eds.). *Nuevas tendencias en investigaciones en Educación Ambiental* (pp. 249-264). Madrid, España: Ministerio de Medio Ambiente.

Calabuig, T., Geli, A. M., y Alsina, A. (2011). La Ambientalización curricular de la educación matemática. *En Actas del III Congrés Internacional UNIVEST*. Girona: Universitat de Girona.

Chamorro, C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*. Madrid, España: Pearson Educación.

Manríquez, L. (2012). ¿Evaluación en competencias? *Estudios pedagógicos (Valdivia), 38*(1), 353-366.

Miller, G. (1990). The assessment of Clinical Skills. Competence-Performance. *Academic Medicine, 9*(65), 63-67.

Morin, E. (2001). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Barcelona, España: Paidós.

Murga-Menoyo, M. Á. (2013). *Desarrollo sostenible: problemáticas, agentes y estrategias*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Pricenton, NJ: Pricenton University Press.

Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2014). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Torra, M. (1994). ¿Para qué es necesaria la matemática en la educación infantil? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 1*(1), 7-14.

ANEXO 1

SUB-COMPETENCIAS	DIM.	UNIDADES DE COMPETENCIA (UC)	NIVELES DE DOMINIO SEGÚN LA PIRÁMIDE DE MILLER ADAPTADA		
			N1: SABER	N2: SABER CÓMO	N3: DEMOSTRAR + HACER
-SOS1- Contextualización crítica del conocimiento estableciendo interrelaciones con la problemática social, económica y ambiental, local y/o global	HOLÍSTICA	Comprende cómo funcionan los sistemas naturales, sociales y económicos y las mutuas interrelaciones entre ellos, así como las problemáticas vinculadas a los mismos, tanto a nivel local como global.	Conoce el funcionamiento de los sistemas naturales, sociales y económicos y las mutuas relaciones entre ellos.	Analiza y comprende las relaciones entre los sistemas naturales y los sistemas sociales y económicos.	Es capaz de imaginar y prever las repercusiones de los cambios en un sistema natural, sobre los otros dos.
		Posee reflexión crítica y creatividad, aprovechando las diferentes oportunidades que se le presentan (Tics, planes estratégicos, normativas, etc.) en y para la planificación de un futuro sostenible.	Conoce las oportunidades de las Tics, normativas y líneas estratégicas de una planificación innovadora y creativa que contemple la sostenibilidad de forma integral.	Comprende y reflexiona, de manera crítica y creativa, sobre las oportunidades que se le presentan desde el ámbito de las Tics y la innovación de cara a planificar de manera sostenible.	Crea y aporta soluciones desde un sentido crítico y creativo en los proyectos educativos, mejorando la sostenibilidad en la planificación y actuación.
-SOS2- Utilización sostenible de recursos y en la prevención de impactos negativos sobre el medio natural y social	HOLÍSTICA	Diseña y desarrolla actuaciones, tomando decisiones que tienen en cuenta las repercusiones ambientales, económicas, sociales, culturales, y educativas para mejorar la sostenibilidad.	Conoce los conceptos básicos para abordar el diseño, desarrollo y evaluación de actuaciones educativas teniendo en cuenta sus repercusiones ambientales, sociales, económicas y culturales.	Reconoce e integra la importancia de diseñar acciones educativas teniendo en cuenta criterios de sostenibilidad, considerando la necesidad de evaluar los efectos que pudiera tener el desarrollo de dichas actuaciones.	Diseña y desarrolla actuaciones educativas en las que se incluyen prácticas sostenibles y propone mecanismos de evaluación adecuados y coherentes.

-SOS3- Participación en procesos comunitarios que promuevan la sostenibilidad	HOLÍSTICA	Promueve y colabora en acciones socioeducativas como parte de la comunidad trabajando de forma cooperativa, integrando la participación de los distintos sectores y la corresponsabilidad con la sostenibilidad.	Se reconoce como parte integrante de su entorno e identifica a los sujetos y entidades de la comunidad, sus roles y antecedentes, así como las interacciones sistémicas que se producen entre todos ellos.	Se desenvuelve de manera eficaz dentro del colectivo, en el que promueve proyectos educativos de análisis sistémico del entorno, con dominio de metodologías y técnicas de análisis en los procesos sociales y participativos de la comunidad.	Es capaz de promover, diseñar y ejecutar colaborativamente proyectos socioeducativos de mejora de la participación y la democracia ambiental.
-SOS4- Aplicación de principios éticos relacionados con los valores de la sostenibilidad en los comportamientos personales y profesionales	HOLÍSTICA	Es coherente en sus actuaciones, respetando y valorando la diversidad (biológica, social y cultural) y comprometiéndose con la mejora de la sostenibilidad.	Conoce los principios éticos que promueven la diversidad para la mejora de la sostenibilidad.	Comprende e integra los principios éticos de sostenibilidad en sus acciones, considerando la naturaleza un bien en sí mismo, transmitiendo la importancia de la educación para un cambio en la relación del ser humano con el medio social y cultural.	Contribuye con la experiencia profesional al desarrollo de políticas y programas educativos que mejoran la calidad de vida para el desarrollo de la sostenibilidad en base a un compromiso con los principios éticos.
		Promueve una educación en valores orientada a la formación de una ciudadanía responsable, activa y democrática.	Reconoce y presenta los principios éticos y valores de la justicia social y el desarrollo humano sostenible como parte fundamental de la formación de la ciudadanía.	Reflexiona sobre las consecuencias de su intervención personal y profesional, las analiza desde una perspectiva ética y es capaz de valorar críticamente sus consecuencias.	Impulsa y coordina acciones educativas éticas capaces de integrar los valores de la sostenibilidad y que redunden en la justicia y el bien común.

ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LOS POLIEDROS EN EL LIBRO DE TEXTO OFICIAL DE SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Gladys Milagros Rondan Trocones
Instituto Pedagógico Nacional Monterrico. (Perú)
grondan@ipnm.edu.pe

Resumen

El presente artículo tiene como objetivo analizar la organización matemática asociada a los poliedros que se presenta en el texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación del Perú y determinar el grado de completitud de su organización matemática. En este sentido, para identificar la organización matemática hemos utilizado como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y para conocer el grado de completitud de la organización matemática utilizamos los Indicadores de Completitud de Fonseca. La metodología utilizada fue cualitativa de tipo bibliográfica y los resultados obtenidos evidencian la presencia de 3 tipos de tareas, 5 tareas, 2 técnicas, 6 tecnologías y 1 teoría y la organización matemática analizada muestra un grado de completitud menos completa.

Palabras clave: poliedros, organización matemática, indicadores de completitud

Abstract

The aim of this paper is to analyze the mathematical organization associated with polyhedra that is presented in the elementary education sixth-grade mathematics textbook (distributed free of charge by the Ministry of Education of Peru), as well as to determine the degree of completeness of its mathematical organization. In this sense, to identify the mathematical organization we have used as theoretical reference the Anthropological Theory of Didactics (TAD) and to know the degree of completeness of the mathematical organization we used Fonseca's completeness indicators. We used a qualitative, bibliographic -type methodology. The results show the presence of 3 types of tasks, 5 tasks, 2 techniques, 6 technologies and 1 theory. The mathematical organization analyzed shows a low degree of completeness.

Key words: polyhedra, math organization, indicators completeness

Introducción

Este artículo presenta aspectos de la investigación de Rondán (2015) en lo referente al análisis de la organización matemática y el grado de completitud de la misma. En este sentido, desde el año 2012, el Ministerio de Educación del Perú implementó una estrategia denominada “Buen Inicio del Año Escolar”, con el objetivo de establecer condiciones adecuadas y desarrollar acciones que permitan recibir a los estudiantes en escuelas preparadas y aptas desde el primer día de clases. Esta estrategia tiene como uno

de sus componentes la distribución de materiales educativos que implica la distribución gratuita de textos escolares en todos los niveles de Educación Básica del Perú.

Es así que, el libro de texto se convierte en uno de los principales materiales didácticos para el trabajo en el aula de los docentes, por lo tanto, la elección adecuada y pertinente del mismo va condicionar la actividad de enseñanza aprendizaje (Rondan, 2015). Asimismo, el análisis de libros de textos es un componente importante del análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; y éstos se constituyen en la primera fuente para los docentes más aún en el nivel primario, donde los alumnos no son autónomos en el uso del libro, ya que no afrontan solos el estudio de los contenidos curriculares (Godino, Font y Wilhemi, 2006).

En relación al objeto matemático poliedros el Currículo Nacional de Perú, en la competencia resuelve problemas de forma, movimiento y localización (estándar 5) señala que los alumnos del V ciclo de educación básica (quinto y sexto grado de educación primaria) deben resolver problemas en los que se modela las características y ubicación de los objetos tridimensionales así como sus elementos y propiedades (Perú, 2017). Por ello, las actividades que se propongan para la enseñanza de los sólidos deben tener en cuenta los procedimientos de construcción o generar modelos de los mismos; ya que, los estudiantes en los primeros niveles, necesitan representaciones físicas de los sólidos; porque deben integrar el objeto mental que van construyendo con todos los significados que provienen de los diferentes contextos en los que aparecen dichos objetos matemáticos. En este sentido, el diseño de tareas o actividades de introducción de los conceptos sobre sólidos deben presentar diferentes ejemplos de cada uno de ellos; que les permita experimentar, reflexionar y comprender que las ideas de los conceptos se van precisando en la medida que se encuentren más ejemplos de los mismos; esto permitirá que puedan generalizar e incluir el objeto mental de una determinada familia de sólidos (poliedros), los ejemplos de dichos objetos matemáticos, así como sus propiedades y relaciones de sus elementos (Guillén, 2010).

Por ello, surge la inquietud de realizar el análisis de la organización matemática (OM) asociada al objeto matemático poliedros que corresponden a tres organizaciones matemáticas puntuales que lo conforman los tipos de tareas (T_1,T_9 y T_{10}); que a su vez conforman una organización matemática local, que presenta el libro de texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria que lo utilizan los estudiantes de 11 y 12 años de edad, desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y determinar su grado de completitud en base a los indicadores de completitud de Fonseca (2004).

Aspectos teóricos de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

La TAD tiene elementos teóricos que son característicos y propios de esta teoría; siendo necesario definir los siguientes:

Noción de praxeología u organización matemática

Uno de los postulados básicos y principales de la TAD es la noción de praxeología en la que considera que toda actividad matemática es una actividad humana más, que puede describirse como un modelo único al que denomina praxeología. Es así que, la TAD propone que toda actividad matemática puede ser modelada mediante las praxeologías, que se constituyen en la herramienta fundamental de esta teoría (Chevallard, 1999).

En este sentido, podemos afirmar que la praxeología u organización matemática (OM) está constituida por cuatro componentes principales: tipos de tareas *(T)*, técnicas *(τ)*, tecnologías *(θ)* y *teorías (Θ)* y consta de dos niveles:

1. El nivel de la praxis (saber hacer) que está formado por tipos de tareas *(T)* y las técnicas *(τ)* que se utilizan para resolverlas.
2. El nivel del logos (saber) que está formado por las tecnologías *(θ)* que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan y las teorías *(Θ)* que es la descripción, explicación y justificación de las tecnologías. (ver Tabla 1)

Tabla 1. Componentes de una organización matemática

Elemento teórico	Símbolo	Bloque	Tipo de saber
Tipo de tarea	$\boldsymbol{T}$	Práctico – técnico (praxis)	Saber hacer
Técnica	$\boldsymbol{\tau}$		
Tecnología	$\boldsymbol{\theta}$	Tecnológico- teórico (logos)	Saber
Teoría	$\boldsymbol{\Theta}$		

Fuente: Adaptado de Chevallard (1999, p.222)

Indicadores de Completitud de una organización matemática

Los indicadores del grado de completitud de una praxeología local son establecidos en Fonseca (2004); quién señala siete indicadores de completitud de una Organización Matemática Local (OML), sin embargo, se establecieron criterios por cada indicador, los cuales presentamos a continuación:

OML1: Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

- Los tipos de tareas (T_i) sobre los poliedros se relacionan entre sí, mediante el desarrollo sucesivo de sus técnicas.
- Los tipos de tareas (T_i) sobre poliedros hacen uso del cuestionamiento tecnológico de las técnicas (fórmulas, definiciones y propiedades) del objeto matemático poliedros que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía, el alcance y la comparación de las técnicas.

OML 2: Diferentes técnicas para cada tipo tareas y criterios para elegir entre ellas.

- Existen dos o más técnicas para resolver un tipo de tareas (T_i) asociadas al objeto matemático poliedros.
- El libro de texto presenta elementos tecnológicos que permiten analizar cuál es la técnica más fiable y económica para realizar una tarea ($t_{i,j}$).

*OML 3: Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas***.**

- La técnica hace uso de distintas representaciones (palabras, expresiones, notaciones, escrituras, gráficos, etc.) que permite resolver un tipo de tarea (T_i).

OML 4: Existencia de tareas y técnicas "inversas".

- El libro de texto presenta tareas inversas asociadas al objeto matemático poliedros; es decir, tareas con los datos e incógnitas intercambiadas o tareas que parten de la respuesta y analizan la situación de partida.

- El libro de texto presenta técnicas reversibles para resolver tareas inversas asociadas al objeto matemático poliedros.

OML 5: Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.

- El libro de texto presenta tipos de tareas que permitan al alumno interpretar el real funcionamiento de una técnica para percibir su beneficio matemático en relación con otras técnicas.

OML 6: Existencia de tareas matemáticas "abiertas"

- El libro de texto presenta tipos de tareas (T_i) en donde los datos y las incógnitas no están prefijados completamente.
- El libro de texto presenta tipos de tareas de modelización matemática asociadas a situaciones matemáticas o extramatemáticas relacionadas al objeto matemático poliedros.

OML 7: Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica.

- La tecnología presente el libro de texto permite la construcción de técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

Metodología

La metodología es cualitativa de tipo bibliográfica; porque se desarrolla sobre la base de materiales ya preparados y está constituida principalmente de libros y artículos científicos, y éstos constituyen fuentes bibliográficas por excelencia (Gil, 2002). En este sentido, nuestra investigación adopta esta metodología; porque el sujeto de investigación es el libro de texto oficial del sexto grado de educación primaria que es distribuido por el Ministerio de Educación del Perú y pretendemos analizar como el autor presenta la organización matemática de tres tipos de tareas (T_1, T_9 y T_{10}) asociada a los poliedros que conforman una organización matemática local y determinar el grado de completitud.

Análisis de la organización matemática

En esta sección, describiremos la organización matemática local conformada por los tipos de tareas (T_1, T_9 y T_{10}) que presenta el libro de texto oficial de sexto grado de educación primaria; donde tenemos lo siguiente:

T_i: 3 $t_{i,j}$: 5 $\tau_{i,j,k:}$ 2 $\theta_{n:}$ 6 Θ: 1

A continuación, presentamos los tres tipos de tareas:

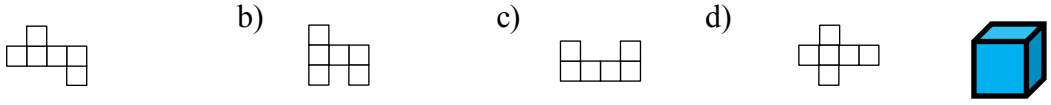
Tipo de tarea (T1): Identificar poliedros a partir de alguno de sus desarrollos planos.

Tarea ($t_{1,1}$): Identificar el cubo a partir de su desarrollo plano

Esta tarea está conformada por dos ejercicios, el primero propuesto en la sección: Conocemos los sólidos geométricos y el segundo en la sección: Trabajo en parejas. A continuación, transcribimos los ejemplos representativos de esta tarea.

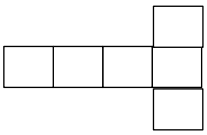
Entre las siguientes figuras. ¿Cuáles son plantillas para armar un modelo de cubo?

a) b) c) d)



***Fuente*:** Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p. 161)

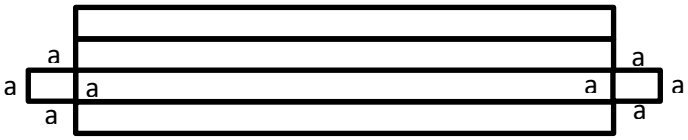
Identifiquen el prisma a partir de su desarrollo plano.



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.171)

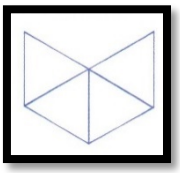
Tarea ($t_{1,2}$): Identificar el prisma a partir de su desarrollo plano.
Esta tarea está conformada por el problema que corresponde a la sección: Trabajo en parejas; el cual corresponde al problema 1, ejercicio b.

Identifiquen el poliedro representado por cada plantilla



***Fuente*:** Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.171)

Tarea ($t_{1,3}$): Identificar el tetraedro a partir de su desarrollo plano.
Esta tarea está conformada por el problema que corresponde a la sección: Construimos modelos de poliedros y es el siguiente: ¿Crees que la figura adjunta es el desarrollo de un tetraedro? Explica tu respuesta.



***Fuente*:** Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p 163)

Técnica (τ): No presenta técnica de resolución.
Tecnología *(θ)*: θ_1 Definición de desarrollo plano de poliedros, θ_2 Definición de poliedros y θ_3 Elementos de poliedros
Teoría *(Θ)*: Geometría plana y del espacio.
Tipo de tarea (T_9): Calcular el volumen de los poliedros utilizando fórmulas
Tarea ($t_{9,1}$): Calcular el volumen de un prisma a partir de dimensiones dadas
Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Medimos volumen, en la subsección: Trabajo individual. Es así que, presentamos el ejemplo del problema:

> Una tableta de margarina tiene la forma de un prisma rectangular. Sus dimensiones son: 2 cm, 2 cm y 10 cm. Si en una caja de esa margarina vienen 4 tabletas. ¿Cuál es el volumen de esa caja?
> *Fuente*: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.177)

Técnica *($\tau_{9,1,1}$)*:

1. Utiliza la fórmula de volumen:

V = medida del largo x medida del ancho x medida de la altura

2. Reemplaza las medidas que tienen las dimensiones del largo, ancho y altura de la tableta de margarina.
3. Menciona el volumen que tiene la tableta de margarina.
4. Suma cuatro veces el volumen de la tableta de margarina.
5. Menciona el volumen que tiene la caja que contiene las cuatro tabletas de margarina.

Tecnología *(θ)*: θ_1 Dimensiones de los poliedros (largo, ancho y altura), θ_2 Definición de volumen de los poliedros y θ_3 Fórmula del volumen de los poliedros.
Teoría *(Θ)*: Geometría plana y del espacio.
Tipo de tarea (T_{10}): Calcula la longitud de los elementos de los poliedros
Tarea ($t_{10,1}$): Determina la longitud de las aristas de un cubo a partir de un volumen dado.
Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Medimos volumen, en la subsección: Trabajo individual. A continuación, presentamos el ejemplo del problema:

El volumen de un cubo es 729 m^3. Determina la longitud de sus aristas
Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.177)

Técnica *($\tau_{10,1,1}$)*:

1. Utiliza la fórmula de volumen:

V = medida del largo x medida del ancho x medida de la altura

2. Reemplaza la medida del volumen del cubo en la fórmula.
3. Asigna el mismo valor al largo, ancho y altura del cubo.
4. Menciona el volumen que tiene el cubo.
5. Divide el volumen del cubo entre el valor asignado al largo, ancho y altura del cubo.
6. Menciona el resultado de la división que viene a ser la longitud de la arista del cubo.

Tecnología *(θ)*: θ_1 Dimensiones de los poliedros (largo, ancho y altura), $\boldsymbol{\theta_2}$ Definición de volumen de los poliedros y θ_3 Fórmula del volumen de los poliedros
Teoría *(Θ)*: Geometría plana y del espacio.

Grado de completitud de las organizaciones matemáticas locales
En esta sección, presentamos el análisis de los indicadores de completitud de tres organizaciones puntuales (tipos de tareas: T_1, T_9 y T_{10}) que conforman una organización matemática local. Para ello, tomamos en cuenta los trabajos de Fonseca (2004) y Rondan (2015). A continuación, presentaremos el análisis de la organización matemática basada en los siete indicadores de completitud de Fonseca:
Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico (OML1); la integración de los tipos de tareas es un aspecto importante en una OML; porque ello evitará la reiteración de tareas cuya ejecución requiere de procedimientos mecánicos y nada significativos para el estudiante (Fonseca, 2004). (ver Tabla 2)

Tabla 2. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

Criterios considerados	Cantidad de tipos de tareas	Sí	No
Los tipos de tareas (T_i) sobre los poliedros se relacionan entre sí, mediante el desarrollo sucesivo de sus técnicas.	03	02	01

Los tipos de tareas (T_i) sobre poliedros hacen uso del cuestionamiento tecnológico de las técnicas.	03	--	03

***Fuente*:** Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

Los tipos de tareas (T_1, T_9 y T_{10}) presentan una escasa cantidad de tareas donde se pueda realizar el cuestionamiento tecnológico a las técnicas que se usan para hacer las tareas.
Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas (OML2); en este indicador solo existe 1 técnica para resolver estos tipos de tarea (T_9 y T_{10}) que hace uso de un solo elemento tecnológico que es la fórmula del volumen. Sin embargo, el hecho de que solo exista una técnica no le da al alumno la posibilidad de contrastar o comparar cual es la técnica más eficiente para realizar un tipo de tarea o una tarea determinada; y en el caso del tipo de tarea T_1 no presenta técnica ; (Rondan, 2015). (ver Tabla 3)

Tabla 3. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas

Criterios considerados	Número de tipos de tareas	Cantidad de técnicas	Elementos tecnológicos
Existen dos o más técnicas para resolver un tipo de tarea (T_i) asociadas al objeto matemático poliedros.	03	01	--
El libro de texto presenta elementos tecnológicos que permitan analizar cuál es la técnica más fiable y económica para realizar una tarea ($t_{i,j}$).	03	--	01

Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas (OML3); este indicador considera la posibilidad de hacer uso de varias representaciones en la ejecución de cada tipo de tarea (Rondan, 2015).

Tabla 4. Objetos ostensivos que sirven para representar las tareas

Forma de representación	Cantidad de representaciones ostensivas
Figuras	08
Gráfica	--
Verbal	11
Numérica	05
Total	24

Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

Existencia de tareas y de técnicas "inversas" (OML4); en los tipos de tareas (T_1, T_9 y T_{10}) no existe ninguna tarea inversa ni tampoco una técnica inversa (Rondan, 2015).
*Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas (OML5); e*n los tipos de tareas (T_1, T_9 y T_{10}) no se proponen tareas que incluyan la interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas, las tareas presentadas en el libro de texto están orientadas a obtener respuestas específicas y no se han identificado tareas asociadas a la comprobación o verificación de determinados resultados (Rondan, 2015).
Existencia de tareas matemáticas "abiertas" (OML6); no se presentan tareas donde los datos y las incógnitas no están prefijados completamente y T_9 está conformado por una tarea de modelización matemática que hace referencia a una situación extramatemática.
Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica (OML7); el único elemento tecnológico que podemos resaltar en este criterio es la fórmula del volumen.

Conclusiones

En primer lugar, se logró analizar la organización matemática que presenta: 3 tipos de tareas, 5 tareas, 2 técnicas, 6 tecnologías y 1 teoría.
En segundo lugar, se logró determinar el grado de completitud de la organización matemática que resultó ser *menos completa*; porque se observa muy poco grado de coincidencia en 4 indicadores (OML1, OML2, OML3 y OML6) y la ausencia total de 3 indicadores (OML4, OML5 y OML7).
En tercer lugar, la metodología empleada fue adecuada porque permitió realizar un análisis previo de los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que presentaba el libro de texto analizado.
En cuarto lugar, el referencial teórico utilizado que en este caso fue la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) fue pertinente para el análisis de la organización matemática; en función a los elementos que conforman una O.M. que son tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19 (2),* 221-266. Recuperado de http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/CHEVALLARD.PDF

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Tesis de doctorado en Ciencias Matemáticas. Universidad de Vigo. España. Recuperado de http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf

Gil, A. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa.* 4ta. edicao. Brasil: Editorial Atlas. Recuperado de http://www.academia.edu/4405328/GIL_Antonio_Carlos_COMO_ELABORAR_PROJETOS_DE_PESQUISA_Copia

Guillén, G. (2010). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didáctica, 18 (1)*, 35-53. Recuperado de http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v18n1/02124521v18n1p35.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2017). *Currículo Nacional de la educación básica*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2012). *Matemática 6*. Perú: Ediciones El Nocedal.

Rondan, G. (2015). *Los poliedros: Análisis de una organización matemática en un libro de texto de sexto grado de educación primaria*. Tesis de maestría en Enseñanza de la Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima.

INTERDISCIPLINARIEDAD: INTERACCIÓN ENTRE ASIGNATURAS APARENTEMENTE DISTINTAS

Alexandra Assaf, Denilson Amâncio, Iraídes Gontijo, Lucas Lemos.
Universidad Estadual de Minas Gerais, Facultad de Pará de Minas, Universidad Paulista, Facultad de Pará de Minas.(Brasil)
alexandraassaf@yahoo.com.br, denilsonbdo@hotmail.com, girospan@hotmail.com, lclemos1@hotmail.com

Resumen

Este artículo destaca preocupaciones acerca de la Educación Matemática, presentando soluciones que faciliten los métodos didácticos. En este contexto, el conocimiento del alumno se tiene en cuenta junto con la interdisciplinariedad. Durante el desarrollo de la investigación se destacó la importancia del maestro en la escuela, aula, interdisciplinariedad y su profesión. Se llevó a cabo una encuesta y un cuestionario para puntuar las dificultades de los estudiantes en la solución de cuestiones matemáticas. Se concluyó que para el dinamismo en aula es esencial la creación de vínculos entre asignaturas y la validación de los conocimientos previos de los estudiantes.

Palabras clave: interdisciplinariedad, educación matemática, conocimiento significativo

Abstract

This paper highlights concerns about Math Education, presenting solutions that facilitate teaching methods. In this context, student knowledge is considered linked to interdisciplinary work. During the development of the research we pointed out the importance of the teacher in the school, the classroom, the interdisciplinary work and his profession. A survey and a questionnaire were carried out to know the students' difficulties in solving Math questions. It was concluded that for the dynamism in the classroom, it´s essential to create links between subjects as well as to validate students' previous knowledge.

Key words: interdisciplinarity, mathematical education, significant knowledge

Introducción

Es notable que las cuestiones relativas a la educación se están discutiendo constantemente ya que los métodos utilizados en muchos países no están de acuerdo con la realidad de los estudiantes. Hablar en contextualizar es hacer referencia de la importancia del ambiente y las transformaciones diarias, puntualizando la importancia del profesor, sobre todo la relación interdisciplinar entre las ciencias.

Cuando se trata de Educación Matemática, varias dudas son puntuadas, principalmente debido a que la asignatura es intimidante para muchos. Ante varias preguntas, surge la necesidad para determinar si la

dificultad de los estudiantes está en las resoluciones de los cálculos, interpretación de declaraciones o la mala conducta de los mediadores del saber, que a menudo no dan significado a lo que enseñan y ni el uso del conocimiento previo traído por el estudiante.

Considerando que el conocimiento previo del estudiante tiene un significado en lo que si quiere mediar se necesita más de un sentido que viene de las técnicas que fluyen con la sociedad y la singularidad de ciertos grupos. Luego, es nítido también el uso de un segundo idioma en la trayectoria académica de los estudiantes y en el trabajo con la Matemática que es una ciencia universal. Aquella idea de coherencia con la realidad se enfrenta con oportunidades generadas en cualquier momento y la lengua española, en el caso de Brasil, puede ser apuntada como una necesidad porque incluso si encuentra en un área que permite una integración educativa, profesional y comercial; es decir, la relación política establecida con el Mercosur se apunta fuertemente en el fomento de este segundo idioma, abriendo también una variedad de riqueza cultural de los vecinos latinos.

Maestro/Escuela

El educador tiene un papel fundamental en el ambiente escolar. Él es el mediador del conocimiento, responsable de potenciar el estudiante para el futuro. Puede decirse que el método de enseñanza y aprendizaje mucho se ha cambiado en las últimas décadas. La tarea de la enseñanza ya no es la misma, donde el profesor sólo repasaba lo que aprendiera a los alumnos, pero sí, construir ciudadanos capaces de criticar y transformar el entorno en que viven.

Lo que se ve hoy en día es una nueva búsqueda por los métodos actuales, a los cuales insertan el cuerpo docente en un entorno en lo cual él ya está acostumbrado, haciendo así, el acto de instruir, dinámico. Ante ello se resalta por Freire:

La acción docente es la base de una buena formación escolar y contribuye para la construcción de una sociedad pensante. De esta manera, cabe mencionar que el profesor debe saber cómo controlar los errores, estimular el aprendizaje y educar a través de la enseñanza. (Freire, 1996, p.30)

Por lo tanto, cabe al maestro proporcionar al estudiante textos que forman parte de su vida diaria y que el mismo tenga ganas de hacer preguntas. Considerar el conocimiento previo del alumno es un principio didáctico para cualquier profesor que quiera enseñar procedimientos de revisión cuando el objetivo es — más que la calidad de la producción

— la actitud crítica ante el propio texto.

Profesor/Aula

En el proceso educativo y el papel del profesor es ofrecer políticas de crecimiento y oportunidad a los estudiantes.

Discusiones sobre las dificultades enfrentadas por los estudiantes en el campo de las matemáticas son frecuentes. Algunos marcan el problema como "fantasmas matemáticos", tienen una relación directa con

la abstracción, otros expertos creen que la culpa es del profesor y no la contextualización necesaria para este campo. Luego, contexto y contextualización son temas de discusión en los parámetros curriculares brasileños y directrices curriculares y son vistos como necesarios en el proceso educativo sin despreciar a la abstracción y las técnicas de uso.

En la búsqueda de la expansión del aprendizaje, el concepto de contexto tiene conformidad con las diferentes realidades. Este concepto requiere de maestros diversas formas de trabajo para diferentes públicos.

Es visible que los métodos jesuíticos tratados en las escuelas hoy en día no son eficaces para este público actual, luego hay la necesidad de cambio. Se juzga importante

dar sentido a lo que se aprende y al mismo tiempo, mezclar contenido y puntuar que las ciencias están relacionadas. Esa idea de enseñanza pegado en las paredes, alineadas, no es tan plausible, por el contrario, hay la necesidad de una nueva perspectiva de las matemáticas por la sociedad y este hecho es posible. Según D ' Ambrosio:

El cotidiano está lleno de saber y hacer de la propia cultura. Todo el tiempo, las personas están comparando, clasificando, cuantificando, midiendo, explicando, generalizando, infiriendo y, de alguna manera, evaluando, utilizando las herramientas materiales e intelectuales que sean apropiados a su cultura. (D'ambrosio, 2005, p. 22)

La sociedad está llena de conocimiento multicultural, donde la inserción del estudiante se convierte necesaria, haciendo con que haya sentido en aquello que se estudia y que se centran en este proceso, proporcionando una contextualización en el medio interdisciplinario.

Sin embargo, tenga en cuenta que maestros deben sensibilizarse con las diferentes formas de construir una escuela que sea capaz de construir el conocimiento en su entorno, creando significados a lo que se enseña y correlacionar lo que se aprende.

Profesor y su profesión

Se sabe que buscar el nuevo requiere la necesidad de salir de la zona de conforto y cuestionar incluso lo que está funcionando. Cultivar la audacia, dejar del lado el común, enfocar estímulos presentes en cada profesor y para que esto se realice en una necesidad de coraje, vitalidad y energía en abundancia, ya que son palabras que hacen que el profesional busque este concepto y sea un agente transformador en el aula.

La enseñanza se configura de varias maneras, una de ellas es estar fuera del sentido común, puesto que una sociedad llena de conocimiento afecta la relación que tiene el profesor con sus alumnos. Este concepto puede no ser sólo una frase estructurada, sino, más bien, un hacer práctico, ya que es el profesor quien construye su propia etiqueta de moda. Por lo tanto, supone que se podría decir que este sentido práctico se realiza en la búsqueda por la diferencia, porque es un aliado para la carrera profesional, pudiendo ser el éxito del docente.

La diferencia puede configurarse en la acción de un "profesor show", que busca, sobre todo, creatividad, ya que pueden crearse a través de experiencias vividas por los maestros que no obtuvieron éxitos o incluso que pueden ser mejoradas, siempre buscando el perfeccionismo y respuestas de lo que hace.

En todo momento, ideas surgen para el profesor creativo. Por lo que puede resultar en eficiencia en sus clases deben ser organizadas y bien trabajadas. Pero ¿y a los profesionales que no tienen estas ideas? Aquí están algunos consejos:

-Leer los grandes libros de cómics.

-Ponte a prueba siempre en sus clases;

-Siempre intentar conocer el "por qué" de todo;

-Comprender que nunca tendrá suficiente información para tomar una decisión con toda

totalidad.

Además de creatividad, busque mejorar su capacidad para trabajar en equipo, su alegría y coraje, las ganas de probar cosas nuevas y la capacidad de "hablar el idioma" de los estudiantes.

Vale la pena tener en cuenta que, todos estos conceptos abordados, se utilizan para obtener el aprendizaje significativa de los estudiantes, que ocurre cuando una nueva información se relaciona con un aspecto relevante existente en la estructura cognitiva del aprendiz. Por otro lado, serían inútiles estos enfoques si el aprendizaje permaneciera como un mecánico, que la diferencia significativa ocurra cuando una nueva información no se relaciona a conceptos ya existentes en la estructura cognitiva, siendo arbitrariamente almacenadas; por lo tanto, se produce poca o ninguna interacción entre la nueva información adquirida y la ya almacenada. Con eso, Paulo Freire en su libro "Pedagogía del oprimido" dice:

La educación que se impone a los que verdaderamente se comprometen con la liberacion y esto no puede basarse en un entendimiento de los hombres como seres "vacíos" a quien el mundo "llena" de contenido; no puede basarse en una conciencia especializada, mecanicista compartimentada, pero en los hombres como "cuerpos consientes" y en la conciencia como intencionada al mundo. No puede ser del depósito de contenido, pero el cuestionamiento de los hombres en sus relaciones con el mundo. (Freire, 2004, p. 67)

En busca de este aprendizaje es que surge el "profesor show", éste es el profesional que las escuelas están buscando porque la clase de interactividad configura a los estudiantes como interesados y disciplinados, y en consecuencia propicia el aprendizaje. El maestro incluso puede comparar sus clases con la conferencia, donde el orador tiene que hacer una gran presentación para su audiencia. Pero no es suficiente para el profesor hacer una clase divertida y relajada. La misma necesita tener todo su enfoque al contenido, con el objetivo final, el aprendizaje de los estudiantes. Según Freire, “Nadie educa a nadie, nadie se educa a sí mismo, los hombres son educados cada otro, mediatizados por el mundo”. (Freire, 1981, p. 79)

En conformidad con el aprendizaje anterior, Freire señala que hay dos tipos de educación, es decir la bancaria y la problematizada. La primera trae el aprendizaje sin el significado del conocimiento, donde hay solamente información proporcionada por el conocimiento del profesor. Por otro lado, la segunda

destaca la problematización de los conceptos cubiertos con la experiencia de los estudiantes, buscando la comprensión de ellos no sólo a través de la imaginación, pero, por el contrario, la práctica de cada uno.

Interdisciplinariedad

En Brasil, la proximidad con las fronteras de los países hispanohablantes, desde sus relaciones comerciales impulsada por el MERCOSUR, llevaron al gobierno brasileño a introducir la lengua española como una oferta obligatoria en las escuelas, a través de la Ley Nº 11.161, de 05 de agosto de 2005.

Como era de esperar, el dominio de lenguas extranjeras es fundamental en un mundo globalizado. En este contexto, el español se presenta como una de las mejores opciones más ventajosas para los brasileños, tanto desde un punto de vista profesional, cuánto cultural y académico.

Si la integración comercial y profesional con nuestros países vecinos es ya razón suficiente para despertar el interés en aprender español, la importancia académica y cultural de esta lengua fortalece su inclusión en el plan de estudios en varias áreas, especialmente en las matemáticas.

La interdisciplinariedad es un "requisito" no sólo con respecto a las actividades de la escuela, sino también las prácticas de la vida cotidiana que a menudo se encuentra. El mundo está en cambio constante y acelerado. Las tecnologías de la comunicación integran personas de diferentes partes del mundo en cuestión de segundos, y para hacer frente a esta nueva fase como resultado de un mundo globalizado, se necesita saber integrar los diversos conceptos y realidades. Esta integración debe complementar las distintas asignaturas y la posibilidad de acceso a la investigación, motivar el alumno y el educador para buscar nuevos conocimientos sobre un determinado tema, problema o pregunta.

En el siglo XX, a finales de la década de 1960, el concepto de interdisciplinariedad, llega a Brasil también influyendo más tarde en la redacción de las leyes que rigen la educación brasileña, tales como: la Ley de Directrices y Bases (LDB-Ley Nº 9394/96) y los Parámetros Curriculares Nacionales (PCNs), teniendo como precursores Hilton Japiassu y Ivani Fazenda. Según Andrade:

Para que la interdisciplinariedad pueda ser introducida en el contexto escolar se necesita partir de un modelo constructivista, con el objetivo que el ser humano nace con el potencial para aprender y esta habilidad se desarrolla en interacción con el mundo: “Con nueva concepción de división del saber, resaltando la interdependencia, la interacción y la comunicación existentes entre las asignaturas y buscando la integración del conocimiento en un todo armónico y significativo”. (Andrade, 1995, p. 23)

Según Veiga-Neto, las varias contribuciones relevantes a la educación interdisciplinar se tiene:

a) Un mayor diálogo entre profesores, estudiantes, investigadores, etc., de diferentes áreas del conocimiento; b) Una mejor preparación profesional y una formación más integral del ciudadano; c) Una ciencia más responsable, ya que sería posible trae el cuestionamiento de la ética en el conocimiento científico; d) La reversión de la tendencia creciente de especialización, de modo que desarrollan una visión holística de la realidad; e) La creación de nuevos conocimientos, gracias a la fertilización mutua de zonas que hasta entonces permanecía hermético; f) Invertir un supuesto desequilibrio ontológico de la

modernidad, es decir, invertir el desajuste entre una naturaleza supuesto pasado de cosas y acciones humanas que ha cambiado tal naturaleza. (Veiga – Neto, 1994, p. 145)

Se entiende entonces que la interdisciplinariedad es la actitud que debe adoptarse para superar cualquier enfoque fragmentado que se mantiene del mundo y de la realidad. Este concepto asume así, nuevas preguntas y búsquedas, con el fin de entender la propia realidad. Esto implica, en su mayor parte, en cambios de actitud, lo que permite la adquisición de conocimientos por parte del individuo, yendo más allá de los límites de su saber, entonces, organizar y añadir contribuciones de otras asignaturas. Para una interacción eficaz, considerada como sinónimo del interdisciplinar, se hace necesario entender como actitud que busca romper con la postura positivista de fragmentación, con intuito de una comprensión más amplia de la realidad.

La importancia del portugués para las matemáticas

La lengua portuguesa y las matemáticas están presentes a lo largo de la primaria. Ambas asignaturas deberán transmitirse con gran cuidado y dedicación. No deben separarlas, pero, integrarlas para que los estudiantes entiendan que, incluso en los cálculos, se requiere el idioma portugués.

Para que el alumno entienda el propósito de la pregunta de las matemáticas, es necesario antes entender la interpretación. Esta es la parte donde la interpretación del texto se convierte en fundamental. Si los estudiantes no pueden descifrar la pregunta, no será capaz de resolver el problema.

Otro punto válido es presentar en la búsqueda temas relacionados con la vida cotidiana del estudiante para aproximar las actividades a la realidad. Por lo tanto, depende del profesor presenta contenidos que se consideran esenciales para la vida en sociedad, especialmente aquellos que requieren intervención y sistematización de la escuela, tales como lectura y escritura. De esta manera, es pertinente señalar que no es suficiente para el estudiante la capacidad de decodificar textos escritos. Es necesario que él: 1) reconozca la lectura y la escritura como actividades interactivas de producción de sentido y los usos y prácticas del lenguaje; 2) alcance un nivel de alfabetización que permita reconocer y resolver diferentes problemas matemáticos; 3) tenga acceso a los usos literarios de la lengua y los trabajos de distintos autores de la literatura brasileña.

Cuestionario

A continuación, se presenta un cuestionario realizado por alumnos de la red de educación básica con el fin de determinar los obstáculos que se enfrentan.

1. ¿Cuál es la importancia de aprender Español en las escuelas regulares en Brasil?

Teniendo en cuenta la posición geográfica del Brasil es perceptible que por ser el único país de la América Latina que no tiene Español como idioma oficial dificulta el crecimiento profesional debido a la expansión de las relaciones económicas entre los países hispanohablantes. Además, la importancia académica de esta lengua refuerza la imprescindibilidad de incluir en el plan de estudios. De forma cultural el dominio español abre una amplia gama de oportunidades culturales.

2. El Español como segunda lengua y la Matemática como disciplina universal, ¿promueven una interdisciplinariedad?

Sí, ambas asignaturas son de gran importancia en la época contemporánea, por lo tanto, fundamentales para relacionar sus conceptos y crear un nuevo modelo de clase.

3. ¿Cuál es la importancia de la interdisciplinariedad entre Matemática, Español y Portugués?

Las tres disciplinas trabajadas en conjunto darán grandes resultados para los estudiantes; más aún, la Matemática siendo una asignatura universal debe ser trabajada en todos los idiomas y el portugués ayudará en la interpretación de la Matemática en relación con otra lengua.

4. La Matemática está constantemente presente en nuestro cotidiano, en este contexto, ¿cuál es tu perspectiva de dicho contenido durante la temporada en otro país?

La Matemática será de fundamental importancia porque está presente en todos los ámbitos de la sociedad, desde la conversión a otras monedas, hasta la cantidad de cursos en mi currículum.

5. ¿Las dificultades en la resolución de problemas matemáticos consisten solamente en intervalos de cálculos o en la mala comprensión del enunciado?

El malentendido de la elocución, porque hoy los estudiantes no logran interpretar una cuestión que en definitiva impiden el aprendizaje de la Matemática, haciendo imprescindible la interdisciplinariedad entre Matemática y el Portugués.

Conclusión

En definitiva, se entiende que interdisciplinariedad es un enlace entre disciplinas que proporcionando un diálogo entre ellas, discuten distintas líneas de conocimiento que buscan soluciones compartidas que ayudan al estudiante a anclarse en sabidurías existentes para combinarlas con su vida cotidiana. De esta manera, el educador debe priorizar el uso de prácticas metodológicas y estrategias que puedan mejorar el trabajo pedagógico de sus clases, y cómo su papel, "atraer" los estudiantes por su manera de contextualizar los contenidos, fomentando así, su desarrollo intelectual y ayudarles a construir su personalidad como ciudadano crítico.

La aspiración de poner en práctica nuevos métodos de enseñanza se hace necesario incrementar la educación con la visión globalizada del conocimiento, confluyendo en la relación enseñanza/aprendizaje y profesor/alumno, cada vez más, con armonía y claridad, haciendo mejor comprensión de la realidad y mejor ánimo para hacer frente a temas de estudio.

Sin embargo, destaca que, mientras haya obstáculos epistemológicos, institucionales, psicológicos, metodológicos o culturales que dificultan la vinculación entre las disciplinas, más difícil se alcanzará el contexto interdisciplinario.

Referencias bibliográficas

Andrade, R. (1995). Interdisciplinaridade: um novo paradigma curricular. Revista Dois Pontos.

D'ambrosio, U. (2005). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*.

Belo Horizonte: Autêntica.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.*

São Paulo: Paz e Terra.

Freire, P. (2004). Pedagogia do Oprimido. Rio de janeiro: Paz e Terra.

Freire, P. (1981). Pedagogia do Oprimido. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Veiga-Neto, A. (1994). *Produção e construção do conhecimento nas diferentes disciplinas – a problemática da interdisciplinaridade*. Goiânia: Anais do VII ENDIPE.

TIPOS DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA PERUANA

Miluska Osorio, Danilo Díaz-Levicoy
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. (Perú), Universidad de Granada. (España)
miluselen@googlemail.com, dddiaz01@hotmail.com

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados parciales de un estudio sobre los gráficos estadísticos en dos series completas de libros de texto de matemática (12 textos) de Educación Primaria en el Perú. Siguiendo una metodología de tipo cualitativa y mediante un análisis de contenido se compara el tipo de gráfico usado en las diferentes actividades que sugieren los libros de texto, tanto por la editorial como por el nivel (curso). Los resultados muestran que, a nivel general, el gráfico más frecuente es el de barras, con presencia en todos los cursos, seguido del gráfico de líneas. Las dos series de libros de texto realizan diferentes interpretaciones de las directrices curriculares al incluir gráficos no recomendados para el curso correspondiente.

Palabras clave: gráficos estadísticos, libros de texto de matemáticas, educación primaria

Abstract

This paper shows the partial outcomes of a study on statistical graphs in two complete series of math textbooks (12 textbooks) of primary education in Perú. Following a qualitative methodology and through a content analysis, we compared the type of graphs used in all the activities contained in the textbooks available (by the editorial line and by the grade) The results show that, in general, the bar chart is the most frequently used graph, in all grades, and linear graph is used in second place. The two series of textbooks make different interpretations of the curricular guidelines when they include graphs no recommended for each corresponding level.

Key words: statistical graphs, math textbooks, primary education

Introducción

Los estudiantes, como futuros ciudadanos, deben estar preparados para obrar de manera asertiva en cada contexto en que tengan que vivir, para lo cual es necesario que esté informado, sea consciente de los cambios de su entorno y en consecuencia, sea capaz de crear conocimiento a partir de su entorno más cercano. El modelamiento de los fenómenos, hechos, sucesos, etc., a través de los gráficos estadísticos es importante para que el niño configure y comprenda la sociedad actual, y razone correctamente. Por ello, el trabajo con los gráficos estadísticos puede capacitar a un niño a desarrollar un juicio crítico de la información que recibe, para ello es necesario un trabajo pertinente y gradual con estas representaciones en la escuela primaria. De acuerdo a estas consideraciones, es importante determinar cómo se presentan

los gráficos estadísticos en el currículo de Educación Primaria, así como su implementación en los libros de texto.

El objetivo de este trabajo es aproximarnos al significado institucional pretendido sobre los gráficos estadísticos en los libros de texto de matemática de Educación Primaria en el Perú. La investigación se ve motivada por la importancia de los gráficos estadísticos en la formación de un ciudadano estadísticamente culto, su presencia en las directrices curriculares de Educación Primaria, y el papel de los libros de texto como elemento de apoyo para desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Debido a que los estudios sobre gráficos estadísticos en libros de texto de matemática en Educación Primaria aún son escasos en el Perú, tomamos como referente el de Díaz-Levicoy (2014), que estudia su presencia en libros de texto de España. Además, de lo expresado en las directrices curriculares de Educación Primaria en el eje de Estadística propuesto por el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU, 2009), en donde un 40% de las capacidades descritas para la Educación Primaria están relacionadas con el trabajo con gráficos estadísticos, que forman parte del área de análisis de los datos.

Fundamentos

Existe una necesidad de formar ciudadanos estadísticamente cultos (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011) que cuenten con los conocimientos básicos para analizar la información que proviene de su entorno, es decir, que "sean capaces de leer de manera crítica los diferentes tipos de gráficos que pueden encontrar en los medios de comunicación, Internet y en su vida profesional" (Díaz-Levicoy, 2014, p. 3), por ello es necesario dotar al niño, futuro ciudadano, con herramientas que le permitan encontrar, descubrir, gestionar y utilizar información.

Las directrices curriculares para la Educación Primaria (MINEDU, 2009, p. 19) se ven sustentadas:

> (…) sobre la base de fundamentos que explicitan el qué, el para qué y el cómo enseñar y aprender. Propone competencias a lo largo de cada uno de los ciclos, las cuales se logran en un proceso continuo a través del desarrollo de las capacidades, conocimientos, actitudes y valores debidamente articulados, que deben ser trabajados en la institución educativa con el fin de que se evidencien en el saber actuar de los estudiantes.

Además, los estudiantes "se ciñe[n] a la realidad de los hechos y datos actuales a partir de la información que brinda la familia y la escuela" (MINEDU, 2009, p.13); el estudiante cuestiona, averigua, indaga, reflexiona a partir de la información proveniente de su entorno, y actúa en consecuencia; por lo tanto, uno de los medios y recursos que le trae información de una manera sutil, son los gráficos estadísticos.

Es papel del docente articular las capacidades, competencias y actitudes propuestas en el currículo; para lo cual, entre los recursos pedagógicos con los que cuenta en el aula de clase es el libro de texto, que trae al aula las actividades y tareas a realizar por el niño, brinda un escenario para que el alumno aprenda a partir de la situación didáctica a actuar en una situación real, que se dé cuenta de que su realidad, la realidad, no es unívoca, y adopte una actitud, una disposición a aprender a lo largo de la vida.

Los libros de texto son soporte curricular (Escolano, 2009), que deben interpretar e implementar las directrices curriculares (Díaz-Levicoy y Roa, 2014) y definen un consenso educativo (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015)

En la Tabla 1 se describen las capacidades a nivel de Educación Primaria para el eje de Estadística y en la que se observa la relevancia de los gráficos estadísticos desde los primeros cursos. Con ello, los estudiantes deben construir y leer con rigurosidad los gráficos estadísticos que traen los libros de texto, y el profesor poseer conocimiento y experiencia para enseñar los gráficos estadísticos adecuadamente.

Tabla 1. *Capacidades descritas en el currículo de Educación Primaria (MINEDUC, 2009)*

Curso	Capacidades
Primero	• Representa datos en tablas simples. • Interpreta la relación entre variables organizadas en tablas (p. 192).
Segundo	• Interpreta y elabora esquemas de clasificación. • Interpreta y representa relaciones entre datos numéricos en gráfico de barras en cuadrículas. • Identifica en situaciones concretas la ocurrencia de sucesos (p. 194).
Tercero	• Interpreta y representa información numérica en tablas de doble entrada, gráfico de barras y pictogramas. • Identifica y relaciona la ocurrencia de sucesos numéricos y no numéricos: seguros, probables e improbables (p. 196).
Cuarto	• Interpreta y elabora tablas de doble entrada, gráfico de barras, de líneas y pictogramas, con relación a situaciones cotidianas. • Formula y argumenta la posibilidad de ocurrencia de sucesos numéricos y no numéricos: seguros, probables e improbables (p. 199).
Quinto	• Interpreta y argumenta información que relaciona variables presentadas en gráficos de barras, poligonales y circulares. • Resuelve problemas que implican la organización de variables en tablas y gráficas estadísticas. • Identifica e interpreta sucesos deterministas (p. 202).
Sexto	• Interpreta y establece relaciones causales que argumenta a partir de información presentada en tablas y gráficos estadísticos. • Formula y resuelve problemas que requieren de las medidas de tendencia central. • Identifica e interpreta sucesos de azar (p. 204).

Marco teórico

El presente trabajo se sustenta en el Enfoque Ontosemiotico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), desarrollado por Godino y cols. (e.g., Godino y Batanero, 1994), en especial la noción del *significado institucional pretendido* del objeto matemático gráficos estadísticos, es decir, aquel sistema de prácticas considerados para su implementación en el aula. De esta forma nos permite aproximarnos al *significado institucional de referencia* (Godino y Batanero, 1994), al que nos aproximamos por medio del estudio de los gráficos en las directrices curriculares y su implementación en los libros de texto.

Metodología

En este trabajo seguimos una metodología cualitativa, mediante análisis de contenido (López, 2002), identificando en cada libro de texto la sección en el que se hacía referencia a algún gráfico estadístico,

entre ellas, ejercicios, ejemplos, definiciones, problemas, retos; las que se han codificado para su tabulación y posterior análisis.
La muestra estuvo constituida por dos series completas de libros de texto de matemática para la Educación Primaria peruana, 12 libros en total, pertenecientes a los editados para el Ministerio de Educación (MINEDU) y por Bruño, elegidas por ser las de mayor difusión y tradición en el país y que se detallan en el Anexo.

Análisis de los resultados

En la Tabla 2 observamos que el gráfico más utilizado es el de barras (46,6%), donde los textos editados para el MINEDU (51%) dispone de más actividades para este tipo de gráfico que los textos de Bruño (42,6%), en segundo lugar está el gráfico de líneas (20,9%), con un 17,3% en los textos de MINEDU y un 24,1% en los de Bruño. En tercer lugar, el pictograma y el gráfico circular (13,1%), con respecto al pictograma se evidencia más secciones en los textos del MINEDU (15,3%) que en los de Bruño (11,1%), y el gráfico circular en cambio su presencia es mayor en los textos de Bruño (15,7%) que en los del MINEDU (10,2%). El histograma (2,9% en total) es trabajado solo por los textos de Bruño (5,6%), este es un gráfico que está recomendado en las directrices curriculares para la Educación Secundaria (MINEDU, 2009). La editorial Bruño presenta una mayor cantidad de gráficos, desde situaciones cotidianas hasta situaciones que despiertan la reflexión de los niños, como especies en peligro de extinción en el Perú. Los textos españoles (Díaz-Levicoy, 2014), chilenos (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015) y peruanos trabajan con el gráfico de barras, líneas, pictograma y circular, los textos chilenos además trabajan con el gráfico de tallos y hojas y otros, cumpliendo las exigencias del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2012) en cuanto al tipo de gráfico presentado (Díaz-Levicoy et al., 2015).

Tabla 2. *Porcentaje del tipo de gráfico según editorial*

Gráfico	MINEDU (n=98)	Bruño (n=108)	Total (n=206)
Barras	51	42,6	46,6
Líneas	17,3	24,1	20,9
Pictograma	15,3	11,1	13,1
Circular	10,2	15,7	13,1
Histograma		5,6	2,9
Dos o más gráficos	6,1	0,9	3,4

En la Figura 1 se muestra un ejemplo del gráfico de barras en los textos del MINEDU, en el cual mediante una actividad cotidiana, visita al mercado, el estudiante realice procedimientos matemáticos sencillos (adición, sustracción, comparaciones, etc.) y extraiga información para su cotidiano quehacer valorando el carácter informativo de un gráfico.

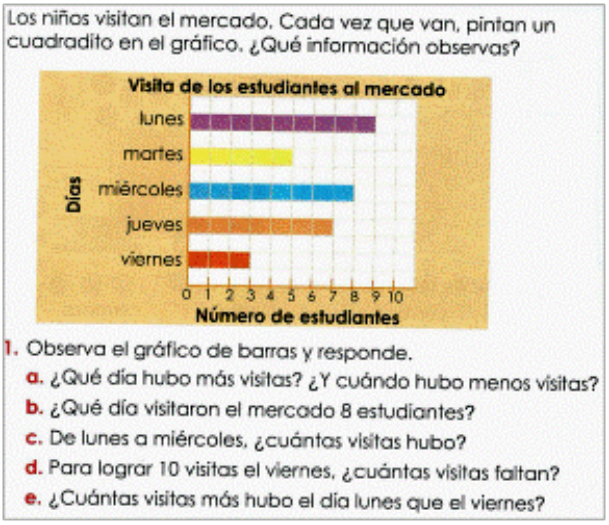


Figura 1. Gráfico de barras (TC1, p. 90)

En la Figura 2 vemos un ejemplo de una actividad en que se trabaja con dos representaciones (gráfico de barras y pictograma), en ella se sugiere el trabajo en grupos y se promueve la comparación de las ventajas y desventajas del uso de diferentes tipos de gráficos o para mostrar otra alternativa de representación de los datos que lleve a una adecuada interpretación de la información.

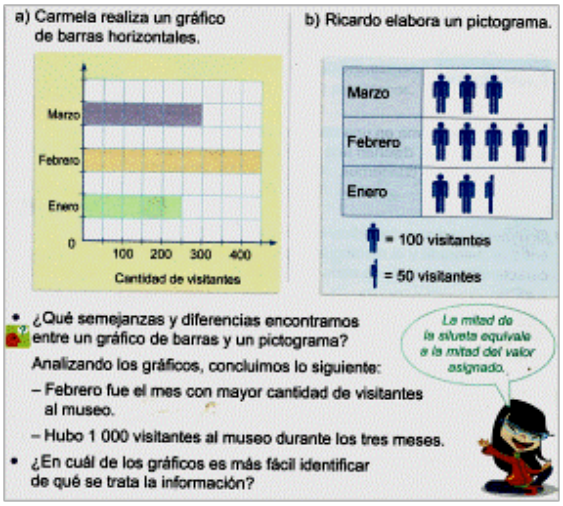


Figura 2. Gráfico de barras y pictograma (TC4, p. 124)

En la Tabla 3 mostramos los tipos de gráficos según el curso de Educación Primaria. En el primer curso solo se propone el trabajo con el gráfico de barras, y es el gráfico que más se trabaja a lo largo de la Educación Primaria, coincide con el trabajo de Díaz-Levicoy (2014) y Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín (2015) con textos españoles y chilenos, respectivamente .

Tabla 3. *Porcentaje del tipo de gráfico según curso*

Gráficos	Curso 1 (n=17)	Curso 2 (n=10)	Curso 3 (n=45)	Curso 4 (n=51)	Curso 5 (n=42)	Curso 6 (n=41)	Total (n=206)
Barras	100	50	40	45,1	28,6	51,2	46,6
Líneas			11,1	29,4	26,2	29,3	20,9
Pictograma		20	33,3	19,6			13,1
Circular		30	11,1		31	14,6	13,1
Histograma					14,3		2,9
Dos o más gráficos			4,4	5,9		4,9	3,4

En el segundo curso, además de trabajar con el gráfico de barras, se usa el pictograma y el gráfico circular, este último se anticipa a lo indicado en el currículo, donde recién se menciona en el cuarto curso. En el tercer curso se trabajan con los gráficos sugeridos en las directrices curriculares (barras y pictograma), además del gráfico circular y de líneas. En el cuarto curso se trabajan con los gráficos contemplados en las directrices curriculares: barras, líneas y pictograma. En el quinto curso se trabajan con los gráficos declarados en el currículo, además de líneas dobles se introduce el histograma, aunque está considerado para el tercer curso de Educación Secundaria de MINEDU (2009) y en el primer curso de MINEDU (2017). En el último curso, se trabaja con barras dobles, barras apiladas y el gráfico de líneas simples, dobles y triples; además del gráfico circular.

Tomando como referencia los trabajos de Díaz-Levicoy (2014) y Díaz-Levicoy et al. (2015) se han encontrado diferencias en el curso en que se introducen algunos gráficos, el de líneas se introduce en España y Perú en 3° curso y en Chile en 5° curso; el pictograma en Chile en 1° curso, en Perú en 2° curso y en España en 3° curso; el gráfico circular en Perú en 2° curso, en España en 4° curso y en Chile en 5° curso. El histograma solo es trabajado en Perú en el 5° curso.

Conclusiones

Por medio de este trabajo hemos obtenido el *significado institucional pretendido* sobre los gráficos estadísticos en los libros de texto de Educación Primaria. En el observamos que los gráficos están presentes en todos los niveles educativos, tal como lo especifican las directrices curriculares (MINEDU, 2009), incluso aquellos que no están recomendados para el curso correspondiente, como es el histograma, que permite ver al niño la distribución de los datos, e introducir el componente de variabilidad y la falta de certidumbre.

Como el tiempo, el cual cuentan los profesores dentro y fuera del aula, para el trabajo con gráficos es limitado, es importante que los libros de texto suplan la búsqueda de actividades óptimas y provean así una variedad de actividades para facilitar el proceso de instrucción, ilustrar e involucrar al niño en su contexto y promover así, la lectura crítica de los datos.

Cabe anotar que de todas las secciones en donde se incluía algún gráfico estadístico, solo el 7,8% de ellas están dirigidas a la construcción de un gráfico, por lo que es importante que los libros de texto brinden un espacio para que el niño explore más, recoja datos no solo de su entorno sino también de los medios masivos de comunicación y así aumentar su acervo cultural y estadístico. Los libros de texto priorizan el análisis de los datos más no así la recolección de los datos, por lo que, el currículo debería enfatizar la capacidad de elaboración de gráficos.

El estudio ha permitido observar que estas dos series de libros de texto realizan diferentes interpretaciones de las directrices curriculares, en especial al considerar algunos gráficos en unos cursos y en otros no. Pero, se destaca el cumplimiento de los gráficos considerados en el MINEDU (2009). Por lo que coincidimos con Díaz-Levicoy (2014), los libros de texto son de gran influencia e importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática (y Estadística), porque facilitan la transmisión de los contenidos educativos en función de la normativa curricular vigente.

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J.M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, 76, 55-67.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9-28

Díaz-Levicoy, D. (2014). *Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria Española* (Trabajo fin de Master). Universidad de Granada, Granada, España.

Díaz-Levicoy, D. y Roa, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista chilena de educación científica, 13*(1), 9-19.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C. Arteaga, P. y López-Martín M.M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa, 17*(4), 715-739.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación, 4*, 167-180.

MINEDU (2009). *Diseño Currícular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima: Dirección General de Educación Básica Regular.

MINEDU (2017). *Programa curricular de Educación Primaria*. Lima: Autor.

MINEDUC (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Anexo

TC1. Abucci, G., Suárez, N., Luna, M., Sagredo, M. y Talledo, J. (2015). *Matemática 1. Texto escolar*. Lima: Bruño.

TC2. Abucci, G., Suarez, N., Luna, M., Sagredo, M. y Talledo, J. (2016). *Matemática 2. Texto escolar*. Lima: Bruño.

TC3. Abucci, G., Suarez, N., Luna, M., Sagredo, M., Talledo, J. y Salcedo, A. (2016). *Matemática 3. Texto escolar*. Lima: Bruño.

TC4. Abucci, G., Suarez, N., Luna, M., Sagredo, M., Talledo, J. y Salcedo, A. (2016). *Matemática 4. Texto escolar*. Lima: Bruño.

TC5. Abucci, G., Suarez, N., Luna, M., Sagredo, M., Talledo, J., Salcedo, A. y Díaz, C. (2016). *Matemática 5. Texto escolar.* Lima: Bruño.

TC6. Abucci, G., Suarez, N., Luna, M., Sagredo, M., Talledo, J. y Salcedo, A. (2016). *Matemática 6. Texto escolar.* Lima: Bruño.

TC7. Paravecino, R., Marcos, M., Drouard, R., Bocanegra, N., Pardo, S. y Cruzado, I. (2012). *Matemática 1. Texto escolar.* Lima: MINEDU.

TC8. Paravecino, R., Marcos, M., Drouard, R., Sánchez, A., Bocanegra, N. y Dávila, K. (2012). *Matemática 2. Texto escolar.* Lima: MINEDU.

TC9. Mejía, C., Zubiaga, C., Mamani, E., Márquez, M. y Moy, R. (2012). *Matemática 3 Primaria. Texto escolar.* Lima: Santillana.

TC10. Mejía, C., Lafosse, R., Carrasco, R., Cuneo, P., Montoya, P. y Moy, R. (2012). *Matemática 4 Primaria. Texto escolar.* Lima: Santillana.

TC11. Huatay, R., Cuba, R., Dos Reis, I., Martel, F. y Lapa, Z. (2012). *Matemática 5. Texto escolar.* Lima: El Nocedal.

TC12. Huatay, R., Dos Reis, I., Sulca, E. y Val, E. (2012). *Matemática 6. Texto escolar.* Lima: El Nocedal.

ANÁLISIS DE LAS CREENCIAS Y CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES EN TORNO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO VEHÍCULO PARA EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UN ESTUDIO ETNOGRÁFICO

Cristhian López Leyton, Eliécer Aldana Bermúdez, Jhon Darwin Erazo Hurtado
Universidad del Quindío (Colombia)
leyton3991@gmail.com, eliecerab@uniquindio.edu.co, jderazo@uniquindio.edu.co

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo analizar las concepciones de Profesores universitarios de matemáticas, de acuerdo al enfoque que obtiene la resolución de problemas en la enseñanza de los conceptos del Cálculo diferencial e integral. En este sentido, se emplea como marco referencial a las creencias y concepciones (Moreno y Azcárate, 2003) de los profesores bajo un estudio etnográfico (Murillo y Martínez, 2010). Para esto, se hace necesario comprender cuál es el papel que juega la resolución de problemas en la transposición didáctica (Chevallard, 1991) que implica la preparación que hace el profesor de un corpus del conocimiento (que surge de la investigación) al saber enseñando (la práctica en el aula). Los resultados se obtienen mediante observación, registros de clase y apuntes de estudiantes. Lo anterior permite concluir que los profesores ven la resolución de problemas como aplicación de temas; como contenido; como metodología; y como vehículo para la comprensión de las entidades matemáticas.

Palabras clave: creencias, concepciones, resolución de problemas, etnografía

Abstract

This research aims to analyze the conceptions of mathematics university teachers according to the approach that problem solving has in the teaching of the concepts of differential and integral calculus. In this sense, the beliefs and conceptions (Moreno and Azcárate, 2003) of teachers under an ethnographic study are used as a reference framework (Murillo and Martínez, 2010). Then, it is necessary to understand the role of problem solving in the didactic transposition (Chevallard, 1991), which implies the teacher's training from knowledge corpus (arising from research) to know teaching (practice in the classroom). The results are obtained through observation, class records and student notes. The above allows us to conclude that teachers see problem solving as application of topics; as content; as methodology; and as a vehicle for the understanding of mathematical entities.

Key words: beliefs, conceptions, problem resolution, ethnography

Introducción

Los profesores en su proceso de planificación y diseño de clase, en el caso particular de la enseñanza de las matemáticas, realizan procesos de transposición didáctica (Chevallard, 1991) asociados a los conceptos fundamentales del espacio académico respectivo. Esta transposición didáctica emerge de los saberes institucionales y personales (Godino, Batanero, Rivas, y Arteaga, 2013) que cada profesor tiene asociado a una creencia o concepción de como utiliza la resolución de problemas (RP) como: contenido, aplicación después de haber terminado un tema o una unidad didáctica, o como estrategia de enseñanza y aprendizaje, y como un proceso ligado al uso sentido y significado de los objetos matemáticos del conocimiento desde posturas sociales y culturales que ponen los saberes matemáticos en la dinámica de las actividades humanas. En este sentido, la RP como estrategia para la enseñanza de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial (CD) y Calculo Integral (CI), está asociada a las creencias o intuiciones y a las concepciones o saber personal que tienen los profesores, porque están vinculadas a prácticas institucionales, personales, epistemológicas, didácticas, instruccionales y cognitivas, desligadas de contextos reales y situaciones problema, lo que hace necesario sea objeto de estudio por parte de los investigadores (Serrano, 2010).

En este sentido, investigaciones como las de Schmelkes (2001); Ávila (2004); Ezpeleta (2004); Búrquez, Domínguez y Vera (2005), afirman que existe una descontextualización de los programas educativos en torno a aspectos como las concepciones, las creencias, actitudes, posturas, hábitos y la realidad del docente, como variables que intervienen en el desarrollo de la práctica educativa al igual que la planificación de la misma. En función de ello, este escrito da cuenta de una investigación realizada en el Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío (Colombia) sobre la Resolución de Problemas en Cálculo Diferencial e Integral y propende analizar ¿Cuáles son las creencias y las concepciones que tienen los profesores sobre el papel de la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e Integral?

Marco Teórico

En función de los planteamientos anteriores en este apartado se establecen conceptos claves como las creencias, las concepciones, la relación entre estos dos constructos, la resolución de problemas, además de algunos estudios relacionados para responder a la pregunta planteada.

*Las creencias***:** están asociadas a rasgos de tipo subjetivo de las personas, en este caso particular de los profesores de matemáticas, ligadas a los sentimientos y un poco guiadas por las emociones relacionadas con aspectos propios de la personalidad; las creencias obedecen a acciones más de tipo empírico sobre percepciones del hacer del profesor sobre su práctica pedagógica. Por su parte, Pajares (1992) citado en Gil Cuadra y Rico (2003), considera que las creencias son "verdades personales indiscutibles, sustentadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tiene un fuerte componente evaluativo y afectivo.

Las concepciones: incluyen las creencias y en este caso se podría estar hablando de concepciones de tipo subjetivo, estas obedecen más a procesos mentales construidos y establecidos que pueden ser además epistemológicos porque obedecen a un conocimiento sobre el programa o la naturaleza de la enseñanza

de las matemáticas. En su estudio Flores (1998) relaciona el término "concepciones" en torno a las matemáticas de 4 tipos; la forma como se concibe el conocimiento y su relevancia personal (concepciones sobre las matemáticas), método de aprendizaje y enseñanza (concepciones sobre el estudio y preparación en matemáticas), aplicabilidad cotidiana (concepciones sobre la adaptabilidad a las situaciones en contexto), y finalmente su propia preparación para profesor (concepciones sobre la didáctica de las matemáticas).

Relación entre creencias y concepciones: Las concepciones y creencias, de acuerdo con Ponte (1994) conciben parte del conocimiento, y en este sentido, las creencias son certezas descendientes de vivencias o inventiva propia, muy a diferencia de las concepciones, siendo estas la moldura organizacional de los conceptos involucrados en procesos de cognición que intervienen al momento de realizar una actividad de cualquier naturaleza.

La resolución de problemas (RP):

El término "*resolución de problemas*" se ha convertido en un slogan que acompañó diferentes concepciones sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemática en general y resolución de problemas en particular. De acuerdo con Stanic y Kilpatrick (1989), la resolución de problemas ha adoptado diferentes significados en función del uso que se le ha dado:

- ✓ *Resolver problemas como contexto para:* enseñar matemática, crear motivación por algunos temas, recrear, desarrollar habilidades, y práctica.
- ✓ *Resolver problemas como habilidad***:** rutinarios (habilidades básicas), no rutinarios (de nivel superior), y técnicas de resolución como contenido para aplicar lo aprendido.
- ✓ *Resolver problemas es "hacer matemática***":** creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática consiste en problemas y soluciones (Pólya, 1954).

Metodología

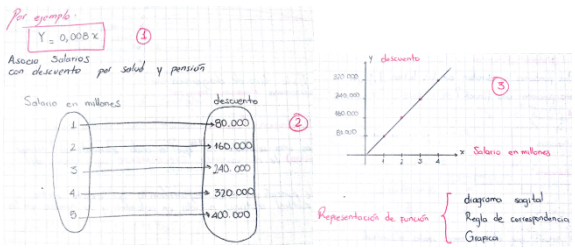
Esta investigación tiene un enfoque cualitativo, porque "está orientada a la comprensión, cuyo objetivo es describir e interpretar la realidad educativa desde dentro" (Sabariego, 2009, p. 281); y tiene que ver con la forma cómo los estudiantes comprenden/construyen los conceptos de: límite, derivada, e integral definida, mediante el planteamiento y resolución de problemas y el papel que la RP juega en la enseñanza y aprendizaje en estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas. Para ello se sustenta en un método de investigación etnográfico ya que este tipo de investigación es "el más conocido y utilizado en el campo educativo para analizar la práctica docente, describirla desde el punto de vista de las personas que en ella participan y enfatizar las cuestiones descriptivas e interpretativas" Sabariego (2009) p. 281. Para el diseño metodológico se tuvieron en cuenta las fases de la investigación etnográfica (Murillo y Martínez, 2010): Selección del diseño; determinación de las técnicas; acceso al ámbito de investigación; selección de los informantes; recogida de datos y la determinación de la duración de la estancia en el escenario; procesamiento de la información recogida; y elaboración del informe.

Las técnicas utilizadas en este estudio etnográfico fueron: La observación no participante, diario de campo y estudio de los apuntes de los docentes y estudiantes. De acuerdo con la literatura existente se consolidaron las categorías y subcategorías adaptadas de Cortés y Sanabria (2012): *Posturas sobre las matemáticas; Posturas sobre la práctica educativa; Posturas sobre el planteamiento y la resolución de problemas*

Resultados y discusión

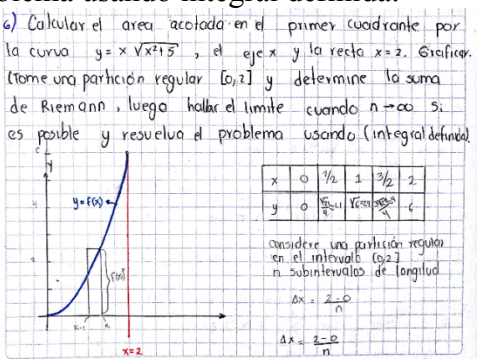
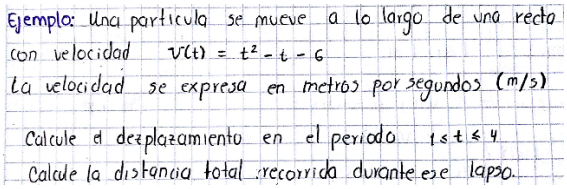
En este apartado se presenta en función de los episodios de dos profesores en las clases de cálculo diferencial e integral durante el primer semestre de 2017. La información obtenida se obtuvo a partir de registro en un diario de campo configurado por las notas de clase de los profesores y los apuntes de los estudiantes. En este sentido, los episodios son presentados y discutidos mediante la triangulación de la información obtenida de estos instrumentos mencionados como se presenta a continuación:

***Tabla 1*:** Observación de clase (Profesor 1: Cálculo Diferencial)

Descripción (situación)	Argumento (visión del etnógrafo)
El docente de CD plantea que son de interés funciones que relacionan números reales establecidos mediante una Regla de correspondencia llamada ecuación, así como a una gráfica en el plano cartesiano. A continuación el profesor plantea un ejemplo: La ecuación $y = 0{,}008x$ asocia salarios con descuento por salud y pensión  **Figura 1:** Apuntes de los estudiantes	El docente plantea una situación que tiene que ver desde lo cotidiano pero articulado en el contexto matemático, que asocia una función lineal con salarios y descuentos de salud y pensión propios de los trabajadores Colombianos. De esta manera el profesor liga situaciones reales para poder ejemplificar las definiciones. Con este ejemplo del docente logra mostrar a sus estudiantes las tres formas de representación de una función (Regla de correspondencia, Diagrama sagital, y Grafica cartesiana). Finalmente el profesor expone a sus estudiantes la definición formal de función real y notaciones funcionales.

Fuente: López y Aldana (2017)

***Tabla 2*:** Observación de clase (Profesor 2: Cálculo Integral)

Descripción (situación)	Argumento (visión del etnógrafo)
Después de realizar algunos ejercicios de evaluación de integrales, el docente de CI plantea un ejemplo de área bajo la curva, para lo cual solicita a sus estudiantes determinar la suma de Riemman con una partición regular y luego resolver el problema usando integral definida:  a) Calcular el área acotada en el primer cuadrante por la curva $y = x\sqrt{x^2+5}$, el eje x y la recta $x=2$. Graficar. (Tome una partición regular $[0,2]$ y determine la suma de Riemann, luego hallar el límite cuando $n \to \infty$ si es posible y resuelva el problema usando (integral definida) $y=f(x)$ $x=2$ Considere una partición regular en el intervalo $[0,2]$ n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{2-0}{n}$ $\Delta x = \frac{2-0}{n}$ **Figura 2:** Preparador del docente A continuación el docente presenta a sus estudiantes una "aplicación" de la integral definida "desplazamiento o cambio de posición de una partícula" y realiza un ejemplo:  Ejemplo: Una partícula se mueve a lo largo de una recta con velocidad $v(t) = t^2 - t - 6$ La velocidad se expresa en metros por segundos (m/s) Calcule el desplazamiento en el periodo $1 \le t \le 4$ Calcule la distancia total recorrida durante ese lapso. **Figura 3:** Preparador del docente	El docente mediante este ejemplo ilustra el paralelo que existe entre resolver el problema de área bajo la curva mediante sumas de Riemann y el uso del último teorema visto (teorema fundamental del cálculo); mediante la aproximación de la suma de Riemann los estudiantes evidencian a nivel algorítmico que el proceso para resolver el problema se hace con una suma finita de particiones (que representan áreas) y que al tomar el limite cuando la parición tiende a cero puedo hallar el área exacta. Posteriormente el profesor plantea el problema por el método de integración definida y enfatiza que es fundamental que se vea el proceso mediante el cual el límite de una suma de Riemann representa una integral definida. El profesor después de exponer problemas de área bajo la curva que ilustran la utilización de integrales definidas, afirma que se estudiaran aplicaciones que requieren del uso de integrales, estas dan desde diferentes situaciones un contexto de lo que significa resolver una integral. El docente parte de un ejemplo del contexto físico para relacionar el objeto matemático con su aplicación desde otra disciplina, este ejemplo es resuelto en clase.

Fuente: López y Aldana (2017)

En función de las sesiones abordadas, los referentes teóricos de apartados anteriores y las temáticas evidenciadas, es posible situar el desarrollo de las clases a la luz de la bibliografía encontrada. A partir de ello se constata, que el profesor 1 (CD) concibe la resolución de problemas desde su praxis educativa como contexto para enseñar matemáticas, es decir, mediante el uso de situaciones reales y pragmáticas ejemplifica e ilustra la formalidad de las definiciones (Stanic y Kilpatrick, 1989). En este sentido, la enseñanza de las matemáticas se determinó por el fundamento teórico y conceptual, el acondicionamiento

de reglas y procedimientos, la práctica de ejercicios en los cuales se ilustran teoremas, definiciones, el uso de palabras clave para describir algunos procesos, la búsqueda de habilidades para el desarrollo de ejercicios que aumentan en su complejidad, y finalmente el uso de este aprendizaje conceptual es utilizado como una aplicación después de haber concluido la enseñanza de un objeto matemático del conocimiento (Bedoya y Ospina, 2014; Benites, 2013; Salinas y Sgreccia, 2017).

Para el caso del profesor 2 se concibe la resolución de problemas como habilidad (Stanic y Kilpatrick, 1989), es decir, después de un estudio conceptual a profundidad en el cual se desarrollan definiciones, teoremas y demostraciones, el docente plantea ejercicios de práctica y problemas de habilidades básicas que posteriormente se reflejan en una "aplicación", lo anterior de acuerdo con Barrantes (2008); Bedoya y Ospina (2014) evidencia que la postura que toma el docente en el desarrollo de sus clases consiste en resolver problemas a partir de un aprendizaje conceptual. El desarrollo de algunos problemas planteados evidencia la intervención del modelo de Pólya (1954) aplicado de una forma intuitiva, en la cual el docente realiza un análisis del enunciado del problema con todos los participantes en el aula, propone un método de solución (concibe un plan) el cual es ejecutado paso a paso para ilustrar métodos de solución a diferentes situaciones y al finalizar se cuestiona la coherencia y veracidad de los resultados obtenidos.

Conclusiones

Las concepciones de los profesores universitarios sobre las matemáticas, las prácticas educativas y la misma resolución de problemas, están ligadas a su formación y experiencia profesional, más que a un proceso consciente de la necesidad de cambiar las formas de considerar las trayectorias que sigue un aprendiz a la hora de acercarse a un objeto matemático del conocimiento; no obstante, las evidencias obtenidas a partir del estudio etnográfico permiten inferir que el docente universitario concibe la matemática como una articulación entre el aprendizaje, el saber y la enseñanza; triada en la cual asume otra concepción sobre la RP como agente de motivación para el aprendizaje.
En cuanto a las Concepciones que tienen los Profesores del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío sobre la Resolución de Problemas en Cálculo Diferencial e Integral, desde un estudio etnográfico, permiten además concluir: la RP viene después de la conceptualización del objeto matemático, tiene existencia cuando hay un contexto, existe si hay una aplicación a la matemática o a otras ciencias, en la licenciatura en particular no puede ser el eje vertebral del aprendizaje, en cuanto prevalece la estructura matemática.

Así mismo, no existe un modelo puro para la enseñanza de la matemática desde la RP; tampoco tiene cabida cuando se trata de una matemática teórica, en algunos casos está asociada con un enfoque intuitivo, de motivación y para garantizar el aprendizaje, a través del refuerzo de los temas vistos en clase de los temas vistos en clase y por último, los profesores consideran que los estudiantes deben formar unas bases sólidas en matemáticas formales, para después profundizar en algún campo especifico, pero la RP es una situación posterior al aprendizaje conceptual; y el modelo de RP con el que más se identifican los dos profesores del estudio etnográfico es el de Pólya.

Referencias bibliográficas

Ávila-Storer, A. (2004). Reseña de conocimientos y aptitudes para la vida. Resultados de pisa 2000. Educación Matemática, 16 (1), 225-227.

Barrantes Campos, H. (2008). *¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense*. CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA 2008, pp. 83-98. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6902/6588

Bedoya, M. M. y Ospina, S. A. (2014). *Concepciones que poseen los profesores de matemática sobre la resolución de problemas y cómo afectan los métodos de enseñanza aprendizaje.* Tesis de maestría. Universidad de Medellín, Medellín – Antioquia, Colombia. Recuperado de http://repository.udem.edu.co/bitstream/handle/11407/300/Concepciones%20que%20poseen%20los%20profesores%20de%20matem%C3%A1tica%20sobre%20la%20resoluci%C3%B3n%20de%20problemas%20y%20c%C3%B3mo%20afectan%20los%20m%C3%A9todos%20de%20ense%C3%B1anza%20y%20aprendizaje.pdf?sequence=1

Benítez Chará, W. (2013). Concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje de docentes en formación. Revista Científica, pp.176 - 180. Recuperado de http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/6009

Chevallard, Y. *(*1991*). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. *Buenos Aires: Aique.*

Cortés, J, y Sanabria, F. (2012) *Concepciones y Creencias de Profesores de Matemáticas sobre Resolución de Problemas: un estudio de casos.* Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Ezpeleta, J. (2004). Innovaciones educativas. Reflexiones sobre los contextos para su implementación. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 9(21), 403-424.

Flores, P. (1998). Libro *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.* Universidad de Granada, departamento de didáctica de la matemática, España. (pp. 30).

Gil Cuadra, F y Rico Romero L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, 21 (1), 27-47.

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H., y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. Madrid.

López, C. y Aldana, E. (2017). Análisis de las creencias y concepciones de los profesores en torno a la resolución de problemas como vehículo para el aprendizaje del cálculo diferencial e integral: un estudio etnográfico. *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa "RELME 31"*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa "CLAME". Lima, Perú.

Moreno, M. y Azcárate Giménez, C. (2003). *Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las educaciones diferenciales*. Enseñanza de las Ciencias, 21 (2), 265-280.

Murillo, J y Martínez, C (2010). *Investigación etnográfica, métodos de investigación educativa*. pp 9.

Ponte J. P. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini (ed.), *Theory and practice in mathematics education.*

Pólya, G. (1954). How to solve it, Princeton:Princeton University Press.

Sabariego, M. (2009). La Investigación Educativa: Génesis, Evolución y Características. En R. Bisquerra (Coord.). Metodología de la Investigación Educativa. 2ª edición, pp. 50-87. Madrid: La Muralla.

Schmelkes, S. (2001). Cambiar la escuela rural. Evaluación cualitativa del Programa para Abatir el Rezago Educativo, PARE. Revista Mexicana de investigación Educativa, 6(11), 173-179.

Salinas, N. y Sgreccia, N. (2017). *Concepciones docentes acerca de la Resolución de Problemas en la escuela secundaria.* Revista números ISSN: 1887-1984. Volumen 94, marzo de 2017, paginas 23-45. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/94/Articulos_02.pdf

Serrano, R. C. (2010). Pensamientos del profesor: un acercamiento a las creencias y concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la Educación Superior. *Revista de Educación, 352*, 267-287.

Stanic, G. y Kilpatrick, J. (1989), Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles&Silver (Eds.) The teaching and assesing of mathematical problem solving, pp.1-22 Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ESTUDIO SOBRE LA IDENTIDAD PROFESIONAL DEL DOCENTE EN FORMACIÓN DE LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS: EL CASO DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE CHIAPAS

Mauricio Torres Gordillo, Alma Rosa Pérez Trujillo
Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
mauriciotorres85@hotmail.com, almarpt@hotmail.com

Resumen

La investigación "Estudio sobre la identidad profesional del docente en formación de la especialidad de matemáticas" se realiza con estudiantes de la Escuela Normal Superior de Chiapas (ENSCH), centro especializado en la formación de docentes de escuelas secundarias en esta entidad. Se plantea que es en la formación inicial en donde el futuro profesionista consolida una identidad profesional base que incidirá en la manera en que se asume como docente, así como en las decisiones que tome para su inserción al ámbito laboral y su desarrollo profesional posterior. Estudiar la identidad de estos futuros profesores nos permitirá conocer elementos como la trayectoria, las expectativas y motivaciones que tienen quienes aspiran a cubrir una vacante en el magisterio nacional.

Palabras clave: desarrollo profesional, investigación biográfico-narrativa

Abstract

The investigation "Study on the professional identity of prospective mathematics teachers" is carried out with students from the "Escuela Normal Superior" of Chiapas (ENSCH), an institution specialized in the training of mathematics high school teachers in Chiapas, México. It is stated that during this period of training, the prospective teacher consolidates a basic professional identity that will influence the way the teacher recognizes himself when becoming a teacher, and the decisions that he should make for his insertion to the working environment and his further professional development. To study the identity of these prospective teachers will allow us to recognize some aspects like trajectory, expectations, and motivations of people who aim to work as teachers.

Key words: professional development, narrative investigation

Introducción

El objeto de estudio de esta investigación es analizar cómo se construye la identidad del profesor de matemáticas en el proceso formativo que tiene lugar en la Escuela Normal Superior de Chiapas. Esta institución de educación superior ha resultado de especial interés para los efectos de esta investigación, toda vez que es la única escuela pública en el estado cuyos servicios se orientan a la formación de profesores de educación secundaria, en las diferentes asignaturas que se imparten en este nivel educativo. El título profesional que ofrece esta institución es el de licenciado en educación secundaria, en una de las siguientes especialidades: español, matemáticas, física, química, formación cívica y telesecundaria. Los

aspirantes a ingresar a esta escuela normal deben cumplir con ciertos requisitos académicos, entre los que se cuentan (ENSCH, 2015):

- Comprobar un promedio mínimo de 8.0
- Acreditar el área de formación en el bachillerato de acuerdo con la especialidad que quieran cursar (área: físico-matemático para la especialidad de matemáticas).
- Tener un rango de edad que va de los 18 a los 22 años.
- Aprobar el examen de selección elaborado por la Dirección General de Evaluación de Políticas de la Secretaría de Educación Pública (DEGESPE) en coordinación con el Instituto Estatal de Evaluación e Innovación Educativa.

Es posible ver, por tanto, que quienes se interesan por hacer estudios profesionales en la especialidad de matemáticas en la Escuela Normal Superior de Chiapas, hacen explícita una intencionalidad clara hacia el deseo de ser profesores de matemáticas. Intención que puede estar influenciada por antecedentes familiares y/o académicos que motivaron esta decisión.

Esta investigación busca hacer una revisión a estos antecedentes, pero además se propone poner el énfasis en las experiencias vividas por el futuro docente de matemáticas a lo largo de su proceso de formación inicial, considerando que en este proceso converge una formación pedagógica y disciplinar fundamentada en un plan de estudios de cobertura nacional (SEP, 1999) que, asimismo, otorga relevancia tanto a la formación teórica como práctica de los estudiantes.

En esta investigación se asume que la identidad está en constante búsqueda y reconfiguración, pero se considera también que es en la fase de formación profesional donde pueden darse los espacios para reflexionar sobre la acción (práctica docente) y desde donde puede (re) configurarse la identidad que habrá de modelar el desempeño posterior del docente en formación.

Teniendo presentes estas consideraciones, se plantean las siguientes interrogantes: ¿Cómo se construye la identidad profesional del docente de matemáticas durante su formación inicial? ¿Qué incidencias tiene el contexto escolar y/o familiar en esta construcción de la identidad? ¿Cuál es la percepción que el docente de matemáticas tiene sobre la construcción de su identidad profesional en su trayecto formativo? ¿Cómo se desarrolla la identidad profesional del docente de matemáticas desde el acercamiento a la práctica profesional en el marco de la formación inicial?

Desarrollo del tema

¿Por qué hablar de identidad en una profesión como la docencia? Según Nias (1989; citada por Bolívar, 2006) cuando se ejerce el magisterio difícilmente se puede deslindar lo que uno es del trabajo que se desempeña. Según lo señala Bolívar (2006), incluso lo disciplinar se constituye como un elemento propio de la identidad que puede servir para distinguir a unos profesores de otros.

Bolívar (2006) agrega que la construcción de la identidad profesional es parte de un proceso que toma como punto de partida lo familiar y lo social, teniendo una influencia significativa la historia escolar vivida a lo largo de la educación básica, la cual a su vez, puede incidir en el actuar profesional futuro. Al respecto,

señala Tardif (2004, citado por Bolívar, 2006) "los saberes experienciales del docente profesional se derivan en gran parte de preconcepciones de la enseñanza y del aprendizaje heredadas de la historia escolar" (p.54).

La formación inicial es reconocida como el espacio propicio para configurar la identidad profesional en la medida que permita a los profesores en formación apropiarse de elementos teóricos, modelos pedagógicos y tener un primer acercamiento a la práctica profesional. Adicionalmente, la formación inicial es un medio a partir del cual es posible hacer una proyección hacia el futuro, al mismo tiempo que desarrollar una perspectiva del entorno social en el que se interactuará y de la manera en que el docente podrá posicionarse en el mismo (Bolívar, 2006).

Esteve (2003) refuerza este argumento al señalar que a lo largo de la carrera profesional, deben estar presentes las interrogantes: ¿Para qué estudio? ¿qué quiero hacer con mis estudios? y ¿quién voy a ser mediante los estudios que obtenga? En consecuencia, es preciso que la identidad profesional sea un elemento más a considerar y trabajar desde el plan de estudios de la formación inicial.

De acuerdo con Bullough (1997, citado por Beijaard, Meijer y Verloop, 2004) la identidad profesional, entendida como aquello que guía las creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza debe ser un elemento relevante en la formación docente, dado que será la base desde la cual se dará sentido a la vida profesional y a la toma de decisiones. Bullough señala incluso que la formación docente debe comenzar explorando el rol y las implicaciones de ser docente. Beijaard, Verloop y Vermunt (2000), a su vez, describen la identidad profesional en relación con la formación disciplinar, pedagógica y didáctica que recibe el docente.

La formación disciplinar, particularmente, se ha considerado un componente importante del saber profesional docente a tal grado que ha predominado la creencia de que el conocimiento sobre la disciplina y cierto entrenamiento dado sobre el transcurso del trabajo es suficiente para ser un buen docente. En la actualidad; sin embargo, se reconoce que esta visión no da cuenta cabalmente de la complejidad de enseñar (Beijaard y otros, 2000). Inclusive, se habla de otras formas de concebir al docente, como un gestor o facilitador, asumiendo con ello que la enseñanza va más allá de la transmisión de conocimientos.

Esta situación conduce a revalorar la importancia de la formación pedagógica de los docentes en el entendido de que el ejercicio de su profesión no se reduce a un plano técnico o instrumental, sino que está estrechamente relacionado con la interacción e involucramiento con los estudiantes. De esta relación resultarán elementos que tendrán repercusiones en el rol personal y profesional que asuma el docente (Beijaard y otros, 2000).

Tendrá relevancia también la formación en didáctica que posea el docente dado que ésta puede influir en cómo el mismo planea, ejecuta y evalúa las lecciones que desarrollará en clase. Según Beijaard y otros (2000) el conocimiento en didáctica incidirá además en la forma en que el profesor conciba y asuma la enseñanza como profesión. Por ello, es conveniente prestar atención a que esta formación se centre en los hallazgos y progresos de la investigación, alejándose del modelo de transmisión de conocimientos y poniendo mayor énfasis en los cambios que el docente pueda hacer desde su propio rol e identidad.

Bajo esta premisa en que la identidad profesional puede ser vista a través de la formación que recibe el docente, parece pertinente dirigir la mirada hacia las instituciones de educación superior que en la actualidad continúan realizando esta labor: las escuelas normales. Este interés no es fortuito, sino que cobra mayor relevancia ahora que las políticas educativas nacionales parecen poner a debate nuevamente la idea de que para ser docente basta con poseer un conocimiento disciplinar.

Para abonar a este debate, se ha puesto la atención en la comunidad académica de la especialidad de matemáticas de la Escuela Normal Superior de Chiapas, atendiendo no sólo al hecho de que están formándose como docentes, sino que además lo están haciendo a través de un plan de estudios diseñado e implementado con dicha finalidad a nivel nacional. Dicho plan contempla cinco campos o competencias que definen el perfil de egreso del licenciado en educación secundaria (SEP, 1999):

1) Habilidades intelectuales específicas
2) Dominio de los propósitos y contenidos de la educación secundaria
3) Competencias didácticas
4) Identidad profesional y ética
5) Capacidad de percepción y respuesta a las condiciones sociales del entorno de la escuela

De los campos señalados, hay tres en particular que permiten vislumbrar cómo el plan de estudios contribuye a la construcción de la identidad profesional docente desde la formación disciplinar, pedagógica y didáctica (Beijaard y otros, 2000). De esta manera, el primer campo en el que se ha puesto la atención es el de "dominio de los propósito y contenidos de la educación secundaria" entre cuyas aspiraciones está que el docente en formación adquiera dominio en el campo disciplinario de su especialidad y pueda manejar con fluidez los temas del programa de estudios del área en que se ha formado.

El segundo campo se denomina "competencias didácticas", uno de los objetivos que pretende alcanzar es que el docente en formación aprenda a diseñar y aplicar estrategias didácticas que estén acordes con las necesidades y desarrollo de los adolescentes. Otro de los objetivos se orienta al conocimiento y puesta en práctica de distintas formas de evaluar la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes. El tercer campo del perfil de egreso que es de nuestro interés se denomina "identidad profesional y ética" y como uno de sus propósitos más representativos está que el docente en formación asuma su profesión como una carrera de vida y emplee los recursos que tenga al alcance para mejorar su capacidad profesional.

Estos tres campos que hemos detallado, así como dos adicionales (habilidades intelectuales específicas y capacidad de percepción y respuesta a las condiciones sociales del entorno de la escuela) constituyen el perfil de egreso del licenciado en educación secundaria, pero son también un indicador para "valorar el avance del plan y los programas, la eficacia del proceso de enseñanza y de los materiales de estudio" (SEP, 1999).

Metodología

Con la finalidad de conocer cómo los docentes en formación van construyendo una identidad propia a partir de sus experiencias a lo largo de su formación básica como durante su formación inicial, se ha

optado por llevar a cabo una investigación narrativa, entendiendo que ésta nos permitirá conocer la trayectoria personal y escolar de los docentes en formación y además identificar cómo dicho recorrido ha permeado en la construcción de la identidad.

El universo de análisis que se ha tomando como punto de partida para esta investigación son los docentes en formación que cursan el séptimo semestre de la especialidad de matemáticas de la ENSCH. Este grupo ha resultado de interés dado que durante séptimo y octavo semestre se llevan a cabo prácticas profesionales en condiciones reales de trabajo de manera intensiva, mismas que permiten a los normalistas experimentar el ejercicio docente con mayor libertad, pero también con mayor compromiso, bajo la asesoría de un profesor de la ENSCH y de un profesor que funge como titular de los grupos donde el normalista lleva a cabo sus prácticas docentes.

Como primer acercamiento hacia el grupo elegido se ha aplicado un cuestionario con fines exploratorios sobre temas tales como: historial y desempeño académico en la asignatura de matemáticas, presencia de la profesión docente en la familia, elección de la carrera profesional y valoración de otras alternativas profesionales de formación. Según Reséndiz (2001) la aplicación y análisis de un instrumento tal como un cuestionario puede contribuir a definir los parámetros más representativos de la población de interés y establecer criterios de selección de los informantes a partir de ciertas variables. En la medida en que estos criterios puedan tematizarse será posible tener un mejor control sobre el proceso de investigación.

Este tematizar está centrado en la construcción de la identidad profesional del docente en formación de la especialidad de matemáticas, dado que se considera que los egresados de bachillerato que se han interesado e identificado con el desempeño de la profesión docente en el área de las matemáticas han decidido ingresar a la ENSCH no sólo por la formación que esta institución ofrece, sino además por el campo laboral al que permite acceder. En este sentido, además de destacar lo típico de cada docente en formación, será importante considerar la posición en que estos futuros docentes se encuentran. Para Reséndiz (2001, p. 135) ésto se traduce en "señalar el punto de vista desde el cual el sujeto habla sobre sí mismo, sobre su sociedad, comunidad o grupo".

Si bien se ha precisado que una investigación narrativa no busca la generalización, es conveniente señalar que la comunidad académica de la ENSCH tiene una formación profesional y un destino laboral equivalente a las comunidades de otras normales que se localizan en México, dado que todas estas escuelas se rigen por un mismo plan de estudios y, una vez que los docentes en formación egresan de la licenciatura, aspiran a cubrir una vacante en el magisterio nacional, participando en la convocatoria emitida para tal efecto por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).

A la par del cuestionario con las características descritas, se ha solicitado a los docentes en formación la redacción de un relato que atienda a la interrogante: ¿Cómo tu relación con el estudio de las matemáticas ha influido en tu decisión de formarte como docente de matemáticas? La respuesta a esta pregunta nos ha permitido tener un acercamiento a las identidades de los docentes en formación, entendidas como historias personales en donde narran la relación que han tenido con las matemáticas (Sfard y Prusak, 2005).

Cabe mencionar que no todos los futuros docentes se narran detalladamente y con la profundidad necesaria para identificar experiencias que denoten cómo surgió el interés y/o la intención de formarse como profesores. Por ello, hemos elegido aquellos relatos que nos proporcionan información más precisa acerca

de la predilección que los docentes en formación han tenido con respecto a la asignatura de matemáticas, el rol que en algún momento han jugado como "facilitadores" de esta disciplina a lo largo de su educación básica, algunas de sus experiencias como estudiantes y los elementos que incidieron en el anhelo de formarse en la docencia y ejercerla.

Esta información no sólo ha servido como foco de atención para la selección de determinados colaboradores a partir de la redacción de sus relatos, sino que también nos ha permitido obtener algunas categorías de estudio que se yuxtaponen con ciertos tópicos utilizados por Kelchtermans (1999) para estudiar el "ser docente" de profesores en servicio, a saber: autoestima, autoimagen, motivación, percepción de la tarea, y perspectivas futuras. Evidentemente, la investigación hecha por Kelchtermans (1999) ha tenido como referente a otro sector social, pero en esta investigación consideramos que los tópicos anteriormente descritos se encuentran presentes incluso antes de que los docentes ingresen a servicio; es decir, son elementos que se encuentran ya en proceso de desarrollo en quienes se están formando como profesores.

De tal suerte, una vez que hemos seleccionado seis relatos de un total de 30, en función de cómo cada estudiante de la licenciatura en educación secundaria se ha aproximado a las matemáticas, primero como estudiante y, posteriormente como docente en formación, hemos procedido a establecer algunas otras categorías de estudio, a partir de lo hallado en las propias narrativas de los normalistas: a) facilidad para las matemáticas, b) gusto por la asignatura, c) incursión en el rol de enseñanza de las matemáticas, d) apoyo escolar a otros compañeros y e) proyección personal hacia la docencia.

Conclusiones

En este avance de investigación hemos buscado contribuir a la literatura que en la actualidad pone en el centro de atención a la construcción de la identidad docente. Para ello, hemos trabajado con la comunidad de la especialidad de matemáticas de la ENSCH, considerando que en ella se encuentran elementos y características que no se reúnen en otras instituciones de educación superior.

El acercamiento que hemos tenido con esta comunidad, particularmente, con docentes en formación de séptimo semestre, nos ha permitido obtener un panorama general de cómo se ha conformado este grupo desde su ingreso a la ENSCH, así como conocer aquellas experiencias escolares y/o familiares que han contribuido desde temprana edad a que los estudiantes desarrollen cierta predilección por las matemáticas y puedan verse a sí mismos ante la posibilidad de formar a otros en esta disciplina.

De esta manera, a partir de las primeras narraciones obtenidas, hemos procurado que el docente en formación ponga en evidencia cómo va construyendo su identidad a través de un relato (Sfard y Prusak, 2005) y que dé cuenta de cómo se ha ido involucrando con las matemáticas y con la profesión docente a partir de sus experiencias previas. Aún quedan preguntas por responder de aquellas que hemos propuesto como ejes rectores de esta investigación. No obstante, consideramos ir en la ruta adecuada, toda vez que hemos dado prioridad a que los propios estudiantes puedan exponer a través de un relato escrito cómo se han relacionado con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Lo consecuente, en la ruta metodológica que hemos trazado, es conocer cómo se van relacionando y reconociendo estos estudiantes con su grupo de referencia y cómo en este proceso de "verse a sí mismos y verse a través del otro" van construyendo su identidad profesional. Finalmente, es de nuestro interés dilucidar cómo abona a esta construcción de la identidad, el acercamiento y la relación que se va teniendo con la práctica docente a lo largo de la carrera profesional.

Referencias bibliográficas

Beijaard, D., Meijen, P. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers´professional identity. *Teaching and teacher education.* 20, 107-128.

Beijaard, D., Verloop, N. y Vermunt, J. D. (2000). Teachers´ perceptions fo professional identity: an exploratory study from a personal knowledge perspective. Teaching and teacher education. Teaching and teacher education. 16, 749-764.

Bolívar, A. (2006). *La identidad profesional del profesorado de secundaria. Crisis y reconstrucción*. Ediciones Aljibe: España.

ENSCH (2015). Convocatoria para realizar estudios de educación superior, ciclo escolar 2015-2016 de la licenciatura en educación secundaria. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/0B8KJiL_slbCbR0Q4UFlOSWZCNms/view

Esteve, J. M. (2003). *Hacia un nuevo modelo de profesor universitario*. Ponencia presentada en el Ciclo de Conferencias sobre Modelos y Metodologías de Formación Superior en Europa. Universidad Politécnica de Valencia.

Kelchtermans, G. (1999). Teacher education for teacher development: Reflective learning from biography and context. Keynote lectura al TD TR4 *Teachers develop research: Fourth conference on reflective learning*, 2-4 september 1999. Leuven, Belgium.

Pujadas, J. José. (2002). *El método biográfico: el uso de las historias de vida en ciencias sociales* (Serie Cuadernos metodológicos 5). Madrid: CIS.

Reséndiz, R. R. (2008). Biografía: proceso y nudos teóricos-metodológicos. En M.L. Tarrés (Ed.), *Observar, escuchar y comprender. Sobre la tradición cualitativa en la investigación social* (pp. 135-170). México, D.F: FLACSO.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational researcher*, *34*(4), 14-22.

SEP (1999). *Plan de estudios 1999. Licenciatura en educación secundaria. Documentos básicos*. México: SEP.

PRÁCTICAS COLABORATIVAS DE INVESTIGACIÓN EN FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Alfonso Jiménez Espinosa
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Colombia)
alfonso.jimenez@uptc.edu.co

Resumen

Este artículo presenta resultados parciales de una investigación en la línea de formación de profesores de matemáticas y tiene como objetivo identificar aprendizajes sobre prácticas de investigación, generadas en un grupo de trabajo colaborativo que se constituye en una comunidad de prácticas. La base conceptual es la teoría social del aprendizaje, la cual fundamenta la naturaleza situada de los aprendizajes, con relevancia de la condición histórica y social. La investigación sigue un enfoque cualitativo, con perspectiva etnográfica. Las fuentes de datos empíricos son entrevistas no estructuradas, cuestionarios de pregunta abierta, diario de campo y grabaciones de audio. Se percibe la riqueza que genera este espacio para el diálogo entre estudiantes en formación inicial, formación continua, y formadores; pero también la generación de otro espacio para que el profesor y el formador aprendan.

Palabras clave: Formación, profesores, matemáticas, investigación, colaboración

Abstract

This paper shows the partial results of a research on mathematics teacher's training. It aims to identify the learning about research practices, generated in a collaborative working group that is formed in a community of practices. The conceptual basis is the social theory of learning which bases on the situated nature of learning, highlighting the historical and social condition. The research follows a qualitative approach, with an ethnographic perspective. The sources of empirical data are unstructured interviews, open-ended questionnaires, field diaries and audio recordings. The enrichment generated by this space is perceived in the dialogue between students in initial formation, continuing education, and educators; but it also provides another space for the teacher and the trainer to learn.

Key words: Training, teachers, mathematics, research, collaboration

Introducción

El objetivo de esta investigación fue contribuir a problematizar cuestionamientos expuestos recientemente en el ámbito internacional en el campo de la investigación del aprendizaje del profesor de matemática. Para Krainer (2008, p. 10),

> (…) es un reto encontrar respuestas a las preguntas de dónde, en qué condiciones, cómo y por qué los profesores de matemáticas aprenden, así como también determinar la importancia del carácter específico del dominio de las matemáticas. Es importante tener en cuenta que el

> aprendizaje de los maestros es un proceso complejo y es en gran medida influenciado por factores personales, sociales, organizacionales, culturales y políticos.

En este sentido una teoría del aprendizaje de los profesores es indispensable para la investigación en formación de profesores de matemáticas (Riscanevo & Jiménez, 2017). Llinares (2007) destaca este cuestionamiento y acentúa la necesidad de investigar el aprendizaje del profesor de matemáticas y centrar la formación desde resultados de investigación. Blanco (2004) señala que los programas de formación de profesores deben fundamentarse en teorías explícitas del aprendizaje del profesor; buscar aproximaciones que preparen a los estudiantes para profesor a aprender desde la práctica de enseñar matemáticas; buscar una coordinación efectiva entre formación inicial y formación continua (Jiménez, 2002) y ofrecer oportunidades de aprendizaje, en las que los estudiantes para profesor puedan dotar de significado la tarea de ser profesor y usar los medios que les permitan desarrollar ese conocimiento.

Sobre las oportunidades de aprendizaje de los profesores, se destaca la vinculación a comunidades, grupos o redes. Lerman (2006) afirma que en la investigación que busca oportunidades de aprendizaje de los profesores, hay pocos ejemplos, en comparación con el resto de investigación sobre la formación del profesor de matemáticas. El desarrollo de comunidades y la creación de redes representan factores primordiales que fomentan posibilidades de formación permanente de los profesores. Para los profesores, participar en grupos de estudio y redes, como posibilidad de formación continua, la hace parte de su trabajo, y la vinculación con académicos como expertos, a menudo en los aspectos de la actividad investigativa y acceso a la literatura, lleva a que los profesores de matemática (re)signifiquen sus prácticas (Jiménez, 2002).

En este campo se ve la importancia de problematizar el aprendizaje del profesor en nuestros contextos formativos, pues lo que se entiende por aprendizaje varía desde concepciones de sentido común, pasando por formas institucionalmente adoptadas, hasta conceptualizaciones científicas derivadas de algún campo de estudio; así Tinjala (2001) identifica concepciones de aprendizaje asociadas a incrementar el conocimiento, como memorización y reproducción, como aplicación, como comprensión, como ver algo de forma diferente, y como cambiar en cuanto persona; y enfatiza que,

> (…) en las tres primeras concepciones el aprendizaje es visto como adquisición de algo "ya hecho" que existe "ahí afuera" esperando ser recogido y almacenado en la memoria de alguien. (…) aprender es llegar a ser capaz de reproducir conocimiento que otra persona ha creado. En contraste, las tres siguientes concepciones ven el aprendizaje más como transformación que como reproducción. Lo que marca la diferencia es el significado. Mientras éste está ausente en las tres primeras concepciones, tiene un papel central en las últimas tres. Comprender es obtener significado; ver algo en una forma diferente es transformar o cambiar significados; y cambiar como persona es desarrollar estructuras de significado completamente nuevas para toda la vida (p. 2).

Estas formas de ver el aprendizaje dejan ver que algunas prácticas educativas lo asumen como la recepción y almacenamiento de conocimiento, en oposición a otras que lo asumen como un proceso dinámico, donde los individuos construyen activamente conocimiento en grupos o comunidades sociales. Esta investigación estuvo interesada en procesos sociales de aprendizaje, donde el diálogo y la colaboración son centrales y donde se pone gran énfasis en el lenguaje y la interacción. Así, esta investigación responde a la pregunta ¿Qué aprenden quienes participan en prácticas colaborativas de investigación, en la

formación de profesores de matemáticas? Este texto, además de discutir la problemática mencionada, presenta algunos referentes teóricos que permiten una mayor comprensión de la misma, se discuten los aspectos metodológicos de la investigación y se presentan algunos resultados.

Referentes teóricos

Las investigaciones en formación de profesores de matemáticas, desde la perspectiva sociocultural (Lave & Wenger, 1991) y su desarrollo en la teoría de la práctica social (Wenger, 2001), ofrecen un marco analítico amplio sobre el que se ha focalizado en los últimos años la investigación en el área (Riscanevo & Jiménez, 2017). Este marco analítico destaca aspectos sobre el aprendizaje del profesor como participación en grupos y comunidades; teorías que ofrecen una forma de interpretar el aprendizaje de los profesores como participación social y en la forma de construir identidades, en relación con esas comunidades sociales (Chávez & LLinares, 2012). Según Camargo (2010), los trabajos de investigación en formación de profesores de matemáticas desde esta perspectiva son de dos tipos:

> (…) en unos se asumen que el entorno usual de formación, o de desempeño profesional, es de hecho una comunidad natural de práctica y los investigadores buscan identificar los efectos de la misma en el aprendizaje (…). En otros, se busca generar espacios de formación de profesores, o de futuros profesores, en donde ellos hagan parte de una comunidad de práctica conformada a propósito alrededor de un asunto problemático; el aprendizaje se documenta dando cuenta de la evolución de la participación o de la identidad profesional (p. 18).

Las investigaciones bajo esta perspectiva reflejan el interés en la reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas y el análisis de las prácticas de aula, como ejes centrales de estudio y la caracterización de dichas prácticas con estrategias reflexivas de formación, en la constitución de comunidades de práctica donde intervienen estudiantes en formación inicial y formadores. Las formas de abordar el aprendizaje del profesor de matemáticas están ligada a la teoría de la práctica social del aprendizaje.

Bajo el concepto de "comunidades de prácticas", se ha cuestionado cómo una comunidad aprende y transforma sus prácticas, sobre todo sus discursos y saberes sobre formación de profesores en matemáticas. Bajo el concepto de identidad se ha establecido relación entre sus formas de constitución como producto del aprendizaje en la práctica situada de enseñar matemáticas y el análisis de trayectorias de formación, asumiendo que ellas construyen y (re)construyen la identidad al otorgar sentido y significado a las experiencias de aprendizaje (Jiménez, 2002) y a la acción mediada de los instrumentos que utilizan al gestionar las clases (Chávez & Llinares, 2012). El concepto de identidad también se presenta al analizar el proceso de convierte en maestro, indagando formas de asumir el desarrollo profesional e interpretar la cultura escolar, para identificar factores que se considera, inciden para convertirse en profesionales eficaces (*Ídem*).

Un segundo foco de investigación se centra en los entornos de aprendizaje como oportunidad para aprender del profesor de matemáticas. En estos entornos se establece la relación intrínseca entre aprendizaje situado y comunidades de práctica; asumiendo el aprendizaje como un proceso de enculturación (Llinares, 2007); un proceso a lo largo de la vida, que se vive colectivamente. La naturaleza del conocimiento y las creencias se construyen, lo que permite abordar el aprendizaje como proceso social; en donde las actividades se generan en entornos de aprendizaje que los mismos estudiantes crean, a través del diseño de trayectorias de aprendizaje. Las trayectorias planteadas permiten partir de actividades

relevantes en el mundo real de los profesores, asumir las teorías como herramientas conceptuales de análisis y discusión sobre las actividades, socialización de comentarios y opiniones en ambientes de colaboración y espacios para reflexionar y analizar lo aprendido en el proceso que se vive colectivamente (García, 2005).

Desde este foco investigativo, el aprendizaje de los estudiantes para profesor se posibilita en la medida en que los programas de formación, a través de la didáctica de la matemática crean los medios para darles la oportunidad de pertenecer a la comunidad de la "práctica de enseñar matemáticas", hasta llegar a ser integrantes con participación plena en las comunidades (García & Sánchez, 2002). Desde esta línea de trabajos investigativos se afirma que "(…) en definitiva, desde la perspectiva de la cognición situada, (…), los formadores de profesores debemos determinar la clase de conocimiento, destrezas, y comprensiones que capaciten al futuro profesor para enseñar e identificar experiencias que posibiliten su aprendizaje" (García, 2005, p.8).

Un tercer foco de investigación amplía el análisis a otros aprendizajes generados en comunidades de práctica; por ejemplo, enfocadas a las prácticas sobre la enseñanza en contextos de comunidades investigativas, estableciendo una relación entre aprendizaje y desarrollo profesional. Las investigaciones interesadas en abordar el aprendizaje profesional (Lin & Ponte, 2008), resaltan el proceso de constitución en una comunidad, bajo el principio fundamental de que los participantes están aprendiendo en todo momento de interacción con la comunidad, a través de la participación en diversas prácticas, no solamente aquellas enfocadas a la práctica de la enseñanza.

Finalmente, existe una línea de investigación que vincula el desarrollo profesional y la constitución de su profesionalidad al trabajo colaborativo en comunidades investigativas y específicamente en comunidades fronterizas, en donde sus participantes son formadores de profesores, profesores de escuelas básicas, estudiantes en formación inicial y profesores en servicio (Fiorentini, 2013; Gómez, 2009). Estas investigaciones resaltan los procesos de participación en comunidades investigativas, donde se analizan las prácticas derivadas al problematizar el proceso de enseñar y aprender matemáticas, en contextos colaborativos de investigación.

El concepto de comunidad de prácticas se asume como un modo de investigar el aprendizaje en comunidades investigativas, pues su desarrollo a lo largo del tiempo constituye su identidad; la participación en comunidades investigativas evidencia que la investigación sobre sus prácticas mediadas por la interlocución con los miembros de la comunidad, ejerce un papel fundamental en la constitución de su profesionalidad y la trasformación de sus prácticas y una posibilidad de encontrar en la escuela un lugar para que el profesor investigue su práctica.

Metodología

La investigación sigue un enfoque cualitativo, ya que no se buscan explicaciones causales, sino se interpretan realidades, donde la voz de los protagonistas es fundamental para entender los fenómenos que allí suceden (Corbeta, 2010). Dado que se analizan prácticas, donde los investigadores son a su vez objetos de investigación, ésta adquiere características de etnografía y en algunos momentos de autoetnografía (Agar, 1980). La investigación se adelanta al interior de un grupo colaborativo de investigación y el objeto

de estudio son las prácticas colaborativas de investigación, generadas por diez estudiantes de licenciatura en matemáticas, algunos en el desarrollo de sus monografías, cuatro profesores en ejercicio, y dos formadores de profesores. Los profesores en ejercicio se desempeñan como profesores de matemáticas en instituciones de educación básica y media, de los cuales, algunos son estudiantes de maestría y otros ya son magísteres.

La elección como sujetos de investigación se da bajo criterios como participación activa en el Grupo y disponibilidad y compromiso. La recolección de la información se realiza a través de diario de campo de los investigadores, observación participante, grabaciones en audio de las reuniones de trabajo, narrativas (escritos) hechas por los sujetos de investigación y entrevistas. Para el análisis de la información se sigue a Erickson (1986), para quien las categorías de análisis surgen de los datos cualitativos, donde se debe generar afirmaciones empíricas a través de la inducción, y para establecer una evidencia probatoria se hace a través de la búsqueda sistemática de confirmación o no confirmación de los datos. El proceso es dialéctico, para lo cual se requiere "[…] fracturar sistemáticamente los datos", que lleve a generar categorías, y "regularidades en los datos" (Agar, 1980, p. 9).

Resultados y discusión

En el trabajo en el Grupo Colaborativo se evidencian aprendizajes para todos los participantes. En este espacio se gesta un escenario investigativo, donde los participantes encuentran un lugar para el aprendizaje, generado al problematizar prácticas pedagógicas matemáticas e investigarlas. Una de las formas de problematizar la práctica pedagógica de las clases de matemáticas es desde el análisis de clase, observadas a profesores por estudiantes de licenciatura del Grupo. Estas clases en su gran mayoría son de corte tradicional, donde el profesor es el protagonista, expone los contenidos, los explica y realiza ejercicios de aplicación, con una participación e interacción baja de los alumnos (Jiménez, Limas, & Alarcón, 2016). Para cambiar la situación, en el trabajo del Grupo se propuso leer literatura relacionada con enfoques de clase centradas en el trabajo de los alumnos, tales como resolución de problemas, situaciones problémicas, y aulas investigativas (AI). Un aula investigativa es "aquella que supone el envolvimiento de los estudiantes en tareas investigativas y, por tanto, ayuda a traer para la clase el espíritu de la actividad matemática genuina" (Ponte, 2003, p. 23).

En este enfoque la tarea investigativa se diferencia de la actividad investigativa; la tarea es propuesta por el profesor, y la actividad es la realizada por los estudiantes para resolver dicha tarea. Según estos autores,

> Las tareas matemáticas en las que los alumnos se envuelven (…) proporcionan un punto de partida para el desarrollo de su actividad matemática. Las tareas deben despertar la curiosidad, el entusiasmo, apoyándose en sus conocimientos previos e intuiciones. La actividad puede ser física o mental… (p. 73).

Una tarea investigativa envuelve una situación de aprendizaje y la forma de abordarla conlleva explorar e investigar etapas constituyentes de la investigación matemática; por tal motivo, la investigación matemática, como enfoque, parte de considerar que en las clases de matemáticas es posible hacer que el alumno experimente la actividad de un matemático, en el sentido de que formula hipótesis y conjeturas, realiza pruebas y refutaciones, presenta los resultados, argumenta, discute y valida ante sus compañeros y el profesor.

La situación comienza, como ya se mencionó, problematizando las clases observadas y analizando cómo (re)significar el papel del profesor, de los alumnos y en general la dinámica de la clase (Jiménez, 2002). En los análisis del trabajo en el Grupo fue posible reconocer cómo los dos profesores analizados (P_1 y P_2) transitaban por un proceso de aprendizaje como experiencia, derivado de (re)significar conceptos, formas de abordar la enseñanza de la matemática y el papel del profesor en el aula de clase; de aprendizaje como hacer, derivado de las acciones que emprendieron para llevar a cabo el planteamiento y aplicación de las AI en el desarrollo de sus clases; de aprendizaje como devenir, derivado de reconocer cómo el análisis de sus formas de concebir la enseñanza de las matemáticas y su papel en el aula contribuían a la transformación de sus conceptos, ideas y prácticas; y, finalmente, de aprendizaje como afiliación, derivado de reconocer su aprendizaje a través de hacer parte de la comunidad.

Antes del reconocimiento de las AI como alternativa o foco de investigación, P_1 y P_2 señalaban la importancia de considerar en las prácticas pedagógicas matemáticas la argumentación y la aplicación de ejercicios como estrategia de enseñanza; así lo señala el siguiente fragmento de conversación.

P_1: (…) el paradigma del ejercicio del todo no es malo, pues yo lo veo como una finalidad después de todo un proceso, cuando ellos construyan sus conceptos, y es una obligación para mí rematar todas las clases en ese paradigma o, mejor, en ese ambiente de aprendizaje.
Estudiante$_1$ (E_1): a mí también me parece bueno concluir siempre con un ejercicio para que aplique lo que sabe.
Profesor$_1$ (P_1): y si no los chicos se volverían más perezosos, porque solamente sería intentar que argumenten y, en algunos casos, no llegar a concluir nada.
P_2: la argumentación siempre trae algo bueno, el problema es que no siempre se llega a lo que uno quiere que ellos hagan.
E_2: No estoy muy de acuerdo; el texto que estoy leyendo del funcionamiento de la clase, según Ponte, que está en el *one drive*, recalca que las clases en matemáticas siempre tienden a moverse en el paradigma del ejercicio.
Formador de profesores$_1$ (FP_1): ¿y tú qué crees?
E_2: Yo pienso que sí, y ahí encontramos muchos de los problemas que hemos venido contando acá; pienso que se puede dar paso a otros ambientes de aprendizaje (Trabajo de Grupo, 30/03/15).
P_2: Sí, eso es verdad, cuando no se tiene la oportunidad de reflexionar, uno cae en lo que siempre han sido las clases de matemáticas, solo hacer ejercicios, la mayoría de las veces sin mucho sentido.

Conclusiones

En el Grupo Colaborativo se evidencian aprendizajes para todos los participantes y se gesta un escenario investigativo, donde los participantes encuentran un lugar para el aprendizaje, generado al problematizar prácticas pedagógicas matemáticas. La forma encontrada para problematizarlas parte de la observación y análisis de clases, observadas a profesores por estudiantes de licenciatura del Grupo. Este contexto evidencia un espacio de dialogo entre estudiantes para profesor, profesores en ejercicio y formadores; el cual se enriquece con las lecturas de textos que invitan y ayudan a la reflexión y a la (re)significación de las prácticas de aula.

Referencias bibliográficas

Agar, M. (1980). *The professional stranger: An informal introduction to ethnography. New York.* New York: Academic Press.

Blanco, L. (2004). Problem solving and the inicial and theoretical education of teachers in Spain. *Mathematics Teacher educational and Development, 6*, 37-48.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Valencia: U. de Valencia: Tesis de doctorado no publicada.

Chávez, Y. & Linares, S. (2012). La identidad como producto del aprendizaje en la práctica de enseñar matemáticas en profesores de primaria. En A. Estepa, A. Contrreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, & L. Ordoñez (Ed.). *Investigación en Educación Matemática XVI;* 187-196. Jaén: SEIEM.

Corbeta, P. (2010). *Metodología y Técnicas de investigación Social.* Madrid: McGraHill.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. *Handbook of research on teaching. M. Wittrock (Ed.);* 119-161. New York: McMillan.

Fiorentini, D. (2013). Learning and professional development of mathematics teacher in research communities. *Sisyphus-Journal of Education, 1(3)*, 152-161.

García, M. &. Sanchez, V. (2002). Una propuesta de formación de maestros desde la educación matemática:adoptando una perspectiva situada. En M. García, V. Sánchez (Ed). *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente;* 59-91. Cáceres, Universidad de Extremadura, Publicaciones.

García, M. (2005). La Formación de Profesores de Matemáticas: un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática, 17(2)*, 153-166.

Gomez, P. (2009). Procesos de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. *Electronic Journal of research in Educational Psychology, 7(1)*, 471-498.

Jiménez, A. (2002). *Quando professores de Matemática da escola e da universidade se encontram: (re)significação e reciprocidade de saberes.* Campinas (SP - Brasil): Universidade Estadual de Campinas. Tese de Doutorado não publicada.

Jiménez, A., Limas, L. & Alarcón, J. (2016). Prácticas pedagógicas matemáticas de profesores de una institución de enseñanza básica y media. *Práxis & Saber, 7(13)*, 127-152.

Krainer, K. (2008). Individuals, team's communities and networks: participants and ways of participation in mathematics teacher education. In K. Krainer, & T. Wood (Eds), *Participants in mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Lave, J. &. Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2006). Socio-cultural research . *Handbook of Research on the Psichology of Mathematics: past, present and future,* 347-366. Rotterdam-Tapei:: Sence Publishers.

Lin, F. & Ponte, J. (2008). Face to Face learning communities of prospective mathematics teachers: studies on their professional growth. K. Krainer, & T. Wood (Ed.) *Participants in mathematics teachers education: Individual, teams, communities and networks*, 111-129. Rotterdam/ Taipei: Sence Publisher.

Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. *Conferencia, XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* Granada, España.

Ponte, J. P. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Riscanevo, L. &. Jiménez, A. (2017). El aprendizaje del profesor de matemáticas como campo investigativo. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana. 19(28). DOI: http://doi.org/10.19053/01227238.6247*, 173-196.

Riscanevo, L. (2017). Aprendizaje, Experiencia y Formación Investigativa del Profesor de Matemáticas: Tejiendo Historias. *Tesis de Doctorado en Ciencias de la Educación*, sin publicar. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de colombia. Director: Jiménez, A.

Tinjala, P. (2002). Wrinting as a learninig tool. *Symposium "International Research into Writing: an European-American Dialogue on Global and Local Issues"; AREA,* 4-12. 82th Annual Meeting of the American Educational Research Association.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S.A.

TEORÍAS IMPLÍCITAS SOBRE EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS QUE POSEEN LOS MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL

Rodri Demus De la Cruz Rodríguez, Ricardo Francisco Luengo González
Universidad de Extremadura (España)
rodridemus@gmail.com, rluengo@unex.es

Resumen

En este reporte de investigación se presentan los resultados de un trabajo final de máster el cual tuvo como propósito explorar las concepciones sobre evaluación en matemáticas de 30 futuros maestros de primaria, para la exploración de sus concepciones se tomó como marco teórico el de las teorías implícitas y para la recogida de datos se realizó mediante la técnica de relatos en la cual los participantes expresaron libremente sus opiniones reflexionando sobre las dimensiones básicas de la evaluación. Los resultados indican que las concepciones sobre la evaluación en matemáticas del profesorado se encuentran mejor relacionadas con la teoría implícita constructiva y que giran en función al objeto, modelo y momento de evaluación.

Palabras clave: concepciones, evaluación, implícitas, matemáticas, pathfinder

Abstract

In this research report we show the results of a final master's work, which aimed to seek the conceptions about evaluation in mathematics of 30 prospective elementary school teachers. To explore their conceptions the theoretical framework of implicit theories was used. On the other hand, the collection of data was done through the technique of comments in which the participants freely expressed their opinions by reflecting on the basic dimensions of evaluation. The results indicate that the teachers' conceptions about mathematics evaluation are more related to the implicit constructive theory and that they revolve around the object, model and moment of evaluation.

Key words: conceptions, evaluation, implicit, mathematics, pathfinder

Introducción

El estudio realizado tenía como objetivo explorar las teorías implícitas respecto a la evaluación en matemáticas en maestros en formación inicial ya que puede dar pautas al profesor formador de cómo debe actuar, al averiguar las concepciones de los futuros maestros. Los avances en la teorías proporcionan marcos interpretativos que podemos aplicar a cualquier elemento sistémico del proceso enseñanza aprendizaje y uno de estos elementos es la evaluación. La pertinencia del mismo lo demuestra el interés que está suscitando el tema, que detectamos a través de las publicaciones que se están produciendo por parte de investigadores reconocidos a nivel nacional e internacional como es el caso de Pontes, Poyato, López y Oliva (2016) quienes mediante un análisis cualitativo, usando cuestiones abiertas y poniendo en práctica un enfoque reflexivo señalan que las concepciones respecto a la evaluación de los maestros de

secundaria en formación inicial de diversas especialidades están relacionadas con el enfoque innovador más próximo al constructivista.

Por su parte Azis (2015) usando métodos mixtos revela que las concepciones de los maestros respecto a la evaluación es un conflicto y considera que las políticas del estado limitan sus esfuerzos. También se encuentra el trabajo de Monteagudo, Molina y Miralles (2015) que realizaron un trabajo descriptivo con metodología cualitativa usando entrevistas y grupos de discusión cuyo propósito fue conocer las opiniones sobre la evaluación del profesorado de ciencias sociales en la educación secundaria sus resultados indican que los docentes en ejercicio muestran escasa formación, y evalúan a sus alumnos con procedimientos tradicionales. Otra investigación relacionada a nuestro propósito es la de Gil (2014) que exploro las concepciones sobre enseñanza y aprendizaje de profesores en formación usando un cuestionario de dilemas y tomando como marco teórico el de las teorías implícitas y revela que las concepciones de los maestros en formación están situadas en la teoría implícita constructiva.

Marco teórico

Para la exploración de los pensamientos se tomó como marco teórico el de las teorías implícitas (Pozo, Scheuer, Pérez, Mateos, Martín y De la Cruz, 2006) ya que a nuestro entender esta descripción teórica permite entender las experiencias construidas por el docente a partir de su formación inicial y que al actuar con sus estudiantes lo emplea de manera espontánea al hacer referencia a algunos de los elementos sistémicos del proceso enseñanza aprendizaje entre ellos la evaluación. Estas teorías básicamente según sus autores son las siguientes:

Teoría directa: Es la más básica y se asocia al modelo curricular academicista y a un paradigma positivista. Se centra en los resultados o productos del aprendizaje, sin situarlo en relación con un contexto de aprendizaje.
Teoría interpretativa: Conecta los resultados, los procesos y las condiciones del aprendizaje de modo relativamente lineal. El alumno se constituye en el eje del aprendizaje al poner en juego procesos que en muchos casos se caracterizan por introducir distorsiones indeseables.
Teoría constructiva: El aprendizaje implica procesos mentales reconstructivos de las propias representaciones acerca del mundo físico, sociocultural e incluso mental, así como de autorregulación de la propia actividad de aprender.

Por tanto, este marco teórico resulta apropiado para estudiar el pensamiento docente ya que posibilita asociar las ideas de los sujetos hacia una teoría u otra permitiendo asi de esa manera realizar una semejanza con las teorías formales del aprendizaje conocidas como el conductismo, el procesamiento de la información y el constructivismo.
Así mismo, se consideró las dimensiones básicas de la evaluación (Tejada, 1999; De la Torre, 1994) ¿para qué evaluar?, ¿qué evaluar?, ¿con qué modelo?, ¿quién debe evaluar?, ¿con qué instrumentos?, y ¿en qué momento efectuar la evaluación?

Por otro lado, las Redes Asociativas Pathfinder según Luengo, Casas, Carvalho, Contreras, Arias, Hidalgo, Martín, Roldán, Soto y De la Cruz (2017) son una técnica de adquisición de datos y representación del conocimiento ya que ofrecen información de tipo gráfica, de una forma más estructurada, en forma de

redes obteniendo visiones más amplias del conocimiento. Las Redes Asociativas Pathfinder realizan una puntuación de similaridad entre conceptos en cuyas representaciones aparecen las concepciones como nodos y sus relaciones como segmentos que los unen de mayor o menor longitud según el peso o fuerza de su proximidad semántica. Es asi que, esta técnica de obtención de datos resulta ser de carácter no invasivo y posibilita la extracción de gran cantidad de información que se obtiene básicamente de los sujetos a nivel de textos. En nuestro caso los nodos fueron las dimensiones básicas de la evaluación y fue posible obtenerlo para cada teoría implícita.

Metodología

El estudio adopto un enfoque mixto (Creswell y Plano, 2007), los participantes fueron 30 futuros maestros de primaria en formación inicial 15 de la Universidad de Extremadura (España) y 15 de la Universidad de Trujillo (Perú) todos ellos cursaban el último año de formación, para la recogida de datos se hizo mediante la técnica de relatos (Alzás y Casas, 2015) en la cual se solicitaba a los participantes a que expresen de manera libre sus opiniones reflexionando sobre las dimensiones básicas de la evaluación (Tejada, 1999; De la Torre, 1994). Para el volcado de datos se usó el software cualitativo WebQDA (Neri de Souza, Costa y Moreira, 2011) en donde se hizo la categorización, clasificación, las consultas respectivas mediante matrices exportables en formato Excel para generar graficas descriptivas. También se exporto matrices escalonadas en formato webqda con las cuales mediante el uso de la aplicación Goluca (Godinho, Luengo y Casas, 2007) realizamos Redes Asociativas Pathfinder (Casas y Luengo, 2012), las que permitieron hacer un mejor análisis de la asociación de las ideas.

Resultados

Luego del tratamiento de los datos cualitativos encontramos que las teorías implícitas que tenían los futuros maestros eran similares en ambos grupos de estudio lo que nos permitió sintetizarlas como a continuación se muestra:

Tabla 1: *Dimensiones, categorías y concepciones encontradas en la investigación*

Dimensión	Categoría	Concepciones
Teoría Directa	Finalidad	Hacer correctamente operaciones, cumplir objetivos que se plantean anticipadamente, para colocar una nota.
	Objeto	El conocimiento adquirido, la asimilación de los contenidos a través de ejercicios y el conocimiento que se genera.
	Modelo	Evaluación cuantitativa tradicional.
	Evaluador	El mismo docente de aula.
	Instrumento	Test, exámenes orales, pruebas escritas.
	Momento	Al finalizar el curso, trimestre, unidad, clase.

Teoría Interpretativa	Finalidad	Ver si se han alcanzado los objetivos y conocimientos que se habían propuesto durante todo el proceso.
	Objeto	El progreso del alumno, los conocimientos, actitudes, procedimientos, metodología de enseñanza.
	Modelo	Evaluación cuantitativa con poco puntaje en los exámenes y basado en preguntas del nivel.
	Evaluador	El docente y en casos muy puntuales los propios alumnos.
	Instrumento	Pueden ser una prueba objetiva, examen oral, una lista de cotejos, pruebas escritas, a través de una acción.
	Momento	Al principio para que sea orientativa y al final para tener claro el grado de comprensión que se ha conseguido.
Teoría Constructiva	Finalidad	Producir un aprendizaje significativo, para planificar las capacidades e indicadores, para entender cómo se aprende.
	Objeto	El proceso más que el resultado, las estrategias de resolución, los procedimientos, las actitudes, la diversidad.
	Modelo	Mixto apuntando a crear actividades manipulativas que involucren la acción del estudiante.
	Evaluador	El profesor debe evaluar a los alumnos, los alumnos se evalúan entre ellos y también al profesor.
	Instrumento	Trabajos individuales, trabajos colectivos, la observación, prácticas calificadas, juegos, lista de cotejos, rúbricas.
	Momento	De manera continúa durante todo el proceso de individualizada no necesariamente para poner una nota.

La Tabla 1 muestra la información cualitativa, pero no a nivel cuantitativo por lo que en la Figura 1 presentamos las concepciones de los sujetos en porcentajes atendiendo a cada teoría implícita.

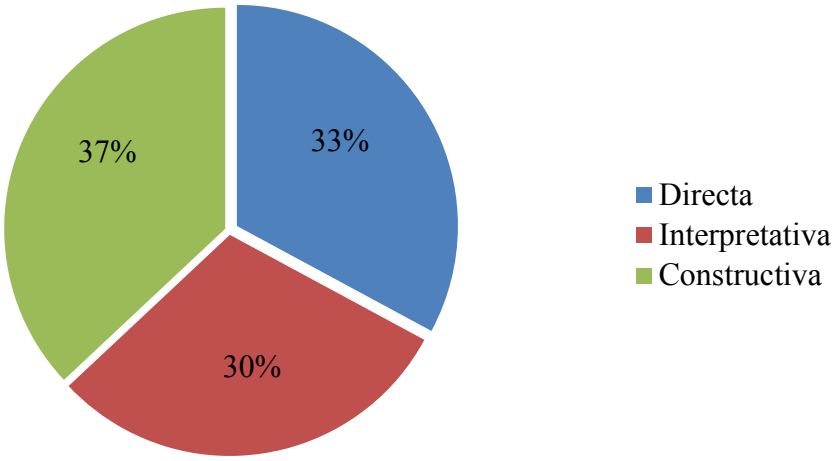


Figura 1. Teorías implícitas de la evaluación en matemáticas en ambos grupos de estudio

En lo que sigue de este reporte presentamos las Redes Asociativas Pathfinder generadas con la apliación Goluca las mismas que representan la estructura cognitiva en relación a la asociacion de las concepciones de los futuros maestros.

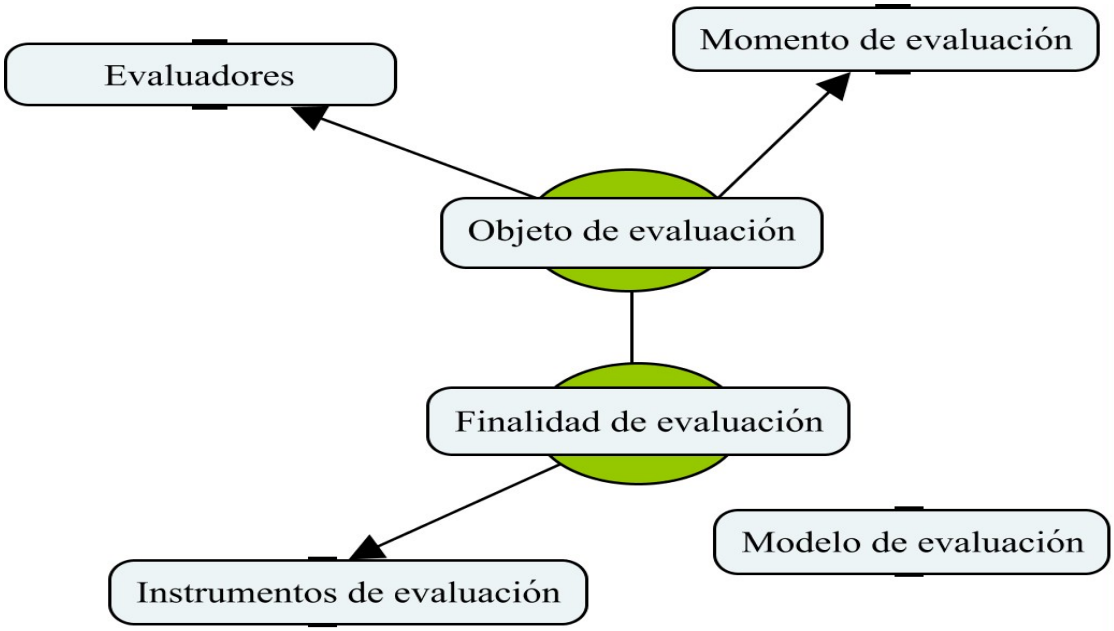


Figura 2. Red Asociativa Pathfinder de las categorías de investigación. Teoría directa

En la Figura 2 para la teoría implícita directa podemos apreciar que las categorías finalidad y objeto de evaluación se encuentran mejor asociados, las categorías evaluadores, momento e instrumento tendrían menor grado de asociación y el modelo de evaluación se encuentra totalmente aislado.

Estas concepciones, de acuerdo a las Figura 1 representan el 33% y de acuerdo a la Figura 2 las categorías que mejor relacionadas se encuentran son las del objeto y finalidad de la evaluación cuyas concepciones se pueden apreciar en la Tabla 1. Estas concepciones se relacionan con los resultados de Remesal (2011) al indicar que existe dificultad de poner en práctica un sistema de evaluación innovador y alternativo. También guardan relación con los resultados de Monteagudo, Molina y Miralles (2015) quienes señalan que los docentes muestran escasa formación en evaluación y siguen evaluando mediante procedimientos tradicionales.

De igual manera nuestros resultados se relacionan con los de Wang, Kao y Lin (2010) que señalan que el modo de evaluar de los profesores en formación está más próximo a una visión tradicional del aprendizaje. Con respecto a la finalidad de la evaluación nuestros resultados hacen referencia a la función normativa de la evaluación y coinciden con los de Coll y Remesal (2009) quienes indican que las concepciones del profesorado en matemáticas están ligadas a la percepción de las funciones normativas atribuidas a la evaluación en los distintos momentos y niveles de la escolaridad. También coincidimos con Moreno y Ortiz (2008) al señalar que la evaluación se centra más en ver que el alumno en cuanto a sus conocimientos, sus fallas o deficiencias y verificar los logros alcanzados respecto a los objetivos y contenidos.

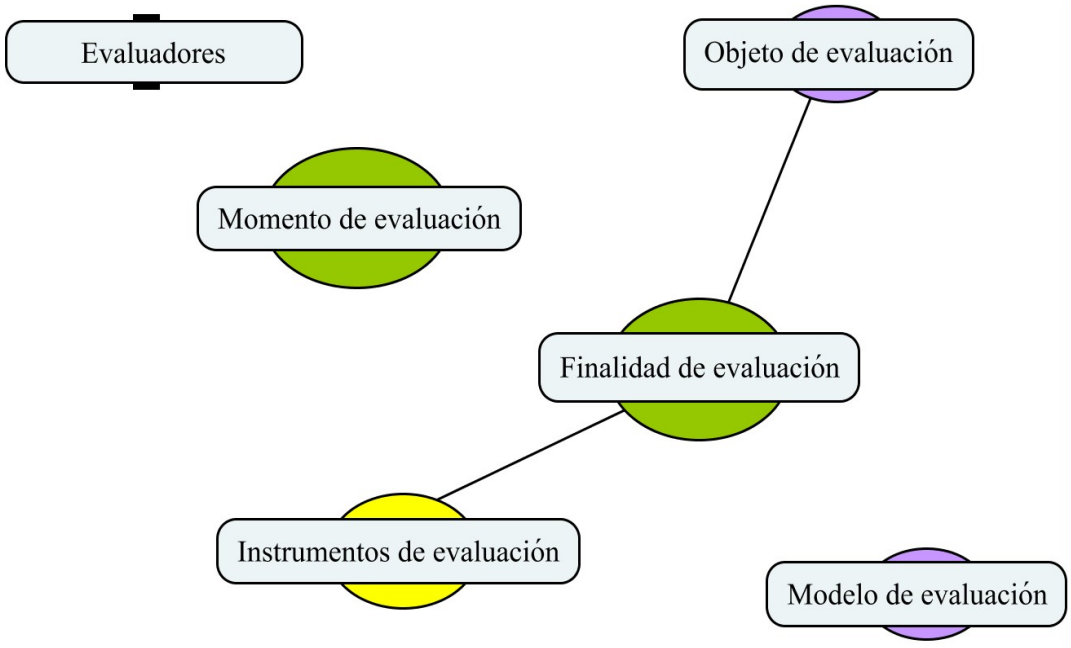


Figura 3. Red Asociativa Pathfinder de las categorías de investigación. Teoría interpretativa

En la Figura 3 para la teoría implícita interpretativa podemos apreciar que la categoría finalidad se encuentra relacionada con objeto e instrumentos. Mientras que, las categorías evaluadores, momento y modelo se encuentran aislados. Estas concepciones sobre la evaluación en matemáticas en esta teoría son la que se muestra en la Tabla 1 y representan el 30 % (Figura 1).

De la Figura 3 las categorías mejor relacionados son los instrumentos, finalidad y objeto de evaluación y se relacionan con los resultados de Benitez (2013) que destaca que las matemáticas se caracterizan por el seguimiento de reglas, procedimientos, practica rutinaria de ejercicios, uso de palabras clave y la falta de un contexto significativo para su aprendizaje.

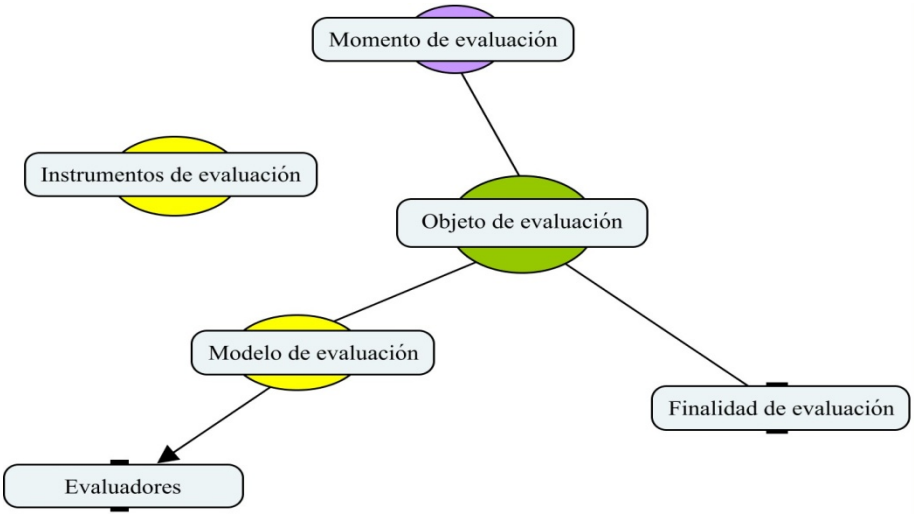


Figura 4. Red Asociativa Pathfinder de las categorías de investigación. Teoría constructiva

En la Figura 4 para la teoría implícita constructiva se aprecia que el objeto de la evaluación se encuentra relacionado con el modelo y momento de evaluación y en menor grado se asocia los evaluadores y la finalidad de la evaluación. También podemos ver que la categoría instrumentos de evaluación se encuentra totalmente aislado.

Las concepciones sobre la evaluación en matemáticas para esta teoría representan el 37 % (Figura 1) y son las de la Tabla 1 y de la Figura 4 las categorías que mejor asociadas se encuentran son el objeto, momento y modelo de evaluación y se encuentran en la tendencia de los resultados encontrados por Gil (2014) que señala que las concepciones del profesorado en formación se sitúan en la teoría constructiva y que el 59% afirma que al evaluar tendrían en cuenta los procedimientos y estrategias que usa el alumno para abordar situaciones novedosas. Estos resultados también guardan relación con los de Pontes, Poyato, López y Oliva (2016) que indican que existe un número ligeramente mayor de opiniones relacionadas con el enfoque innovador más próximo al constructivista.

Conclusiones

Del análisis de nuestros resultados cuantitativos y cualitativos evidenciamos que las concepciones implícitas sobre la evaluación en matemáticas del profesorado en formación inicial están mejor relacionadas con la teoría implícita constructiva y que giran en función al objeto, modelo y momento de evaluación. Es decir los maestros en formación inicial evaluarían en función al proceso que se sigue viendo las estrategias utilizadas, usando un modelo mixto (cualitativo y cuantitativo) apuntando a generar aprendizajes significativos relacionados con la vida cotidiana como por ejemplo la aplicación inmediata a situaciones o episodios matemáticos del entorno de los estudiantes y atendiendo a la diversidad. Es asi que, de esta investigación surge la implicancia de realizar un seguimiento como para ver si es que en las aulas y en su vida futura estos maestros actúan de manera constructiva.

Referencias bibliográficas

Alzás, T. y Casas, L. (2015). Relato autobiográfico del abandono educativo: Una visión integrada desde metodologías mixtas. *Atas CIAIQ2015, 4*(3), 108-113.

Azis, A. (2015). Conceptions and practices of assessment: A case of teachers representing improvement conception. *TEFLIN Journal, 26*(2), 129-154.

Benitez, W. (2013). Concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje de docentes en formación. *Educación científica y tecnológica*, 176-180.

Casas, L. y Luengo, R. (2012). Teoria de los conceptos nucleares: aplicación en didáctica de las matemáticas, un ejemplo en geometría. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de Investigación en Educación Matemática* (pp. 125-164). Badajoz, Extremadura, España: TECNIGRAF.

Coll, C. y Remesal, A. (2009). Concepciones del profesorado de matemáticas acerca de las funciones de la evaluación del aprendizaje en la educación obligatoria. *Infancia y aprendizaje, 32*(3), 391-404.

Creswell, J, y Plano, V. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

De la Torre, S. (1994). *Innovación curricular. Proceso, estrategias y evaluación.* Madrid: DyKinson, S.L.

Gil, P. (2014). Concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del alumnado del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria de la Universidad del País Vasco. *Magister, 26*, 67-74.

Godinho, V., Luengo, R. y Casas, L. (2007). *Implementación del software GOLUCA y aplicación al cambio de redes conceptuales*. Informe para la obtención del "Diploma de Estudios Avanzadaos", Universidad de Extremadura, España.

Gómez, V. y Guerra, P. (2012). Teorías implícitas respecto a la enseñanza y el aprendizaje: ¿Existen diferencias entre profesores en ejercicio y estudiantes de pedagogía?. *Estudios Pedagógicos XXXVIII, 1*, 25-43.

Luengo, R., Casas, L., Carvalho, J., Contreras, J., Arias, J., Hidalgo, V., Martín, R., Roldán, I., Soto, L. y De la Cruz, R. (2017). Líneas de Investigación del Grupo Ciberdidact. Enfoques mixtos. En A. Costa, M. Cruz y M.

Martín (Org.), *La Práctica de la investigación cualitativa: ejemplificación de estudios* (pp. 116-150). Aveiro, Portugal: Ludomedia.

Monteagudo, J., Molina, S. y Miralles, P. (2015). Opiniones sobre evaluación de los profesores de segundo ciclo de ESO de geografía e historia en España: El caso de la Región de Murcia. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 20*(66), 737-761.

Neri de Souza, F., Costa, A. y Moreira, A. (2011). Questionamento no processo de análise de datos qualitativos com apoio de software WebQDA. *EduSEr-Revista de Educacao, 3*(1), 19-30.

Pontes, A., Poyato, F., López, L. y Oliva, J. (2016). Concepciones sobre evaluación en la formacion inicial del profesorado de ciencias, tecnología y matemáticas. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 9*(1), 91-107.

Pozo, J., Scheuer, N., Perez, M., Mateos, M., Martín, E. y De la Cruz, M. (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje: las concepciones de profesores y alumnos.* Barcelona: Grao.

Remesal, A. (2011). Primary and secondary teacher's conceptions of assessment: A qualitative study. *Teaching and Teacher Education, 27*(2), 472-482.

Tejada, J. (1997). *La evaluación de programas.* Barcelona: Ed. Departament de Pedagogia i Didáctica UAB.

Wang, J., Kao, H. y Lin, S. (2010). Preservice teacher's initial conceptions about assessment of science learning: The coherence with their views of learning science. *Teaching and Teacher Education, 26*(3), 522-529.

PROMOCIÓN DIRECTA VERSUS EXAMEN FINAL. ERRORES RECURRENTES ALGEBRAICOS EN ALUMNOS DE CÁLCULO II

Andrea Seoane, Liliana Milevicich
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco. (Argentina)
Seoane_andrea@yahoo.com.ar, liliana_milevicich@yahoo.com.ar

Resumen

Los alumnos de la carrera de Ingeniería que cursan la materia Cálculo II en segundo año, presentan dificultades en adquirir nuevos conceptos, relacionados con aquellos que han estudiado en Algebra y Geometría Analítica (AyGA), materia de primer año.
Se analiza este problema en el marco de la Teoría del Cambio Conceptual, desde la hipótesis de que la significatividad de los aprendizajes logrados por los alumnos en AyGA, están asociados al tipo de evaluación con que promocionaron la materia.
Luego de la primera etapa exploratoria, se especifican y analizan los errores algebraicos, que cometen los alumnos en Cálculo II, en función de los conocimientos anteriores asociados a los estudiados en AyGA y al tipo de evaluación con que estos alumnos aprobaron la materia en primer año.

Palabras claves: evaluación, aprobación por promoción, errores algebraicos

Abstract

Engineering students that study the subject Calculus II in second year, show difficulties in acquiring new concepts, related to those who have studied in Algebra and Analytical Geometry (AyGA), subject of first year.
This problem is analyzed in the framework of Conceptual Change Theory, from the hypothesis that the significance of the learning achieved by the students in AyGA, are associated with the type of evaluation with which they promoted the subject.
After the first exploratory phase, the students' algebraic errors were calculated and analyzed in Calculus II, based on the previous knowledge associated to those studied in AyGA and the type of evaluation with which these students approved the subject in the first year.

Key Words: assessment, promotion approval, algebraic mistakes

Introducción

Los conocimientos previos que poseen los alumnos como así también las ideas intuitivas que pudieran tener influyen en los nuevos aprendizajes. Schnotz, Vosniadou y Carretero (2006), explican que los llamados preconceptos, concepciones erróneas o concepciones alternativas, que poseen los alumnos,

producto de su conocimiento ingenuo o de aprendizajes previos, pueden interferir en el aprendizaje de los nuevos.
Este problema se detectó en alumnos de segundo año de Ingeniería. Las dificultades en la adquisición de nuevos conceptos en Cálculo Multivariable, parecían estar asociados a conceptos que no conocían o no podían relacionar, vinculados a la materia AyGA, de primer año.

Indagación bibliográfica

Los conocimientos previos están organizados en nuestra mente en forma de estructuras cognitivas. Estas se definen como "un conjunto de conocimientos ya adquiridos que se encuentran interrelacionados entre si, son los que permiten o no, dar sentido a cualquier nuevo conocimento" (Fairstein y Gissels, 2004, p. 38).

Acá se destacan aspectos importantes ya que las estructuras cognitivas son productos de la historia de los aprendizajes de cada persona. Es decir, las estructuras que posee una persona en un momento determinado dependen de los conocimientos que ha adquirido en el pasado. Las estructuras cognitivas pueden actuar como facilitadores u obstaculizadores en el aprendizaje, un conocimiento cualquiera se incorpora si y solo si puede incluirse en alguna estructura cognitiva que le dé sentido y significado. Si no hay una estructura previa para incorporarlo, el nuevo conocimiento puede ser deformado y hasta rechazado por la mente.
Charnay (1994), afirma que las producciones de los alumnos nos dan información acerca de su "estado de saber". Si en sus producciones se encuentran errores, y éstos persisten en el tiempo, nos habla de la manera de conocer del alumno y no de la ausencia de saber.
Diferentes autores han estudiado cómo los conocimientos previos erróneos pueden obstaculizar la adquisición de los nuevos. Según Bachelard (1988) algunos conocimientos previos pueden constituirse en obstáculos epistemológicos cuando se pretenden adquirir nuevos conocimientos.

La Teoría del cambio conceptual explica que los preconceptos y conocimientos previos erróneos pueden obstaculizar la adquisición o aprendizaje de los nuevos. En ciertas ocasiones la nueva información no puede ser agregada a la ya existente y entra en conflicto con la preexistente (Schnotz, Vosniadou y Carretero, 2006).

El problema expuesto se comenzó a analizar en el marco de esta Teoría, la cual pretende explicar cómo influyen los conocimientos previos que poseen los alumnos en los procesos de adquisición de los nuevos; esto es: en ocasiones la nueva información resulta incompatible con la preexistente, produciéndose un conflicto cognitivo cuya resolución adecuada da origen a una reorganización de los conocimientos en la mente del alumno; por el contrario, la coexistencia de esquemas mentales incompatibles explicaría los errores que cometen los estudiantes (Del Puerto y Seminara, 2010).

Método

De nuestra práctica cotidiana, en el trabajo de aula, en las producciones escritas (evaluaciones, trabajos prácticos), en el aula virtual de la materia y de las preguntas orales, se observó que, los alumnos cometían

errores algebraicos y/o tenían dificultades para recordar definiciones, fórmulas o establecer relaciones sencillas. Se observó que esto dificultaba la correcta apropiación de los contenidos en Cálculo II.
Por lo que en una primera instancia, se inferió que aquellos que aprobaron AyGA con exámenes pre-parciales, eran los que tenían mayores dificultades. El problema expuesto dio origen a una investigación de tipo interpretativa, que se desarrolló durante el transcurso del ciclo lectivo 2016 en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco.

Hipótesis de investigación

Los alumnos que promocionan AyGA con examen pre-parcial tienen dificultades en la aplicación de conceptos algebraicos básicos necesarios para adquirir nuevos conceptos de Cálculo II.

Objetivo

1. Categorizar los errores conceptuales que cometen los alumnos en Cálculo II, en función de los conocimientos anteriores asociados a conceptos estudiados en AyGA y al tipo de evaluación con que estos alumnos aprobaron la primer materia.
2. Comparar las producciones de los alumnos en Cálculo II en relación con la forma en que aprobaron AyGA

*Desarrollo***:** En AyGA, los alumnos tienen las siguientes opciones para aprobar la materia:

- Por medio de "*promoción directa*":
- Aprobar durante el transcurso de la cursada por medio de la resolución de cuatro exámenes pre-parciales.
- Por medio de un "*examen final*", donde se rinde la materia en forma completa en una sola evaluación.

A partir de una primera exploración sobre el problema, se identificó al grupo de alumnos que cometía con mayor frecuencia errores algebraicos y/o tenía mayores dificultades en comprender los nuevos conceptos. Este grupo estaba compuesto por alumnos que habían promocionado AyGA mediante el sistema de exámenes denominado "pre-parcial"

Para identificarlos con mayor precisión y poder analizar sus producciones, se confeccionó una encuesta donde se les pidió que se identificaran con nombre y apellido y se les preguntó de qué forma habían aprobado AyGA.

A partir de la misma se pudo diferenciar: El Grupo 1 (G1): alumnos que aprobaron AyGA con exámenes pre-parcial, y el Grupo 2 (G2): alumnos que aprobaron AyGA con examen final. Además se utilizaron los siguientes instrumentos de recolección de datos: primer examen parcial de Cáculo II, contenidos y competencias que involucran a ambas materias.

Análisis de los Instrumentos

De las producciones de los estudiantes en la asignatura Cálculo II, se detectaron diferentes errores:

a. Para el cálculo del vector Binormal, el contenido algebraico asociado a este concepto es el producto vectorial entre vectores. Se encontró que varios alumnos seleccionaron mal el signo de los cofactores. Se observó la falta de relación entre el signo del cofactor con el determinante de la matriz menor.
b. En el cálculo del plano normal o plano tangente a una superficie, el conocimiento previo necesario es la condición de perpendicularidad entre vectores y la ecuación general del plano. Se detectó que el error cometido fue no plantear la ecuación correspondiente al producto escalar entre vectores igualada a cero. Aquí los alumnos no relacionaron que la ecuación general del plano es el resultado del producto punto entre dos vectores, uno general $(X-A)$ incluído en el plano y un segundo vector normal al mismo.
c. Para el cálculo de la derivada direccional, el alumno necesita estar familiarizado con el concepto del producto punto/escalar entre vectores. Se encontró en las producciones que los alumnos escribían un vector en vez de un escalar. Aquí se observa que se confunde el resultado del producto *vectorial* con el producto *escalar* (es decir un número real).
d. En la búsqueda de un plano paralelo a otro tangente a una superficie, se requiere el conocimiento previo de las posiciones relativas entre planos, (vectores normales paralelos entre sí). Los alumnos planteaban la igualdad entre sus componentes homólogas y no su proporcionalidad.
e. Sobre las propiedades del vector gradiente, y de su relación con el cálculo de la derivada direccional máxima, el contenido previo asociado es la interpretación geométrica del producto escalar entre vectores. Es necesario que el alumno analice el paralelismo, dirección y sentido entre el vector gradiente y el vector tangente a la curva en el punto, relacionando esto con el ángulo comprendido, y cómo se modifica el valor del Coseno del ángulo, según las posiciones de los vectores antes mencionados. Se observó que al plantearles la pregunta: ¿coincide la derivada direccional máxima con la derivada direccional?, respondían utilizando la definición estudiada en clase sin justificar la afirmación a partir de los contenidos matemáticos pertinentes.

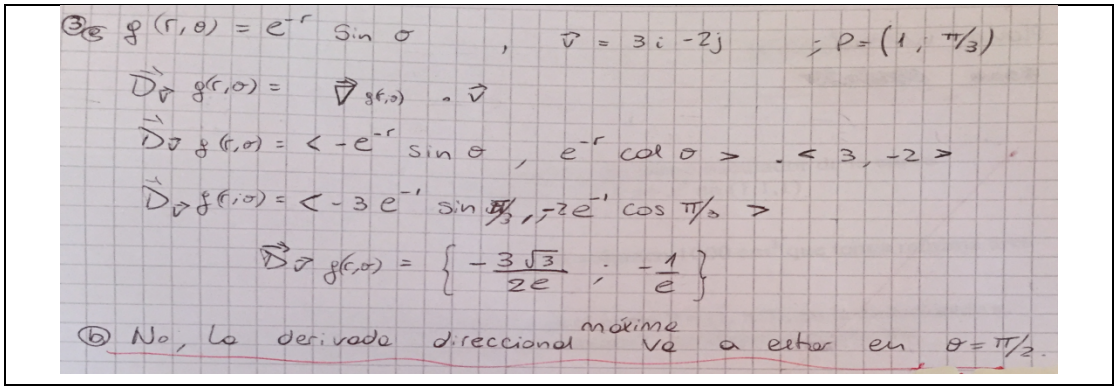


Figura 1. Se exhibe la respuesta de un alumno, donde en el punto b responde a la pregunta anteriormente expuesta.

Luego de analizar los errores cometidos por los alumnos, se realizó la categorización y clasificación de los mismos. También se diferencieron dos grupos, G1: alumnos que aprobaron AyGA con examen pre-parcial y G2: alumnos que aprobaron AyGA con examen final, y se establecieron los porcentajes de errores cometidos en cada categoría, según la cantidad de alumnos en cada grupo.
En la tabla 1 se exhiben los porcentajes que reflejan los errores cometidos por los alumnos.

Tabla1: Análisis de errores por grupos

Grupos		G1	G2
Plano Normal y Plano Osculador	Condición paralelismo entre vectores	16%	9%
	Confunde punto por vector	8%	9%
	Análisis geométrico vector normal al plano	58%	36%
	Ecuación general del plano	41%	9%
	Confunden escalar nulo por Vector nulo	8%	0%
	Producto vectorial entre vectores	16%	0%
	Condición de perpendicularidad entre vectores	16%	9%
Derivada direccional	Confunde punto por vector	21%	6,25%
	Normalización de un vector	5%	25%
	Interpretación geométrica del producto escalar	37%	12,5%
Plano Tangente	Condición de paralelismo entre planos	25%	0%
	Cálculo del vector Normal al plano	50%	0%
	Cálculo de la recta Normal al plano	50%	0%
Longitud de curva	Reparametrización de curva	42%	20%

Para una mayor comprensión del Gráfico 1, se tabularon las categorías con letras:

A	Condición de paralelismo entre vectores
B	Confunde punto por vector
C	Análisis geométrico vector normal al plano
D	Ecuación general del plano
E	Confunden escalar nulo por Vector nulo
F	Producto vectorial entre vectores
G	Condición de perpendicularidad entre vectores
H	Confunde punto por vector
I	Normalización de un vector
J	Interpretación geométrica del producto escalar
K	Condición de paralelismo entre planos
L	Cálculo del vector Normal al plano
LL	Cálculo de la recta Normal al plano
M	Reparametrización de curva

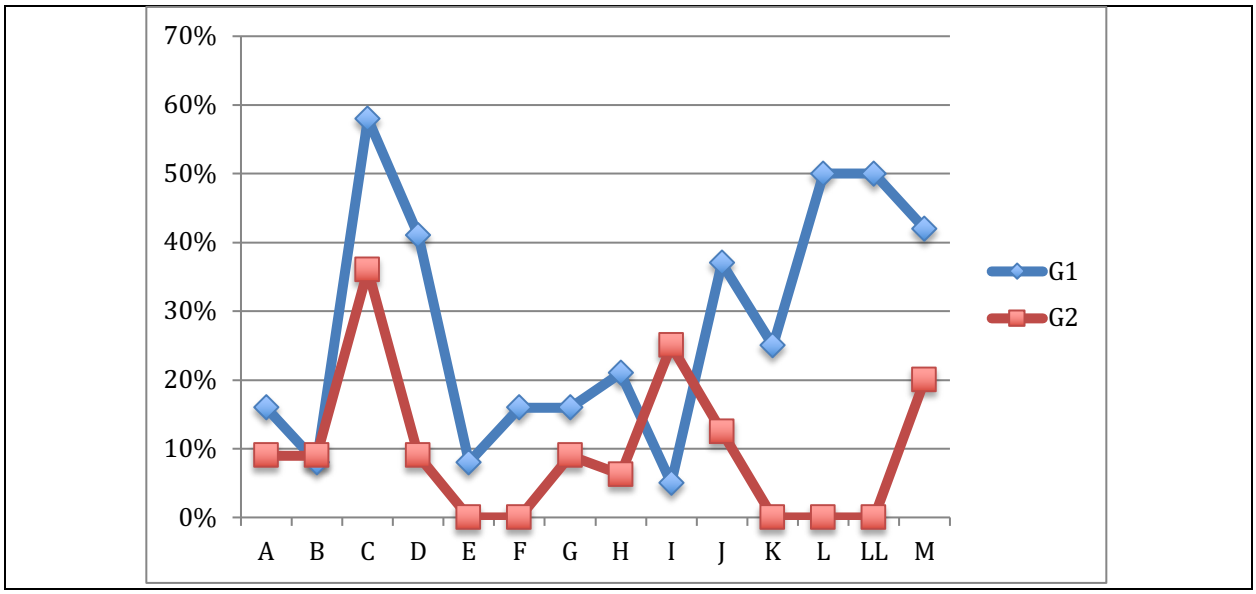


Gráfico 1 : Comparación entre los grupos G1 y G2

Resultados

Con los datos obtenidos en la *Tabla 1* se confeccionó el *Gráfico 1*, donde se puedo observar claramente que la poligonal correspondiente al grupo G2, (de color rojo) está por debajo de la del grupo G1, es decir cometió menor cantidad de errores el grupo G2 (de color rojo).
En todas las categorías donde los alumnos brindaron respuesta, el grupo G2, que aprobó AyGA con examen final, (indicado en color rojo) tuvo un mejor rendimiento académico. La única excepción

observada, corresponde al proceso de normalizar un vector. Allí el rendimiento de G1, alumnos que aprobaron con exámenes pre-parciales, fue superior.
El grupo G2, correspondiente a los alumnos que aprobaron AyGA mediante examen final, cometió errores con un promedio de porcentajes inferiores al 10 %, en la mayoría de las categorías analizadas exceptuando tres, con un 24,5%. Por otro lado, G1 cometió errores con un promedio de porcentajes inferiores al 30%.

Donde se encontraron las mayores diferencias entre ambos grupos fue en aquellas categorías que resultan fundamentales para el aprendizaje de los conceptos de Cálculo II. Por ejemplo, en la categoría D, Cálculo de la Ecuación General de un plano, los alumnos que promovieron con examen pre-parcial obtuvieron 41% en porcentaje de error, en relación con el grupo que rindió examen final, que obtuvo un 9%. En la categoría J, Interpetación geométrica del producto escalar, G1 tuvo un 37% de error mientras que G2, tuvo 12,5%. También aquí las diferencia entre ambos grupos es notable.

En las categorías L, Cálculo de un vector normal a un plano, y LL, Cálculo de una recta Normal a un plano; el grupo G2 no cometió errores, mientras que G1, cometió el 50% de errores.
Se observa, además, que G2, no cometió errores en cinco de las catorce categorías. En particular las categorías Cálculo del vector Normal a un plano y Producto Vectorial entre vectores, las cuales son muy importantes para la comprensión de conceptos en Cálculo. Sin embargo G1, cometió errores en las catorce categorías.

Conclusiones

De los instrumentos analizados, y de las tablas confeccionadas, se obtienen conclusiones provisorias y acotadas a las experiencias realizadas. En la mayoría de las categorías hubo un menor porcentaje de errores en las producciones de los alumnos que aprobaron AyGA con examen final, en comparación con aquellos alumnos que promocionaron AyGA con el método de pre-parciales. La principal conclusión provisoria referida a los estudios realizados en el año 2016, es que los alumnos que aprueban por examen final han logrado competencias que les permiten aplicar lo aprendido en un nuevo contexto, en una nueva materia, en otro momento de su carrera.

En relación con la hipótesis de investigación, podemos afirmar que durante el ciclo 2016, los alumnos que aprobaron AyGA con examen pre-parcial tuvieron dificultades en la aplicación de conceptos algebraicos básicos necesarios para adquirir nuevos conceptos de Cálculo II.

Se pretende, en el ciclo académico 2017, continuar el trabajo de investigación, reforzar o rechazar las conclusiones provisorias. Los instrumentos que se utilizarán serán, nuevamente, las producciones escritas de los alumnos (evaluaciones, trabajos prácticos), preguntas y producciones planteadas en el aula virtual de la materia y preguntas orales.

Esto permitirá, si las conclusiones lo ameritan, plantear una posible solución a la problemática encontrada.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1988). La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. México: Siglo XXI.

Charnay R. (1994) "aprender (por medio de) la resolución de problemas" en Parra, C. y Saiz, I. (comps) Didáctica de la Matemática, (pp. 51-63), Paidós, Buenos Aires.

Del Puerto, S. y Seminara, S. (2010). Las concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la Geometría Analítica. Premisa, 12 (44): 25-35.

Fairstein, G. y Gyssels, S. (2004) Como se aprende. Colección "Programa Internacional de formación de Educadores Populares". Federación Nacional Fe y Alegría y Fundación Santa María. 2da reimpresión.

Schnotz, W.; Vosniadou, S.; Carretero, M. (comps.) (2006). Cambio conceptual y educación. Buenos Aires: Aique.

PROGRAMAS DE FORMACIÓN DE PROFESORES EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Jesús E. Pinto Sosa[1], Lucía Zapata-Cardona[2] ,
Liliana Mabel Tauber[3], Hugo Alvarado Martínez[4], Blanca Ruiz Hernández[5].
Universidad Autónoma de Yucatán[1], Universidad de Antioquia[2],
Universidad Nacional del Litoral[3], Universidad Católica de la Santísima Concepción[4] , Instituto Tecnológico de Monterrey[5].
(México [1,5], Colombia[2], Argentina[3], Chile[4])
psosa@correo.uady.mx, luzapata@ayura.udea.edu.co, estadisticamatematicafhuc@gmail.com, alvaradomartinez@ucsc.cl, bruiz@itesm

Resumen

En esta ocasión, la Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIEE), pretende abordar la problemática de la formación y actualización de profesores. Si bien en Latinoamérica el avance de la investigación sobre el profesor de Probabilidad y Estadística va en crecimiento constante, no es así en cuanto al conocimiento de programas y resultados de intervención para la mejora de la práctica docente en el aula. Se comparten propuestas y experiencias de implementación en cuatro países latinoamericanos, lo que permitirá documentar y difundir diferentes alternativas de interés para los profesores y responsables de la actualización o desarrollo profesional docente.

Palabras clave: formación de profesores, educación estadística, estadística, profesor de estadística, currículo

Abstract

In this paper, the Latin-American Research Network on Statistical Education (RELIEE), seeks to address the problem of teacher's training and professional development. In Latin America, the advance in research on the teacher of Probability and Statistics is growing steadily; however, it´s not the same in terms of knowledge on teacher training programs and intervention results to improve teaching practice in the classroom. We share proposals and implementation of experiences in four Latin American countries, which will allow documenting and disseminating different alternatives of interest for teachers and for those who are in charge of teachers' upgrading and professional development.

Key words: teacher education, statistics education, statistics, statistics professor, curriculum

Introducción

En los últimos 10 años, los resultados de investigación en países latinoamericanos como Argentina, Colombia, México y Chile, por citar algunos, han reportado la necesidad de la formación y actualización de los profesores en Probabilidad y Estadística, en los diferentes niveles educativos. Tal como señala Pinto

(2010), esto puede ser atribuible a la inexistencia de programas que promuevan, no sólo la actualización pedagógica general, sino también la profesionalización de la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y Estadística. Una necesidad que ha sido también reconocida por los profesores.
Por otro lado, la investigación en Iberoamérica sobre la implementación e intervención de programas de mejoramiento docente en Educación Estadística y sus resultados, es incipiente.

Nuestra comunidad educativa latinoamericana es consciente de ello y para esta ocasión correspondió explorar, conocer, analizar y discutir sobre experiencias de intervención de programas de formación y actualización de profesores en el ámbito de la Educación Estadística. El propósito de este artículo es presentar los avances de cuatro experiencias de investigación e intervención en el ámbito de la formación y actualización de profesores de Probabilidad y Estadística en Latinoamérica. Esto nos permitió conocer no sólo los fundamentos teóricos que subyacen en las propuestas, sino además, sus características de operación, valorar los resultados obtenidos, así como comprender más la práctica del profesor, sus necesidades y retos que enfrentar en los próximos años.

Ciclos formativos de actualización y formación de profesores en el desarrollo del sentido estadístico (Chile)

El Marco Curricular de Matemática de Chile actualizó su plan de formación en el eje de Datos y Azar, desplazando algunos contenidos a la educación primaria y por otro lado ampliando nuevos conceptos con mayor profundización en la educación secundaria. Frente a este escenario surgen cuestiones de desarrollo e investigación como ¿qué dificultades de argumentación y modelización en probabilidades presentan los profesores de matemática? Y ¿qué estadísticas se deben enseñar para introducir un objeto estocástico?

En la Octava región de Chile, se han llevado a cabo cinco *ciclos formativos de actualización y formación de profesores en el desarrollo del sentido estadístico*, a través de *Talleres* (originalmente conocidos como *Workshops*) cuya implementación ha tenido como base el análisis de las ideas estadísticas fundamentales para explicitar el conocimiento especializado del contenido, el razonamiento estadístico, la resolución de problemas, seguido de un análisis de los procesos estadísticos y posteriormente socializar con los profesores los conflictos semióticos puestos en juego. Los *Talleres* y módulos propuestos, se han llevado a cabo bajo el auspicio del Departamento de Matemática y Física Aplicadas de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, y dirigidos a la comunidad educativa de profesores. Los cinco ciclos formativos implementados fueron los siguientes:

1. *Taller I*-2014: Escuela de Verano en Didáctica de la Matemática. Módulos: Datos y azar y su didáctica- Tópicos de datos y azar.
2. *Taller II*-2015: Escuela de Verano en Didáctica de la Matemática. Módulos: Datos y azar y su didáctica- Tópicos de datos y azar.
3. *Taller III*-2016: Azar y Probabilidades. Módulos: Descubriendo la aleatoriedad- El lenguaje de los gráficos estadísticos- Comprensión de los significados de la Probabilidad- Instrumentos de evaluación para datos y azar- Modelos de Probabilidad en situaciones cotidianas.
4. *Taller IV*-2016: Resolución de Problemas de Probabilidad y Estadística en la Escuela. Módulos: Resolución de problemas de probabilidad- Exploración de distribuciones de medias de medias muestrales con recursos informáticos.

5. *Taller V*-2017: Estadística por Proyectos. Módulos: Estadística por proyectos en estudiantes de secundaria- Descubriendo los significados de la probabilidad- análisis exploratorio de datos con Excel- Introducción a la inferencia estadística- Foro Panel:

Alfabetización estadística y su desarrollo en la escuela. La experiencia de los *Talleres* implementados, algunos en colaboración con especialistas del grupo RELIEE, ha permitido la reflexión de un grupo de profesores de matemática en torno a la práctica docente de la enseñanza de la Probabilidad y Estadística en la escuela y de los desafíos de apropiarse de nuevos conocimientos presentes en el currículo de Estadística (Bastías, Alvarado y Retamal, 2017; Cid, Retamal y Alvarado, 2017).

Con base en los resultados obtenidos, se confirma el interés de continuar con los ciclos formativos para mejorar el desarrollo profesional del profesor de Matemática y de los aprendizajes de los estudiantes de los distintos niveles educativos en el conocimiento didáctico-estocástico; pero con la necesidad de que estos sean más extensos. Asimismo, se tiene previsto para 2018, indagar en la elaboración de un marco metodológico que permita analizar el proceso de estudio de la alfabetización estadística en jóvenes motivados y con habilidades en matemática que no han tenido las oportunidades de fortalecer sus competencias matemáticas en ambientes aleatorios.

Formación de profesores de estadística como intelectuales transformativos (Colombia)

Muchos de los profesores que actualmente tienen la responsabilidad de la enseñanza de la estadística en Colombia han sido formados bajo un paradigma técnico —énfasis en sus conocimientos, habilidades y competencias para resolver de manera eficiente e instrumental los problemas de la enseñanza (Zapata-Cardona y González Gómez, 2017)—. El profesor aprende ciertos conceptos y procedimientos estadísticos para luego reproducirlos en la enseñanza. No obstante, esta mirada técnica es restrictiva tanto en términos de la formación disciplinar como del desarrollo profesional del profesor, pues lleva consigo la visión de la estadística como una ciencia terminada, utilitarista, instrumental y *formalizante,* y el desarrollo profesional como una forma de refinar el conocimiento disciplinar. Para superar estas limitaciones, hemos incursionado en la formación, tanto inicial como continuada, de profesores de matemáticas con fundamento en las *investigaciones estadísticas* (Zapata-Cardona, 2016) que no solo centran su atención en refinar el conocimiento disciplinar del profesor sino también el conocimiento didáctico en escenarios reales (llamados crisis sociales por Skovsmose, 1999). Las investigaciones estadísticas es una propuesta de formación holística que busca impactar la acción del profesor en el aula y su pensamiento estadístico (MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011; Wild y Pfannkuch, 1999), pero al tiempo aportar a la *ciudadanía crítica*. Un ejemplo de este tipo de investigaciones está propuesto en Franklin y Mulekar (2006) quienes estudiaron las temperaturas promedio del planeta durante 100 años buscando evidencia estadística de calentamiento global. Otros ejemplos de investigaciones estadísticas están en Zapata-Cardona (2016).

En Colombia los lineamientos para el diseño de currículos institucionales de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998; 2006) contempla un componente de manejo de datos y probabilidad. No obstante, muchos profesores se sienten pobremente preparados cuando tienen que asumir este reto (Zapata-Cardona y Rocha Salamanca, 2011). Para apoyar tanto la formación inicial como continuada de profesores que enseñan estadística se diseñó dos propuestas de formación que se han venido implementando y refinando en los últimos cuatro años y que se describen a continuación.

Seminario de didáctica de la estadística. Este es un curso en la modalidad de seminario en el cual los profesores en formación avanzan por investigaciones estadísticas fundamentadas en situaciones críticas de la sociedad (producción de basuras, cambio climático, indicadores de pobreza etc...) para robustecer la comprensión de conceptos estadísticos en contextos particulares (Pfannkuch, 2011) y generar reflexiones sobre el componente didáctico. Además, los profesores en formación diseñan investigaciones estadísticas para la escuela primaria y secundaria. El seminario tiene un fuerte componente teórico, pero también un importante componente práctico.

Formación de profesores de estadística en ejercicio. Los profesores en ejercicio participan en investigaciones estadísticas pero su gran desafío es diseñar, implementar, evaluar y reformular esas investigaciones estadísticas. En esta propuesta hay un fuerte componente de discusión y reflexión con los pares académicos. Es una propuesta de trabajo colaborativo en la cual los profesores asumen conjuntamente las tensiones de su práctica y proponen soluciones de naturaleza didáctica como una comunidad de práctica (De Oliveira Souza, Lopes, y Pfannkuch, 2015).

Razonamientos de profesores de matemática asociados a las ideas de aleatoriedad y modelo (*Argentina*)

En Argentina, a partir de 2011, se inició una reforma en el Nivel Secundario (NAP, 2006), la misma promueve el trabajo con datos y con modelos desde la construcción de un sentido crítico de los mismos y basado en el trabajo con proyectos multidisciplinarios (NIC, 2016). Como consecuencia, surge la necesidad de brindar formación a los profesores de Matemática que, en su mayoría, han recibido una enseñanza escasa o nula en el área. Es así que, al momento de diseñar una propuesta de formación, hemos considerado algunas problemáticas detectadas en diversas investigaciones previas que dan cuenta de:

- las concepciones inadecuadas de los profesores en relación con la aleatoriedad y los modelos asociados (Tauber, 2014),
- los errores, dificultades y, en ocasiones la falta de conocimiento que presentan los profesores en relación con conceptos del análisis de datos (Pfannkuch, 2007),
- el enfoque de los libros de texto, centrado en procedimientos y algoritmos (Pomilio, Miño, Brignone y Pérez, 2016).

A partir de estos resultados se diseñó tres propuestas de formación para profesores de Matemática, a las cuales nos referiremos a continuación:

1. Curso de extensión a distancia "*Alfabetización Estadística en la escuela obligatoria* argentina" (Cravero, Redondo y Tauber, 2012), desarrollado virtualmente a través del Centro Multimedial de Educación a Distancia de la Universidad Nacional del Litoral. Fue la primera experiencia que permitió a los cursantes elaborar proyectos estadísticos para el Nivel Secundario, centrados en las ideas fundamentales de: Distribución, Datos, Variables y Resúmenes estadísticos.

2. *Módulo de Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística* (EPE) es un módulo obligatorio, bimestral y virtual (INFD y Tauber, 2015; Tauber y Redondo, 2016), que se desarrolla en el marco de una Especialización Docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria y que depende del Instituto Nacional de Formación Docente (INFD). El propósito de este módulo fue el de facilitar un recorrido de reflexión pedagógica y de producción crítica que

permitió a los cursantes fortalecer su formación en torno a conceptos estocásticos y a su implementación didáctica.

3. En 2018 se iniciará el desarrollo de dos módulos, que se dictarán en el marco de una Especialización en Didáctica de la Matemática. Los mismos pretenden abordar: la construcción del sentido estocástico, las particularidades de la elaboración, contrastación y validación de conjeturas y, el problema de la falta de articulación entre los conceptos probabilísticos y estadísticos.

La enseñanza de la Estadística con proyectos a nivel universitario (*México*)

En México, las investigaciones o la publicación de los resultados sobre programas de actualización con profesores de Probabilidad y Estadística, tanto en educación media superior o superior, son poco conocidos. Diferentes estudios han dado cuenta de las necesidades específicas de actualización de profesores en esto niveles educativos (ej. Leiria, González y Pinto, 2015; Pinto, Andueza, Canto, 2016). Con base en lo anterior, a mediados de 2015 se inició el estudio *Estadística con proyectos (EstPro)*, cuya finalidad última es definir e implementar un programa de formación y actualización docente a través de la *EstPro*. Algunos resultados de la investigación pueden verse en Flores y Pinto (2017). El sustento teórico y conceptual de *EstPro* recae en los estudios de Wild y Pfannkuch (1999), Burgess (2008), las recomendaciones emitidas en la *Guía para la evaluación y la enseñanza de la educación Estadística* (GAISE por sus siglas en inglés) por Franklin, et al (2007); así como las orientaciones del *Proyecto Internacional sobre Alfabetización Estadística* (ISLP, por sus siglas en inglés, disponible en: https://iase-web.org/islp/).

De 2016 a 2017, se han implementación tres talleres de actualización con profesores en ejercicio, cuya finalidad ha sido presentarles los elementos para trabajar la *EstPro* en sus aulas. Esto ha permitido identificar y comprender más el *conocimiento en uso* que tienen los profesores, así como las necesidades específicas de actualización. Producto de este trabajo, surgió la *Guía para el diseño de proyectos en Estadística*, cuya versión actual ha sido mejorada a partir de los comentarios de los propios docentes. Actualmente se está diseñando varios trayectos formativos, a modos de diplomados, que ofrezcan alternativas dirigidas a docentes en ejercicio y que deseen mejorar y profesionalizar más la enseñanza de la Probabilidad y Estadística. Se trata de ciclos de talleres, cuyos itinerarios de aprendizajes tendrán como características: a) problematización a partir situaciones hipotéticas y reales de enseñanza y aprendizaje, b) trabajo colaborativo, c) revisión de experiencias e informes, y d) reflexión sobre la práctica docente. Se estima que comience su implementación en 2018, y de manera gradual se ofrezca bajo la modalidad presencial, mixta y no presencial.

Conclusión

La preocupación por generar espacios de formación y actualización de profesores en los 4 países de América Latina se ha visto reflejada en nuestro grupo de discusión. Desde diferentes perspectivas, las propuestas no sólo se enfocan a la adquisición de conocimientos de manera aislada y compartamentalizada, sino también al énfasis en los diferentes elementos que caracterizan el razonamiento estadístico y el sentido estocástico, y que subyacen y sostienen al conocimiento abstracto; tales como la vinculación entre el sentido práctico y teórico de la probabilidad, el enlace entre la estadística y la

probabilidad, la importancia del contexto y la oportunidad de retomar escenarios reales de nuestro entorno, la validación de conjeturas y un constante transitar entre el trabajo con los datos y la construcción de modelos.

El uso de recursos como la resolución de problemas, las investigaciones estadísticas o los proyectos estadísticos pretenden la discusión y comprensión de conceptos estadísticos más allá de su propia definición.
Las propuestas también tienen en común el enriquecimiento de la experiencia de aprendizaje de los profesores con un ambiente que propicia la reflexión sobre la forma en que están adquiriendo el conocimiento. En una relación de recíproca retroalimentación, se busca que los profesores no sólo mejoren su razonamiento estadístico sino también su actividad docente dentro del aula.

Las propuestas aquí descritas se caracterizan por una reflexión profunda de los expositores basada en los resultados de investigación en didáctica, pero también en su experiencia como formadores de profesores y profesores de estadística. Esto, a su vez, genera mayores aportes a la investigación en didáctica de la estadística y a la formación y desarrollo profesional de profesores. Sin embargo, la experiencia vivida dentro del grupo de discusión con los profesores asistentes reflejó una necesidad muy grande de una mayor difusión de estas propuestas para que puedan ser implementadas tanto en las diversas ciudades, como en esos lugares remotos con escasos recursos y medios de comunicación, que abundan en nuestra América Latina.

Referencias bibliográficas

Bastias, H. Alvarado, H. y Retamal, L. (2017). Explorando el significado intuitivo de probabilidad en profesores de matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics throught investigations. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education.* Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI y IASE.

Cid, N., Retamal, P. y Alvarado, H. (2017). Un estudio inicial sobre conocimientos de probabilidad binomial en profesores de matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Cravero, M.; Redondo, Y. y Tauber, L. (2012). *Alfabetización Estadística en la escuela secundaria obligatoria argentina.* CEMED: Universidad Nacional del Litoral.

De Oliveira Souza, L., Lopes, C. E., y Pfannkuch, M. (2015). Collaborative Professional Development for Statistics Teaching: A Case Study of Two Middle-School Mathematics Teachers. *Statistics Education Research Journal, 14*(1), 112-134.

Flores, A. y Pinto, J. (2017). Características de la enseñanza de la Estadística por proyectos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 30. CLAME.

Franklin, C., y Mulekar, M. (2006). Is Central Park warming? *Mathematics Teacher, 99*(9), 600-605.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y otros. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Instituto Nacional de Formación Docente y Tauber, L. (2015). *Módulo de enseñanza de la probabilidad y estadística. Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística*. Especialización docente de Nivel Superior en la Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Instituto Nacional de Formación Docente y Tauber, L. (Enero, 2016). Ministerio de Educación de la Nación. Núcleos de Aprendizaje Prioritarios.

Instituto Nacional de Formación Docente y Tauber, L. (Abril, 2016). Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. Núcleos Interdisciplinarios de Contenidos.

MacGillivray, H., y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading, *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study* (págs. 109–120). Springer Science+Business Media. doi:10.1007/978-94-007-1131-0_14

Ministerio de Educación Nacional . (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Santa Fe de Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: MEN.

Leiria, A., González, M. y Pinto, J. (2015). Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico. *PNA Revista de investigación en didáctica de la matemática*, 10 (1), pp. 25-52. Disponible en: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Leiria2015PNA10(1)Cononocimiento.pdf . ISNN 1887-3987 (en línea).

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación.* Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca, España.

Pinto, J., Andueza, Z. y Canto, P. (2016). Uso de la evaluación formativa en temas de estadística. *Debates en Evaluación y Currículum*/ Congreso Internacional de Educación Evaluación, 2 (2), pp. 2878-2888. Disponible en: http://posgradoeducacionuatx.org/pdf2016/C087.pdf. ISSN: 2448-6574 (en línea).

Pfannkuch, M. (2007). Year 11 students' informal inferential reasoning: a case study about the interpretation of box plots. *Mathematics Education. V. 2, N. 3, 149 -167.*

Pfannkuch, M. (2011). The Role of Context in Developing Informal Statistical Inferential Reasoning: A Classroom Study. *Mathematical Thinking & Learning , 13*(1/2), 27-46. doi:10.1080/10986065.2011.538302

Pomilio, C.; Miño, M.; Brignone, N y Pérez, A. (2016). Análisis de actividades sobre estadística descriptiva en libros de educación media: ¿Qué se pretende que los estudiantes aprendan? *Educacao Matematica Pesquisa. Revista do programa de Estudios Pos-Graduados em Educacao Matemática*.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* (P. Valero, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994).

Tauber, L. (2014) Argumentos utilizados por profesores de matemática para explicar conceptos asociados a la idea de aleatoriedad. En: *Memorias IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos*. Cartago, Costa Rica.

Tauber, L. y Redondo, Y (2016). Propuesta de formación virtual en enseñanza de la Estadística y la Probabilidad para profesores de matemática en ejercicio. En: *Actas de XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Valparaíso, Chile.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review, 67*(3), 223–265.

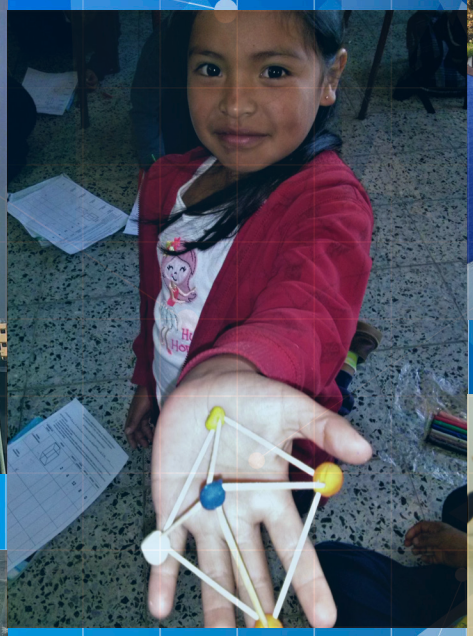
Zapata Cardona, L. (2016). ¿Estamos promoviendo el Pensamiento Estadístico en la enseñanza? 2° Encuentro Colombiano de Educación Estocástica, Bogotá, agosto 10 al 12, 2016.

Zapata-Cardona, L. y González Gómez, D. (2017). Imágenes de los profesores sobre la estadística y su enseñanza. *Revista Educación Matemática*, 29, (1), 61-89.

Zapata-Cardona, L., y Rocha Salamanca, P. (2011). Actitudes de profesores hacia la estadística y su enseñanza. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática - CIAEM.* Recife.

SECCIÓN 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS



EVALUACIÓN DEL PAQUETE *VILCRETAS* UNA PERCEPCIÓN DOCENTE

Enrique Vílchez Quesada
Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica).
enrique.vilchez.quesada@una.cr

Resumen

La cátedra del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* materia del plan de estudios de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la UNA, se ha propuesto el importante reto de incorporar el uso de software en la docencia. En este sentido se programó en el año 2016 un paquete denominado "*VilCretas*". *VilCretas* es una biblioteca que provee herramientas de uso fácil para impartir un curso de matemática discreta aprovechando las notables fortalezas computaciones del software *Wolfram Mathematica*. En este contexto, se realizaron dos talleres de uso de *VilCretas*, que sirvieron de base para aplicar un diferencial semántico con el objetivo de rescatar la percepción de veinte docentes participantes, sobre las fortalezas y debilidades de este recurso.

Palabras clave: matemática, discreta, software, *VilCretas*, evaluación

Abstract

The chair of the course *EIF-203 Discrete Structures for Information Technology,* which is a subject of the Engineering of Information Systems degree course curriculum, at the National University of Argentina (UNA), has proposed the important challenge of including the use of software in teaching. In this sense, a package called "*VilCretas*" was programmed in 2016. *VilCretas* is a library that provides user-friendly tools to teach a discrete-mathematics course taking advantage of the remarkable computational strengths of *Wolfram Mathematics* software. In this context, two workshops were held for the use of *VilCretas*, which served as a basis for applying a semantic differential with the aim of recovering the perception of twenty participating teachers, about the strengths and weaknesses of this resource.

Key words: mathematics, discrete, software, *VilCretas*, evaluation

Introducción

El curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* es una materia integrada en la malla curricular de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de Costa Rica. Durante años, ha venido mostrando una baja promoción estudiantil clasificándose como un curso problemático donde los alumnos manifiestan diversas dificultades de aprendizaje (Vílchez, 2014). Las razones de ello, se circunscriben en varias dimensiones: conocimiento abstracto que aborda, metodologías de enseñanza, cantidad de ejes temáticos a desarrollar, bases teórico conceptuales de la población estudiantil, entre otras.

Se reconoce en la educación matemática una tarea de alta complejidad, cuando lo que se espera de ella, es un aporte directo en el desarrollo de habilidades y destrezas hacia la resolución de problemas y la toma de decisiones (Ramírez, Juárez y Remesal, 2012). La cátedra del curso *EIF-203*, se ha propuesto, por tanto, desde el año 2012, el importante reto de incorporar el uso de software como un elemento sustancial en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El curso *EIF-203* constituye un compendio de ejes temáticos vinculados de forma directa con la matemática finita y dados los diferentes tipos de investigaciones que apuntan a la necesaria transformación de las metodologías utilizadas en la didáctica de este campo de conocimiento matemático (Favieri, Scorzo, Williner, Blas, Gaspoz, Herrera, entre otros autores), se ha hecho plausible la inserción del conocido software comercial *Wolfram Mathematica* en un advenimiento de experiencias educativas que actualmente han delimitado con toda claridad, sus posibles alcances y limitaciones en función de dos factores principales: el tiempo disponible y la significativa cantidad de contenidos del curso *EIF-203*.

Con la intención de lograr un adecuado balance en esta dirección, se programó en el año 2016 un paquete de software denominado "*VilCretas*". El paquete pretende convertirse en una solución alternativa, proporcionando herramientas de uso fácil sin perder las notables fortalezas computaciones del programa *Wolfram Mathematica*. En este contexto, se realizaron dos talleres de uso de *VilCretas*: uno en la Escuela de Informática de la UNA en el mes de enero del año 2017 y el otro en el marco del *III Simposio Internacional de Matemática Educativa* durante el mes de febrero de ese mismo año en la Facultad de Educación de la Universidad de Costa Rica (Vílchez, 2017). Estas actividades académicas sirvieron de base para aplicar un diferencial semántico con el objetivo de rescatar la percepción de veinte docentes participantes, sobre las fortalezas y debilidades del paquete *VilCretas* con miras a adoptar una metodología asistida por computadora, en un curso introductorio de matemática discreta. La presente propuesta comparte los resultados obtenidos.

Matemática asistida por computadora

La matemática asistida por computadora es una tendencia relativamente nueva en la didáctica de esta disciplina. Durante las últimas dos décadas la influencia de los cambios tecnológicos en la sociedad, ha permeado claras intenciones de develar el rol que deberían de cumplir las computadoras, los docentes y los estudiantes en una amalgama de posibilidades pedagógicas con resultados muy diversos. Lo que resulta coincidente en muchas experiencias y trabajos de investigación a este respecto, apunta al reconocimiento de la tecnología con fines educativos, como un medio potenciador de escenarios de enseñanza y aprendizaje interactivos, donde el estudiante puede asumir un papel más protagónico. Crespo (2007), así lo describe:

> La computadora constituye en estos momentos uno de los medios más relevantes producto del desarrollo tecnológico alcanzado; el educando y el profesor se encuentran frente a un medio interactivo como nunca antes, dotado de imágenes, sonidos, videos y textos, que le brindan toda la información necesaria. (p. 47)

El uso de la tecnología con un fin en sí misma, ha sido testigo de los fracasos más rotundos en loables proyectos educativos, donde la principal preocupación se consagró en el abastecimiento de computadoras,

software y acceso a Internet. Si bien estos recursos son indispensables, lo esencial no reside en ellos, sino en el diseño pedagógico que configura la forma en cómo se utilizan estos medios para alcanzar aprendizajes más significativos. Villanueva (2005) lo expone: "existe … la necesidad de realizar estudios e investigaciones que garanticen el desarrollo de las funciones pedagógicas y didácticas a través de la introducción de estas poderosas tecnologías" (p. 702).

En la educación matemática las tecnologías bien empleadas, pueden nutrir los procesos de enseñanza y aprendizaje con refrescantes espacios de naturaleza experimental. Ya no es necesario solo transmitir el conocimiento matemático, muchos programas de software facilitan la creación de simulaciones, visualización de propiedades y conceptos e inclusive manipulación de objetos, antes intangibles (Rodríguez y Quiroz, 2016). Las innovaciones procuradas en mejora de la cátedra del curso *EIF-203* mediante el uso del software *Wolfram Mathematica* y el paquete *VilCretas*, parten de esta premisa.

El paquete de software *VilCretas*

VilCretas es una librería creada por el autor de esta propuesta en el año 2016, como parte de las tareas en un proyecto de investigación en docencia titulado: "*VilCretas* un recurso didáctico a través del uso del software *Mathematica* para el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*", adscrito a la Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica.

Es un paquete informático que añade al software comercial *Wolfram Mathematica* 228 funciones para abordar las áreas de contenido principales de un curso introductorio de matemática discreta, a saber: recursividad, relaciones de recurrencia, análisis de algoritmos, relaciones binarias, teoría de grafos, teoría de árboles, máquinas y autómatas de estado finito y, lenguajes y gramáticas. *VilCretas* se diferencia de otras herramientas computacionales disponibles en el mercado, por las siguientes razones (Vílchez, 2016):

- Transforma temas áridos en posibilidades de visualización y manipulación conceptual, mediante la generación de objetos dinámicos denominados *CDF's* (documentos en formato computable). Los *CDF's* se caracterizan por ser elementos de ejecución dinámica, donde un alumno mediante simples deslizamientos, o cambio de valores en campos de texto, puede experimentar visualmente el significado de definiciones, propiedades y teoremas en distintos ejes temáticos de la matemática finita.
- Proporciona comandos de uso fácil sin requerir un conocimiento profundo del lenguaje de programación *Wolfram*. Este aspecto es muy importante, pues usualmente en cursos de matemática a nivel universitario, se torna muy compleja la faena de abordar los contenidos teórico-prácticos y simultáneamente enseñar a la población estudiantil a programar en el lenguaje de interés.
- Brinda instrucciones que facilitan la generación de objetos con magnitudes reales a través del uso de los datos geográficos ya integrados dentro de las características del software *Wolfram Mathematica*.
- Es un paquete diseñado con fines didácticos por lo que provee al alumno de herramientas de auto aprendizaje. El estudiante con solo invocar ciertos comandos puede automáticamente recibir paso a paso el detalle de la ejecución de ciertos algoritmos clásicos de matemática discreta, permitiéndole revisar lo que haya resuelto previamente con recursos más tradicionales.
- Se logró conciliar conflictos manifestados en diferentes ambientes dentro del software *Wolfram Mathematica*, para trabajar la teoría de grafos, la teoría de árboles y, las máquinas y autómatas de

estado finito. Particularmente, se concilió el uso del paquete "*Combinatoria*" de *Mathematica* con el empleo del *Wolfram System* (estos dos entornos no son compatibles por defecto y en *VilCretas* se logró alcanzar dicha armonía de naturaleza técnica).

VilCretas bajo esta perspectiva, ofrece un abanico de opciones informáticas que adecuadamente empleadas en un marco de acción educativo integral, podría fortalecer el empleo exitoso de una metodología asistida por computadora.

Evaluación de software educativo

El análisis derivado como producto del presente trabajo, se centra en determinar fortalezas y debilidades del paquete de software *VilCretas*, en un proceso con una intencionalidad directa de evaluación de software educativo. Un software educativo según Aguilar, Ayala, Lugo y Zarzo (2014) es: "*un conjunto de recursos informáticos diseñados con la intensión de ser utilizados en contextos de enseñanza-aprendizaje*" (pp. 77-78). *VilCretas* entra dentro de esta clasificación, ubicándose como un medio de apoyo en la docencia y en el aprendizaje de la matemática discreta.

La evaluación de software es un proceso consistente con la búsqueda de calidad y congruencia (Chavarría y Fallas, 2009) bajo estándares que dinamicen un ciclo de desarrollo en mejoramiento continuo, o bien, justifiquen la empleabilidad de los recursos informáticos ante ciertas necesidades educativas bien identificadas. Tal es el caso, del curso *EIF-203* y los retos didácticos que presenta desde hace varios años. De allí la importancia de haber iniciado fases de evaluación del paquete *VilCretas*, en esta oportunidad, utilizando como base la percepción de un grupo de profesores usuarios de la herramienta.

Percepción docente a través de un diferencial semántico

En el mes de enero del año 2017 se realizó un taller de uso del paquete *VilCretas* en el seno de la Escuela de Informática de la UNA, invitándose a profesores de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información, docentes de la cátedra del curso *EIF-203* y profesores de matemática de distintas instituciones de educación superior, entre ellas: el Instituto Tecnológico de Costa Rica, la Universidad Técnica Nacional y la Universidad de Costa Rica. Además, dicha experiencia se replicó en un taller ofrecido como parte de las actividades académicas del *III Simposio Internacional en Matemática Educativa*, auspiciado por la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. Al finalizar cada uno de los talleres, se aplicó un instrumento para rescatar la percepción de los veinte profesores participantes sobre fortalezas y debilidades del paquete *VilCretas*.

El instrumento se caracterizó por usar la técnica de diferencial semántico, seleccionada por los objetivos de naturaleza afectiva y de opinión en cuanto a la eficiencia de *VilCretas* como un recurso para impartir cursos introductorios de matemática finita. Madrid (2007) conceptualiza un diferencial semántico como: "*una técnica que sirve para percibir el grado y el significado afectivo, subjetivo o connotativo de los conceptos, objetos y, en general, de los eventos por medio de adjetivos o descriptores*" (p. 3).

En la presente investigación se emplearon dieciséis adjetivos bipolares apoyados en un diferencial semántico propuesto por Meza y Azofeifa (2010) el cuál fue validado a través de once expertos y el uso del coeficiente *Alfa de Cronbach*. Los autores midieron en su estudio la actitud hacia la matemática en estudiantes de matemática general. Se asumió un instrumento similar pues con el presente trabajo, se pretendió medir la disposición de un grupo de docentes hacia el paquete *VilCretas* como un recurso de mediación pedagógica.

Los adjetivos se cuantificaron en una escala del 1 al 7, siendo 1 el extremo negativo y 7 el extremo positivo. El análisis e interpretación de datos se sustentó en las categorías expuestas por Meza y Azofeifa (2010), donde si p representa un peso sobre la elección del participante, entonces: $1 \leq p < 2$ muestra una percepción muy negativa, $2 \leq p < 3$ moderadamente negativa, $3 \leq p < 4$ negativa baja, $4 \leq p < 5$ positiva baja, $5 \leq p < 6$ positiva moderada y $6 \leq p \leq 7$ percepción muy positiva. La tabla 1 describe los resultados obtenidos en la muestra de los veinte profesores.

Tabla 1. VilCretas como recurso para la enseñanza y el aprendizaje

Adjetivos bipolares	Media	Desviación estándar	Interpretación
Inútil-Útil	6.40	1.04	**Muy positiva**
Difícil-Fácil	5.30	1.08	Positiva moderada
Aburrido-Divertido	5.55	1.05	Positiva moderada
Confuso-Claro	5.20	1.07	Positiva moderada
Frustrante-Motivador	5.80	1.07	Positiva moderada
Estresante-Relajante	5.45	1.41	Positiva moderada
Complicado-Sencillo	5.75	1.16	Positiva moderada
Innecesario-Necesario	5.3	1.51	Positiva moderada
Desagradable-Agradable	6.1	1.02	**Muy positiva**
Irrelevante-Relevante	5.95	1.31	Positiva moderada
No formativo-Formativo	6.0	1.29	**Muy positiva**
No entendible-Entendible	6.35	0.93	**Muy positiva**
Inaplicable-Aplicable	6.05	1.09	**Muy positiva**
Inadecuado-Adecuado	6.0	1.12	**Muy positiva**
Incompleto-Completo	6.30	0.86	**Muy positiva**
Negativo-Positivo	6.30	1.03	**Muy positiva**

Fuente: Diferencial semántico aplicado a la muestra.

Se destaca en la tabla 1 interpretaciones únicamente "muy positivas" y "positivas moderadas" en todas las respuestas de la muestra, esto indica una percepción general bastante favorable hacia el paquete *VilCretas* como herramienta de software educativo en la matemática discreta. Resaltan las percepciones muy positivas en los siguientes aspectos: útil, agradable, formativo, entendible, aplicable, adecuado, completo y positivo. Dentro del diferencial semántico, también se incluyó, una sección con la finalidad de valorar un glosario de comandos creado con la principal intención de guiar al usuario en el uso del paquete *VilCretas*. Este glosario se encuentra alojado en: http://www.escinf.una.ac.cr/discretas/index.php/glosario-de-vilcretas y los resultados de percepción se resumen en la tabla 2.

Tabla 2. El glosario de comandos de VilCretas es …

Adjetivos bipolares	Media	Desviación estándar	Interpretación
Inútil-Útil	6.35	1.13	**Muy positiva**
Confuso-Claro	5.95	1.14	Positiva moderada
Complicado-Sencillo	5.85	1.18	Positiva moderada
Desagradable-Agradable	6.15	1.03	**Muy positiva**
Irrelevante-Relevante	5.95	1.19	Positiva moderada

Fuente: Diferencial semántico aplicado a la muestra.

A este respecto, todas las valoraciones fueron "muy positivas" y "positivas moderadas", destacándose en el primer grupo un glosario de comandos: útil y agradable. En el instrumento se adjuntaron, además, dos preguntas abiertas planteadas a los profesores para determinar fortalezas y debilidades puntuales del paquete *VilCretas*. Éstas se resumen en las categorías expuestas en la tabla 3.

Tabla 3. Percepción docente

Fortalezas	Debilidades
Plasma, puntualmente, tópicos de la matemática discreta de manera completa.	El software *Mathematica* no es de uso libre.
Genera conocimiento a través de un aprendizaje constructivo.	El lenguaje *Wolfram* tiene ciertas dificultades para un aprendizaje rápido en la población estudiantil.
Unifica un enfoque tradicional complementado con otro asistido por computadora.	Este tipo de metodología podría consumir mucho tiempo de clase.
Refuerza la comprensión de conceptos, propiedades y algoritmos.	Algunos comandos poseen muchos atributos, en algunos casos, innecesarios.
Reduce la complejidad sintáctica del software *Mathematica*.	Puede generar dependencia en los estudiantes, al resolver procedimientos complejos de una forma tan sencilla.
Ahorra tiempo para realizar ciertos procesos de	Se debe encontrar un balance entre lo teórico-

enseñanza en clase.	práctico y el uso de software.
Motiva al estudiante con la presentación de animaciones y posibilidades de exploración dinámica.	Algunas instrucciones de *VilCretas* requieren tener conexión a Internet.
VilCretas es aplicable para el estudio de modelos reales.	Se sugiere introducir al estudiante en el empleo de *Mathematica* para posteriormente usar el paquete.
Permite resolver problemas rápida y eficazmente, evitando una sobrecarga con el uso directo del lenguaje de programación *Wolfram*.	
El paquete está en idioma español.	

Fuente: Diferencial semántico aplicado a la muestra.

Conclusiones

La evaluación del paquete *VilCretas* a través de la percepción de un grupo de docentes participantes en dos talleres distintos, ha arrojado resultados muy positivos sobre las actitudes que éstos manifiestan hacia el uso de *VilCretas* para apoyar la docencia en cursos de matemática discreta.

En general, el paquete brinda un aporte esencial como herramienta de software resaltándose su utilidad, completitud y aplicabilidad en un laboratorio de informática. Además, los profesores consideran a *VilCretas* un recurso motivador capaz de servir de plataforma hacia la búsqueda de experiencias de aprendizaje exploratorias y un robustecimiento en la comprensión conceptual y algorítmica.

Referencias bibliográficas

Aguilar, I., Ayala, J., Lugo, O. y Zarzo, A. (2014). Análisis de criterios de evaluación para la calidad de los materiales didácticos digitales. *Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad*, *9*(25), 73-89.

Blas, M., Gaspoz, C y Herrera, M. (Junio, 2009). MatDis: Aplicación de apoyo para Matemática Discreta. En M. Marciszack (Presidencia), 3º Congreso Nacional de Estudiantes de Ingeniería en Sistemas de Información (CNEISI). Congreso llevado a cabo en la Facultad Regional San Francisco, Universidad Técnica Nacional, Argentina.

Chavarría, J. y Fallas, J. (2009). Validación del software educativo Poliestudio 1.0: Informe de investigación. *Revista Educare, 13*(2), 37-45.

Crespo, E. (2007). Modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadora (Tesis de doctorado). Universidad de Ciencias Pedagógicas Félix Varela Morales, Cuba.

Favieri, A., Scorzo, R. y Williner, B. (Abril, 2014). Nuevas tecnologías: Aplicaciones en la enseñanza de la matemática y formación de profesores. En M. Rodríguez (Presidencia), Seminario sobre TIC y Matemática.

Simposio llevado a cabo en la Universidad Nacional General de Sarmiento, Argentina.

Madrid, J. (2007). Aplicación del diferencial semántico para la evaluación de calculadoras. Recuperado el 12 de mayo de 2017, de: http://fido.palermo.edu/servicios_dyc/encuentro2007/02_auspicios_publicaciones/actas_diseno/articulos_pdf/A7002.pdf

Meza, L. y Azofeifa, R. (Mayo, 2010). Actitud hacia la matemática de las y los estudiantes del curso Matemática General en el ITCR: análisis general y por género. En J. Ávila (Presidencia), II Congreso Internacional Computación y Matemática. Congreso llevado a cabo en la Universidad Nacional, Costa Rica.

Ramírez, J., Juárez, L. y Remesal, M. (2012). Teoría de la actividad y diseño de cursos virtuales: la enseñanza de matemáticas discretas en Ciencias de la Computación. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, 9*(1), 320-339.

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 99-124.

Vílchez, E. (2014). Estrategias de enseñanza para el curso *EIF-203 Estructuras discretas para informática* a través del uso de las redes sociales *Facebook* y *Twitter*. *Revista Educare*, *18*(2), 39-70.

Vílchez, E. (Octubre, 2016). *VilCretas* package: educational resource through the use of Mathematica software in the field of discrete mathematics. En S. Wolfram (Presidencia), Wolfram Technology Conference. Conferencia llevada a cabo en Champaign, Illinois, USA.

Vílchez, E. (Febrero, 2017). Matemática discreta con *Mathematica* a través del uso del paquete *VilCretas*. En J. Trejos (Presidencia), III Simposio Internacional en Matemática Educativa (III SIME). Congreso llevado a cabo en la Universidad de Costa Rica, Costa Rica.

Villanueva, Yanet (2005). Tendencias actuales en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la utilización de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*(1), 701-706.

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL MEDIADA CON *PHPSIMPLEX* EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Julia Ángela Ramón Ortiz.
Colegio nacional de Huancanyacu – Huánuco. (Perú)
angelaramonortiz@gmail.com

Resumen

La enseñanza de la programación lineal está contemplada en el currículo de Educación Secundaria; sin embargo, no se llega a desarrollar a plenitud; por ello, el objetivo de la investigación fue diseñar, aplicar y evaluar la enseñanza-aprendizaje de la programación lineal mediada por la página PHPSimplex, sustentada en la teoría del aprendizaje situado. El proceso metodológico seguido fue de investigación-acción. Los resultados del trabajo experimental evidencian la eficacia de la estrategia, pues permitió organizar la información, identificar las restricciones, la función objetivo y procesar los datos con el PHPSimplex mediante el método Simplex y gráfico, a través de actividades de aprendizaje interactivo y colaborativo. En conclusión, con la estrategia y recurso utilizado se logró un aprendizaje significativo de la programación lineal.

Palabras clave: aprendizaje interactivo, programación lineal, PHPSimplex, región factible

Abstract

Linear programming teaching is included in the secondary education curriculum; however, it does not develop fully. Therefore, the objective of the research was to design, apply and evaluate the linear programming teaching-learning process by using the PHPSimplex page, based on the situated-learning theory. The methodological process followed was action-research. The experimental work outcomes show the effectiveness of the strategy, since it allowed organizing the information, identifying the restrictions, and the objective function, as well as processing the data with the PHPSimplex through the Simplex and graphic method, by using interactive and collaborative learning activities. To sum up, the paper shows that with the strategy and resource used, a significant learning of linear programming was achieved.

Key words: interactive learning, linear programming, PHPSimplex, feasible region

Introducción

La investigación en educación matemática tiene dos propósitos principales: uno, "entender la naturaleza del pensamiento matemático, y otro, la enseñanza y el aprendizaje a fin de usar tales comprensiones para mejorar la instrucción de las matemáticas"; dos, que propósitos están enmarcados dentro de la perspectiva compartida por la comunidad de investigadores, sobre la educación matemática "como un conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general, de actividades implicadas en la construcción,

representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional" (Rico, Sierra y Castro, 2000, p. 79).
Para (Watson y Mason, 2005), el aprendizaje de las Matemáticas se produce, principalmente, a través de la confrontación con ejemplos, más que a través de definiciones formales y técnicas (de hecho, afirman, es a través de los ejemplos que las definiciones cobran algún sentido, ya que las palabras técnicas matemáticas describen clases de objetos o relaciones con los que el aprendiz debe familiarizarse). Informa que la solicitud de ejemplos que satisfagan ciertas restricciones puede alentar a los estudiantes a extender su pensamiento más allá de los ejemplos "típicos". Se ve una gran fuerza en su efectividad como estrategia de enseñanza cuando los estudiantes se enfrentan a una nueva definición. Además, proponen grupos de tareas que requieran que los estudiantes generen ejemplos, combinando conceptos y propiedades en la resolución de problemas.

Todo proceso de aprendizaje se basa en actividades que realizan los estudiantes para conseguir el logro de los objetivos educativos que pretenden. Constituyen una actividad individual, aunque se desarrolla en un contexto social y cultural, que se produce a través de un proceso de interiorización en el que cada estudiante concilia los nuevos conocimientos a sus estructuras cognitivas previas. La construcción del conocimiento tiene dos vertientes: una vertiente personal y otra social. En general, para que se puedan realizar aprendizajes son necesarios tres factores básicos: *Inteligencia y otras capacidades, y conocimientos previos* (poder aprender), e*xperiencia* (saber aprender) y d*e comprensión* de vocabulario, estructuras sintácticas, etc.; pues todo aprendizaje supone una modificación en las estructuras cognitivas de los aprendices o en sus esquemas de conocimiento y, se consigue mediante la realización de determinadas operaciones cognitivas (Lave y Wenger, 1991).

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el nivel de educación secundaria, siempre acarrea muchas dificultades, para el docente, en el conocimiento de los contenidos, uso de estrategias didácticas y la integración de la tecnología; por ello, es imprescindible concebir al saber matemático (como proceso y objeto) en la construcción y estructuración del conocimiento, conducentes al logro de aprendizajes significativos, que implica: la comprensión literal de un texto, abstracción de datos desde la información, expresarlo en forma simbólica para su desarrollo en forma algebraica y gráfica con lápiz y papel, o mediado por un software matemático (Douady, 1995).

Teniendo en cuenta la realidad educativa y el uso de los recursos tecnológicos, el trabajo estuvo orientado a abordar el problema de la enseñanza-aprendizaje de la matemática dirigidos por docentes, en su mayoría, sin capacitación en contenidos matemáticos y en el uso de tecnologías para llevar a cabo un proceso educativo eficiente. Puesto que, la mayoría de los docentes son inmigrantes digitales, tienen falencias para integrar las TIC orientado al aprendizaje de los estudiantes (nativos digitales). Este problema no sólo involucra a los docentes y estudiantes de la zona rural, sino también a los del área urbana de la educación secundaria. De lo descrito, se formuló la pregunta: ¿Qué efectos produce el diseño, elaboración y aplicación de una secuencia didáctica mediado por la página PHPSimplex para la resolución de problemas en forma algebraica y gráfica, que contribuya a su aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal de la programación lineal en los estudiantes del quinto grado de secundaria de la zona rural?

Planteamiento del problema

La programación lineal es una herramienta matemática que nos permite dar solución a problemas de optimización relacionados a las actividades cotidianas de los estudiantes (agricultura, comercio, etc.), para se diseñó, aplicó y evaluó una secuencia didáctica basada en el uso de la página PHPSimplex para la resolución de problemas contextualizados a la realidad a través del método Gauss-Jordan y el método gráfico.

La propuesta didáctica, procura dinamizar la enseñanza-aprendizaje de la Programación Lineal en el quinto grado de secundaria, tendiente a evitar el fracaso en las matemáticas, a través del proceso de aprendizaje conjugando el lenguaje algebraico y gráfico en el estudio programación lineal; poniendo en práctica la enseñanza interactiva haciendo uso de recursos tecnológicos a partir del cual se puedan abordar de manera simple pero con el rigor matemático necesario, los contenidos relacionados con la resolución algebraica y gráfica de problemas de programación lineal mediada por la página PHPSimple. Explotando al máximo su velocidad y exactitud para la realización de cálculos algebraicos y gráficos.

Marco teórico

Teoría del *aprendizaje situado*, según afirman (Lave y Wenger, 1991), indica el carácter contextualizado del aprendizaje que no se reduce a las nociones convencionales de aprendizaje activo, sino a la participación del aprendiz en una comunidad de práctica; esto es, en un contexto cultural, social, en relación sinérgica con el entorno, del obtiene los conocimientos necesarios para transformar la comunidad y transformarse a sí mismo. Transformándose la concepción de los contextos de aprendizaje y de la interacción entre docentes y discentes así como una nueva visión de las relaciones de colaboración y de cooperación, entre ellos.

Esta teoría sostiene que la adquisición de habilidades y el contexto sociocultural no pueden separarse. Es decir, el aprendizaje situado es un aprendizaje de conocimiento y habilidades en el contexto que se aplica a situaciones cotidianas reales. Bajo la premisa descrita, el trabajo realizado tuvo como propósito generar una actitud positiva de los estudiantes desde el principio, que permita tanto su implicación progresiva en las tareas como el aumento de su responsabilidad, teniendo en cuenta el desarrollo de actividades dinámicas y debates matemáticos que se suscitaron en el proceso investigativo. La búsqueda de un equilibrio entre los momentos de trabajo grupal, las discusiones colectivas y sobre los resultados académicos han implicado en los estudiantes actitudes positivas al estudio y aprendizaje de la matemática en general y de la programación lineal en particular. Esta situación apoya nuestra conjetura de que es posible hacer más eficaz y eficiente las actividades de aprendizaje haciendo uso de recursos tecnológicos.

La aplicación del método de Gauss-Jordan y el método gráfico para la resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se tradujo en rectas y la intersección de rectas. La operatividad del método gráfico para resolver este tipo de sistemas consiste en representar en un sistema cartesiano ambas rectas y comprobar si se intersecan y si es así, dónde es la intersección, para ello se tiene el saber previo, que en el plano cartesiano, dos rectas sólo pueden tener tres posiciones relativas entre sí: se intersecan en un punto, son paralelos o son coincidentes; básicamente, aquí se entiende que, si se intersectan en un punto (x, y) y es la única solución del sistema; si son paralelas, no hay par ordenado, por

lo tanto no hay solución; y, si son coincidentes, entonces hay infinitos puntos y como tal infinitas soluciones.

Respecto al "saber matemáticas" distingue dos posibles actitudes del estudiante a instancia del profesor: si se dice qué hay que hacer, siendo posible comprender el enunciado del problema pero sin sugerir el método de solución, estamos considerando principalmente la matemática como herramienta; si se trata de conocer cómo las nociones están relacionadas desde un punto de vista científico cultural estamos considerando principalmente las matemáticas como objeto. Más adelante concreta "tener algún conocimiento de matemáticas" es ser capaz de emplearlo como una herramienta explícita en problemas a resolver, donde el saber matemática tiene que ver con "la disponibilidad funcional de algunas nociones y teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones" pero también, significa identificar las nociones y los teoremas como elementos reconocidos social y científicamente (Douady, 1995).

La incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) por parte del docente en sus actividades académicas, constituye sin duda, una herramienta fundamental para motivar y dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje; pues permite mejorar su actividad considerando los beneficios que trae la utilización de un software educativo, tales como: ahorro de tiempo a la hora de presentar un material o tema, mayor estética al momento de la presentación de la clase, incremento de la motivación y la atención al presentar un determinado material, aumento de la velocidad para el desarrollo de la clase entre otros beneficios (Murillo, 2015).

Los conceptos sobre el saber matemático permiten la reconstrucción de una secuencia que estuviera más acorde con la teoría de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal, tomando las nociones de generalización de soluciones y representación gráfica como elementos motivadores. De esta forma, se le dio un rol más activo a la solución de problemas en forma gráfica y se pudo producir la génesis de resultados susceptibles de institucionalización a partir del estudio de situaciones gráficas. La idea de región factible permitió recurrir a la teoría geométrica de convexidad y acotación, para generalizar resultados y construir contraejemplos a ciertas intuiciones erróneas y obstáculos que surgen al extender la noción de área al campo de figuras no acotadas.

Metodología

La metodología de investigación fue la mixta, con predominancia del paradigma cualitativo en su variante investigación-acción, que conllevó en todo momento reflexionar sobre nuestra práctica pedagógica permitiendo la administración y la solución de problemas del proceso de enseñanza-aprendizaje, desde una perspectiva metodológica participativa. Por medio de la investigación-acción, se logró formular una propuesta pedagógica alternativa, basado en un plan de acción, la misma que permitió superar los problemas detectados en el ámbito pedagógico y académico, (Tójar, 2006). Siguiendo el modelo propuesto por (Kemmis et al, 1982 y Stringer, 1999) entre las fases del diseño de investigación destacan: problema (exploración: antecedentes, teorías), observar (planificar y construir un bosquejo), pensar (implementar, analizar e interpretar), actuar (resolver problemas e interpretar mejoras) que tiene la siguiente secuencia lógica:

Exploración $\Rightarrow$ *planificación del proceso* $\Rightarrow$ *Implementación* $\Rightarrow$ *Evaluar-actuar*

Los instrumentos utilizados en la recolección de información en el proceso investigativo fueron: el diario de campo, ficha de observación, cuestionario de preguntas y la rúbrica.
Durante las actividades en el aula, los estudiantes identifican problemas resolubles de programación lineal, en actividades de enseñanza y aprendizaje de dos horas pedagógicas de acuerdo al horario de clase. En el proceso de resolución de problemas con PHPSimplex, mediante el método gráfico, el estudiante tiene la siguiente secuencia de actividades: comprensión de problema a resolver e identificar las variables de estudio, determinación de la función objetivo, número de restricciones a tener en cuenta para resolver el problema, registro algebraico de problemas de programación lineal, tipo de Optimización: Maximización o Minimización, analizar los resultados de la evaluación de las coordenadas de los vértices de la región poligonal convexa (o región factible), determinar la cantidad requerida para el proceso de maximización o de minimización (valor máximo o mínimo).

Resultados

Los resultados que se exhiben provienen de la aplicación de tres instrumentos, en una muestra de quince estudiantes del quinto grado de secundaria:

*En la rúbrica referida a la resolución de actividades sobre Programación Lineal mediados por el programa PHPSimplex***,** teniendo en cuenta los indicadores: organización de la información en una tabla, la identificación de variables, identificación de las restricciones, identificación de la función objetivo, gráfica de la región factible, optimización a realizar, identificación de los vértices de la región factible, evaluación de la función objetivo, Optimización con el PHPSimplex, y la determinación de la cantidad óptima, El calificativo que obtuvo el grupo se resume en la tabla 1.

Tabla 1. Resultado de evaluación del aprendizaje de programación lineal mediado con PHPSimplex

ESTUDIANTE	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
CALIFICATIVO	**20**	**17**	**18**	**17**	**20**	**20**	**19**	**14**	**20**	**18**	**19**	**12**	**11**	**19**	**20**
ESTADÍSTICOS	**Moda = 20, Media = 17,60, Desv.Est. = 2,971, C.V. = 16,88%**														

Fuente: Cuestionario de evaluación sobre resolución de problemas de programación lineal.

Los resultados que se exhiben en la tabla N° 1, indican que la implementación de actividades didácticas mediadas por el programa PHPSimplex influye significativamente en el proceso de aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal durante el estudio de la programación lineal, toda vez que el estudiante realiza con solvencia la identificación de las restricciones, de la región factible y el proceso de optimización; obteniendo un promedio global del grupo de 17,60, con calificación en el sistema vigesimal, una deviación estándar de 2,971 y un coeficiente de variación de 16,88%, es decir, en el grupo hubo escasa dispersión en los calificativos, que indica un nivel de logro de aprendizaje del tema por los estudiantes fue homogénea.

*Resultado del Test de Opinión***,** en las 20 preguntas de opinión (10 ítems sobre la enseñanza y 10 ítems sobre el aprendizaje) que se les formuló respecto al uso del programa PHPSimplex en el estudio de la programación lineal, mayoritariamente respondieron en forma positiva a favor del uso de este recurso tecnológico, que repercutió en el grado de motivación hacia el aprendizaje de la matemática, debido a que la interacción con la computadora para el desarrollo de tareas matemáticas les fue muy novedoso, repercutiendo en su competencia matemática. Los resultados globales obtenidos se ilustran en las figuras 1 y 2.

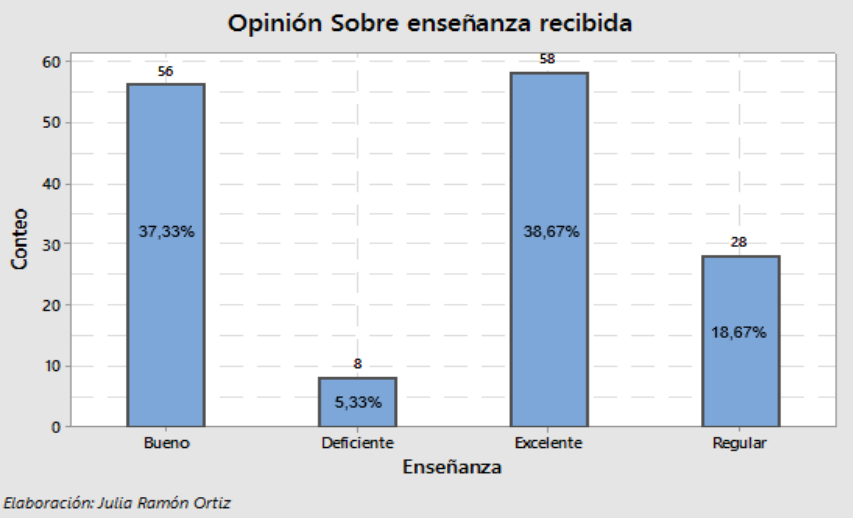


Figura 1. Gráfica de test de opinión referido al proceso de enseñanza de la programación lineal mediada por el PHPSimplex.

Del gráfico de la figura N° 1, la mayoría que representan el 38,67% de los estudiantes, consideran como excelente la enseñanza recibida de sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas y programación lineal usando el PHPSimplex; mientras que el 37,33% manifiestan que la enseñanza recibida fue buena; por otro lado el 18,67% cataloga a la enseñanza que recibió como regular, y sólo el 5,33% de los estudiantes manifestaron que la enseñanza de la profesora fue deficiente.

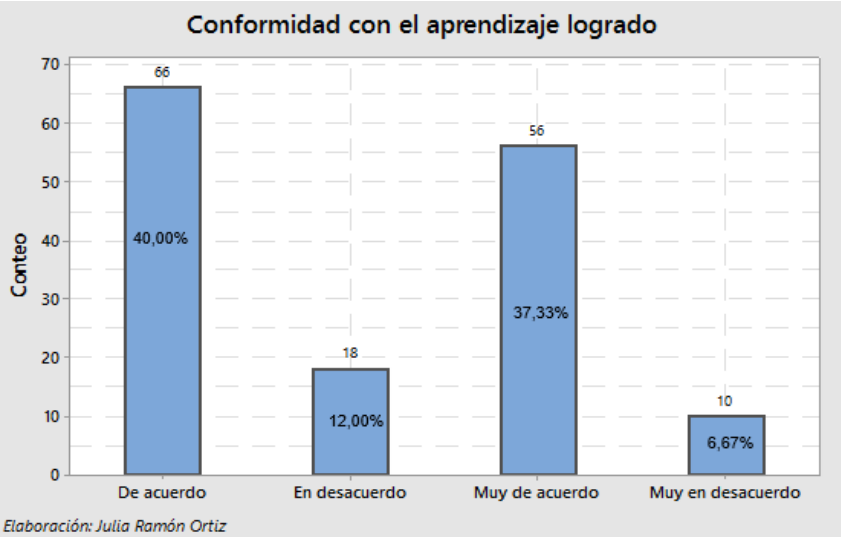


Figura 2. Gráfica de test de opinión referido al proceso de aprendizaje de la programación lineal mediada por el PHPSimplex.

Según se muestra en la gráfica N° 2, la mayoría que representan el 44,00% de los estudiantes están *de acuerdo* con su aprendizaje logrado sobre la programación lineal usando el PHPSimplex, mientras que el 37,33% manifiestan estar *muy de acuerdo* con su aprendizaje logrado; y sólo el 12,00% de los estudiantes manifestaron estar *en desacuerdo* con el aprendizaje logrado en el estudio del tema mediado por el PHPSimplex.

De los resultados obtenidos en el cuestionario de satisfacción, **e**n los ítems referidos al *Nivel de satisfacción sobre el Contenido de la Unidad de Aprendizaje y grado de Cumplimiento***,** 10 de los estudiantes que representan a la mayoría respondieron estar muy satisfechos respecto al desarrollo del tema por parte de la docente con la participación activa de los estudiantes, los cinco estudiantes restantes consideran estar satisfechos.
Respecto a la *infraestructura disponible***,** ocho de los estudiantes encuestados manifiestan estar satisfecho, cinco manifiestan estar poco satisfechos y sólo 2 nada satisfechos; debido a las restricciones no por la falencia de infraestructura, sino las respuestas que dieron los estudiantes se deben a las restricciones que se tiene para acceder al laboratorio de informática por la falta permanente de la encargada y falta de mantenimiento de los equipos de cómputo.
Respecto al *Desempeño del Profesor* en la clase de matemática haciendo uso PHPSimplex, once de los quince, mostraron su satisfacción plena puesto que fue para ellos la primera experiencia de llevar una clase de matemática haciendo uso del software matemático, en su estudio de las matemáticas; los cuatro restantes manifestaron que están satisfechos porque la profesora les explico el manejo del software para hallar el verdadero valor del ejercicio planteado.
En lo que se refieren a *su desempeño personal,* en los seis ítems planteados en esta sección, el 75% de los estudiantes encuestados consideran estar muy satisfechos, el 20% manifiestan estar satisfechos y sólo un 5%, expresa estar poco satisfecho. En global, podemos afirmar que la mayoría de los estudiantes estuvieron de acuerdo con su aprendizaje del tema de inecuaciones y programación lineal mediado por el PHPSimplex.

Conclusiones

Los resultados obtenidos fueron alentadores y fortalecedores, porque permitió el aprendizaje significativo de la programación lineal (desde los conceptos previos, exploración de la realidad, simbolización, conceptualización y la resolución de problemas). El estudiante quedó ejercitado en respetar algunas pautas en el proceso de aprendizaje de la matemática: leer con atención el problema completo; identificar lo que se pide en el problema y los datos, traducirlo al lenguaje algebraico, para luego comunicar en forma gráfica haciendo uso de una herramienta tecnológica. Asimismo, queda habituado a crear problemas contextualizados al entorno y su resolución algebraica y gráfica con la página PHPSimplex, mostrando actitudes y valores positivos hacia el aprendizaje de la matemática en forma interactiva y colaborativo, desarrollando su pensamiento creativo, con el objetivo de aprender y aplicar de una manera eficiente la resolución algebraica y gráfica de optimización.

La estrategia de enseñanza de programación lineal mediado por el PHPSimplex, permite desarrollar en forma interactivo y dinámico problemas de programación lineal (en forma algebraica y gráfica), reforzando los conceptos, los procedimientos en la resolución de problemas y desarrollando actitudes positivas hacia el aprendizaje, y mejorando en forma significativa la cultura matemática en los estudiantes del quinto grado de secundaria.
A través de la investigación se pudo verificar la creatividad, la iniciativa, las decisiones, el empeño, la valoración de resultados y la predisposición para el trabajo durante las actividades realizadas, orientados a resolver problemas de programación lineal en estudiantes del quinto grado de secundaria. Mostrando haber desarrollado destrezas y habilidades en el uso del PHPSimplex para la resolución de problemas diversos de programación lineal

Referencias bibliográficas

De Guzmán, M. y Pérez, D. (1993). *Enseñanza de las ciencias. Tendencia e Innovaciones*. Madrid: Editorial Popular, S.A.

Douady R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento.* En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (editor). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Una Empresa Docente. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Kemmis, S., Mctaggart, R. y Nixon R. (1982). *The Action Research Planner*. Deakin Australia: Victoria University, tercera edición.

Lave J, Wenger E. (1991). *Aprendizaje situado. Participación Periférica legítima.* New Yourk: Cambridge University Press.

Murillo P. (2015). *Normas y criterios para la evaluación de software educativos de matemática; 2003.* Recuperado el 15 de mayo de 2017 de http://www.utp.ac.pa/ articulos/normas criterios.htm.

Rico L., Sierra M. y Castro E. (2000). *Didáctica de la matemática. Las disciplinas didácticas entre las ciencias de la educación y las áreas curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.

Stringer E. (1999). *Action research*. Second ed. Thousand Oaks: Sage.

Tójar J. (2006). *Investigación cualitativa comprender y actuar*. Madrid: Editorial la Muralla.

Watson A., Mason, J.H. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples, Mahwah, NJ, USA,* Lawrence Erlbaum Associates; 2005.

ENFOQUE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN EN LÍNEA PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Marger da Conceição Ventura Viana, Débora Santos de Andrade Dutra
Universidade Federal de Ouro Preto-Brasil, Instituto Federal do Espirito Santo. (Brasil)
margerv@terra.com.br, deborasad@ifes.edu.br

Resumen

Se presenta una investigación acerca de la contribución del uso de la Resolución de Problemas en ambientes virtuales de aprendizaje en Educación a Distancia para la formación de profesores de matemáticas. Los participantes fueron estudiantes matriculados en la asignatura que aceptaron participar. Se emplearon artículos, cuestionarios, foros de solución de problemas, videoconferencias, chats y correo electrónico, para el aprendizaje y recogida de datos. Resultó que la propuesta proporcionó a los participantes la percepción de la importancia de resolver problemas, incentivándoles postura crítica, sin uso de procesos mecánicos y memorizados. Además les permitió reflexionar sobre su práctica profesional.

Palabras clave: resolución de problemas, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, educación a distancia, formación de profesores

Abstract

We show an investigation about the contribution of Problem Solving use in virtual learning environments in Distance Education for the training of mathematics teachers. Participants were students enrolled in the discipline who agreed to participate. Articles, questionnaires, problem-solving forums, videoconferences, chats and e-mail were used for learning and collecting data. It turned out that the proposal provided the participants with the perception of the importance of solving problems, encouraging them to be critical, without using mechanical and memorized processes. It also allowed them to reflect on their professional practice.

Key words: problem solving, teaching and learning math, distance education, teacher training

Introducción

Esta investigación ha tenido como objetivo la contribución del uso de la Resolución de Problemas en ambientes virtuales de aprendizaje para estudiantes de matemáticas, en la formación inicial de profesores, en Educación a Distancia-EAD.

Se presenta la Formación de Profesores y la Resolución de Problemas fundamentando el problema de investigación. A continuación se reflexiona sobre El aprendizaje y Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA). Aclara qué es la Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de Matemáticas a través de la Resolución de Problemas en un AVA. También se presentan los Procedimientos metodológicos y Algunos resultados encontrados. Termina con Consideraciones finales y las Referencias Bibliográficas.

Después de experimentar la Resolución de Problemas en el propio aprendizaje, los investigados desearon utilizar esta metodología con sus alumnos elaborando proyectos y trazando estrategias con esta finalidad. Aclaramos que usamos Resolución de Problemas para referirnos a la disciplina o a la teoría, y resolución de problemas para el acto de resolverlos.

Planteamiento del problema: la formación de profesores y la resolución de problemas

La formación del profesor comprende la formación inicial y la continua. La primera se refiere a la formación obtenida en el curso de graduación. La continua se refiere a la actualización de los conocimientos construidos para su desarrollo profesional. Pero, actualmente, parece que la sociedad duda en relación a la calidad de la formación inicial de profesores, como consecuencia de la exposición a la media de los resultados insuficientes de estudiantes brasileños en exámenes de amplia escala. De hecho, "en el contexto específico de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas, tenemos la vivencia, a través de investigaciones, del bajo rendimiento de los alumnos, especialmente en la resolución de problemas matemáticos" (Pires, 2002, p. 19). Sin embargo, la culpa de este insatisfactorio rendimiento le es atribuida a los profesores que, según Pires (2002), desconocen alternativas metodológicas para modificar esta coyuntura.

Este escenario indica urgencia por desarrollar trabajos e investigaciones en la búsqueda de soluciones educacionales adecuadas a la situación. Es por lo que los investigadores se han preocupado por la formación inicial, pues de esta dependen las aptitudes del futuro profesor. De la misma forma se origina nuestro interés por la formación inicial de profesores de Matemáticas (Viana, Nunes y Gomes, 2010).

En ese sentido es importante saber cómo se aprende y cómo se enseña. Muchos investigadores consideran que la resolución de problemas es un importante medio de aprender matemáticas: Polya (1945), Lester (1994), Onuchic (1999), Schoenfeld (2007), entre otros. Y según Viana (2002, p. 2), "la actividad matemática es parte esencial de casi todas las profesiones; ingeniería, comercio, administración, previsión del tiempo, arquitectura, medicina, economía, son apenas algunos ejemplos". Por esto, es necesaria la alfabetización matemática. Para Onuchic y Allevato (2011, p. 80), "el problema se ve como punto de partida para la construcción de nuevos conceptos y nuevos contenidos; los alumnos siendo coconstructores de su propio conocimiento y los profesores responsables de dirigir el proceso". Además, resolver problemas forma parte de la propia naturaleza humana.

De ahí que sea importante encuadrar la resolución de problemas en un curso de formación inicial de profesores de matemática para "proporcionar a los docentes actividades apropiadas para la resolución de problemas, tratando posibles orientaciones para la solución de dificultades encontradas con este enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas" (Viana et al, 2010), pues "las asignaturas de los

cursos [de formación de profesores] deben estar vinculadas a acciones que hagan posible que los estudiantes se integren en la práctica con lo que van a aprender" (Viana et al, 2010, p. 4). "De hecho, nadie promueve el desarrollo de lo que no tuvo oportunidad de desarrollar en sí mismo". "Nadie promueve el aprendizaje de contenidos que no domina ni la constitución de significados que no posee o la autonomía que no tuvo la oportunidad de construir" (Pires, 2002, p. 48). Así, debe haber coherencia absoluta entre lo que se hace en la formación y lo que se espera del profesional en su práctica.

En ese sentido, para promover la formación del profesor de matemáticas, el Grupo de Trabajo y estudio sobre Resolución de Problemas (GTERP) liderado por Onuchic (1999) elaboró una propuesta a la que denominó Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de Matemáticas a través de Resolución de Problemas.

Onuchic y Allevato (2011) aclaran que la opción por utilizar la forma compuesta enseñanza-aprendizaje-evaluación tiene como objetivo el de expresar una concepción en la que enseñanza y aprendizaje deben ocurrir simultáneamente durante la construcción del conocimiento, y que la evaluación debe estar integrada al proceso de enseñanza-aprendizaje, con miras a acompañar el crecimiento de los alumnos y reorientar las prácticas de clase cuando sea necesario (Onuchic y Allevato, 2011); lo que está de acuerdo con las funciones de la evaluación consideradas por Viana (2004, p. 35): "…la evaluación tiene que cumplir diferentes funciones que ayuden al profesor y al alumno a elevar el nivel del resultado de sus actividades (…) las cuatro funciones fundamentales son: de diagnóstico, de control, educativa y proyectiva".

En esta metodología, la enseñanza y aprendizaje de un tema matemático comienza con un problema que expresa aspectos llave del mismo, y deben desarrollarse técnicas matemáticas en la búsqueda de respuestas razonables al mismo. El contenido matemático necesario o más apropiado a la resolución del problema no se presenta a los alumnos. El problema se propone, justamente, como generador del nuevo contenido matemático requerido por el programa de la asignatura. La evaluación del crecimiento de los alumnos se realiza durante la resolución del problema (Alevato y Onuchic, 2011).

Así, para la construcción de un nuevo conocimiento sobre determinado asunto del programa, el profesor necesita seleccionar o plantear un problema adecuado al asunto y a sus alumnos. También necesita buscar elementos para estimular la comprensión, la construcción de estrategias y de conocimientos matemáticos por los alumnos. Además, necesita buscar estrategias adecuadas para la solución y formular preguntas-llave para llevar a los alumnos a analizar sus resultados, llegar a un consenso sobre los mismos y organizar la mejor manera de formalizar nuevos conceptos construidos a partir del problema (Allevato y Onuchic, 2011).

Allevato y Onuchic (2011) destacan que los profesores que enseñan conforme a la propuesta del GTERP "se encantan y no quieren volver a enseñar de la manera llamada *tradicional.* Se sienten gratificados con la constatación de que los alumnos desarrollan la comprensión por sus propios raciocinios" (Allevato y Onuchic, 2011, p.82, subrayado de las autoras). Y la "formalización de los conceptos y teorías matemáticas, hechas por el profesor, pasan a tener sentido para los alumnos" (p. 82).
Teniendo esto en cuenta, para que los alumnos experimentasen el proceso de resolución de problemas, favoreciendo discusión y práctica sobre las etapas y principios útiles para crear sus propios problemas y

estrategias de resolución, en la asignatura EAD537, esta autora utilizó la propuesta del GTERP haciendo las adaptaciones necesarias para una carrera en la modalidad a distancia.
Consecuentemente, la pregunta que se hizo fue: ¿cuáles son las contribuciones de la utilización de la Resolución de Problemas para la formación de profesores de matemáticas en una carrera en la modalidad a distancia hecha en ambientes virtuales de aprendizaje (es decir, en línea)?

El Aprendizaje y el Ambiente Virtual de Aprendizaje AVA

De acuerdo con Jonassen (1996, p.70) "las concepciones tradicionales de aprendizaje admiten que el conocimiento es un objeto, algo que puede ser transmitido del profesor al alumno", algo que puede ser adquirido, como provisiones compradas en un supermercado. Sabemos que no es así. Es importante comprender cómo se aprende y de ahí, cómo se enseña. Según Jonassen (1996, p. 70) "los constructivistas creen que el conocimiento es una construcción humana de significados que procura dar sentido a su mundo". Así, según Moran (2000) "conocer es integrar la información em nuestro referente, em nuestro paradigma, apropiándonosla, haciéndola significativa para nosotros. El conocimiento no ocurre, el conocimiento se crea, se construye" (Moran, 2000, p.54). Resulta de cómo entendemos nuestras interacciones con los otros. "El conocimiento que tenemos y las habilidades que desarrollamos proceden, en parte, de la situación o contexto en el que fueron desarrollados y usados" Jonassen (1996, p. 70).

Dado que el conocimiento es construido personalmente, es, de forma necesaria, personalmente poseído y atribuido. Por otro lado, si el significado es personal, no es necesariamente individual. El significado puede ser acordado socialmente entre grupos de personas. Así como el mundo físico es compartido por todos, es también la percepción que tenemos de él. De ahí que el aprendizaje sea también social. Por lo tanto, el estudiante depende de las interacciones con los compañeros (Jonassen, 1996).

Viana (2004), apoyándose en el paradigma histórico-cultural considera el aprendizaje como actividad de producción y reproducción del conocimiento, bajo condiciones de orientación e interacción social. En este concepto de aprendizaje el sujeto es activo, consciente, orientado a un objetivo: su interacción con otros sujetos (el profesor y otros estudiantes), sus acciones con el objeto con el uso de diversos medios en condiciones sociohistóricas determinadas (Viana, 2004).
Alrø y Skovsmose (2006) concuerdan con esta conceptualización del aprendizaje al afirmar

> Aprender es una experiencia personal, mas ocurre en contextos sociales repletos de relaciones interpersonales. Y, por consiguiente, el aprendizaje depende de la cualidad del contacto en las relaciones interpersonales que se manifiesta durante la comunicación entre los participantes (Alrø y Skovsmose, 2006, p.12).

Debe haber factores que concurren para que las relaciones interpersonales favorezcan el aprendizaje. Borba, Malheiros y Zulatto (2007) consideran que la interacción, el diálogo y la colaboración son los factores de los cuales resulta la calidad de la participación de los involucrados durante el proceso de producción del conocimiento. En este caso, la calidad de la EAD online está directamente relacionada con los recursos tecnológicos disponibles para mediar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para hacer posibles estas interacciones el AVA se destaca en la EAD, pues "componen un escenario en el cual,

dependiendo de los recursos existentes, la enseñanza y el aprendizaje pueden ocurrir de manera cualitativamente diferente" (Borba, Malheiros y Zulatto, 2007, p. 25). En este ambiente es posible habilitar herramientas de comunicación e información de acuerdo con la necesidad y la propuesta del curso ofrecido. En este ambiente los sujetos (profesores, alumnos, investigadores, tutores) interactúan entre sí, en diferentes situaciones, teniendo como objetivo principal promover la construcción del conocimiento (Dutra y Viana, 2013).

Pero el AVA por si solo no hace posible el aprendizaje; puede considerarse un ambiente de aprendizaje si los actores de la producción del conocimiento estuviesen condicionados por el aprendizaje y, entonces, se pudiese contar con los foros y chats para las interacciones. Para Borba, Malheiros y Zulatto (2007), la calidad y la naturaleza del aprendizaje están directamente unidas a la intensidad y a la calidad de la interacción. En el caso del aprendizaje matemático la interacción es una condición necesaria, "intercambiar ideas, compartir las soluciones encontradas para un problema propuesto, exponer el razonamiento, son acciones que constituyen el "hacer" matemáticas" (Borba, Malheiros y Zulatto, 2007, p. 27). Así, el aprendizaje en EAD puede ser posible por las interacciones realizadas en el AVA por medio de herramientas como chat, foros y videoconferencias, utilizadas por alumnos y profesores para promover el diálogo que busca la construcción del conocimiento (Dutra y Viana, 2013).

La Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de Matemáticas a través de la Resolución de Problemas en un AVA

La adaptación de la propuesta se hizo teniendo en cuenta las herramientas de las que se disponía en el AVA. Fue así en cada semana:

1- Formación de grupos para la entrega de las actividades: el problema se colocaba en la Plataforma Moodle el lunes por la mañana. Los alumnos podían leer, interpretar y entender el problema.
2- Observación e incentivo: se realizaban foros en los cuales los alumnos ponían sus resoluciones de los problemas, discutiéndolas con los compañeros.
3- Ayudas en los problemas secundarios: en los foros, la profesora y la tutora observaban, incentivaban y participaban del proceso de discusión ayudando, dando el feedback de las resoluciones; respondían y formulaban preguntas.
4- Registro de las resoluciones en el encerado; en los chats, la semana siguiente, se presentaban las impresiones de los alumnos y se presentaba la formalización de los resultados.
5- Plenario: el chat era un plenario virtual para discutir los problemas.
6- Busca del consenso: el chat se cerraba con una solución aceptada por todos.
7- Formalización del contenido: al final se coloca la solución aceptada por todos los alumnos, de acuerdo con los contenidos presentados en los problemas.

Procedimientos metodológicos

La investigación se hizo en Brasil, en una universidad federal cuyo AVA utilizado es la Plataforma Moodle, con matriculados en la asignatura EAD 537-Seminario III-Resolución y formulación de problemas como enfoque metodológico para la enseñanza de Matemáticas, que forma parte del Currículo

de la carrera de Formación de Profesores de Matemáticas de un Centro de Educación abierta y a Distancia. Todos los estudiantes fueron invitados a participar, pero fueron considerados para las investigaciones solo alumnos de 3 Polos de Apoyo Presencial, aquí denominados P1, P2 y P3, por el gran interés de los alumnos en participar de la investigación. Sus nombres fueron codificados como Sj1, Sj2, Sj3…Sj23.

Para identificar el perfil de los sujetos de la investigación se elaboró el Cuestionario 1 en el cual se preguntaba sobre cuáles temas deseaban que tratasen los problemas. Fueron indicados: Análisis Combinatorio, Álgebra, Funciones, Geometría y Trigonometría. Así, se organizaron 15 problemas distribuidos a lo largo de las siete últimas semanas de clase de la asignatura. Todos los textos necesarios para la asignatura, para el conocimiento del tema, y los de lectura opcional fueron puestos a disposición el primer día lectivo.

Se establecieron como principales instrumentos para la recogida de datos de la investigación: los foros semanales para discusión y resolución de problemas; los chats, utilizados al final de algunas actividades y el Cuestionario 2 respondido por los participantes durante la última semana de clase en el que evaluaron el trabajo realizado. Los datos se analizaron de acuerdo con lo encontrado en la literatura consultada y conforme a su naturaleza, de forma cualitativa y cuantitativa, principalmente el análisis discursivo.

Algunos resultados encontrados

Los investigados eran personas adultas y trabajadoras, que estudiaban a tiempo parcial y tenían familia y otras obligaciones personales. Muchos estaban teniendo la oportunidad de volver a clase después de varios años, como lo encontrado en la literatura.
El análisis de los datos, construidos a partir de los tres instrumentos utilizados, hizo posible verificar contribuciones a la formación de profesores:

1 - El aprendizaje de los estudiantes. La resolución de los problemas proporcionó que los investigados intercambiasen experiencias, expusiesen sus resoluciones y opiniones sobre los problemas, teniendo oportunidad de colaborar entre sí, con el diálogo buscando el aprendizaje (Alrø y Skovsmose, 2006). Además, en los foros, los estudiantes demostraron haber adquirido postura crítica; por ejemplo, el sujeto Sj10 puso en duda su resultado: “Este valor es extraño, me parece que falta algún dato en este cálculo”. En el Cuestionario 2, el sujeto Sj17 demostró que hubo aprendizaje al afirmar: “…tenía dificultades en diferenciar arreglo y combinación, mas debido a las preguntas que me dirigieron con relación a los resultados de mis cuestiones, pude comprender las diferencias”. Y Sj8 afirmó: “La discusión de determinados asuntos, genera dudas y las aclara con respecto a las nuestras”.
Así, la interacción, el diálogo, la colaboración y las acciones que constituyen el “hacer” matemáticas, según Borba, Malheiros y Zulatto (2007), estuvieron presentes durante la realización de las actividades propuestas y hubo aprendizaje en los investigados (Dutra y Viana, 2013).

2 - Formación Profesional. Esto se observó en las declaraciones presentadas en momentos de diálogo en los chats y en respuestas al Cuestionario 2. Según los propios investigados, el enfoque con resolución de problemas les trajo contribuciones en tanto que futuros profesores. El participante Sj5 afirmó: “Descubrí que debemos enseñar a los alumnos a pensar y a buscar la solución de un problema a través de sus

conocimientos y no a través de formas hechas y acabadas, pues eso no es aprender y si memorizar". El Sj3 destacó que percibió la "importancia de trabajar con problemas en clase". El sujeto Sj4 afirmó que "como futuro docente ansiaba aplicar estos conocimientos en clase, promoviendo un aprendizaje interactivo y dinámico, pues mostró los mecanismos adecuados y necesarios que un profesor debe asumir para conducir una clase". Estas declaraciones corroboran, con los autores Pires (2002) y Onuchic (1999), que es preciso que los licenciados vivencien metodologías para que las puedan utilizar cuando asuman sus clases (Dutra y Viana, 2013).

3 - Para la práctica profesional. Como algunos participantes de la investigación ya actúan en clase, fue posible observar que decidieron hacer uso de la Resolución de Problemas con el enfoque dado en esta asignatura. Esto era evidente en las declaraciones en el Cuestionario 2 y en chats. En el Cuestionario 2, Sj6 afirmó "estoy pensando en aplicar algo del tipo de resoluciones de problemas del día a día para contribuir a su aprendizaje"
El Sj3 demostró que ya puso los conocimientos adquiridos en práctica: "Como percibí que tenía dificultad en la resolución de problemas, tuve una idea: organizar un cuaderno solo con problemas con mis alumnos, y está siendo muy interesante, pues al principio ellos tenían mucha dificultad, pero ya se están acostumbrando" (Dutra y Viana, 2013).

4- El enfoque trajo un "nuevo mirar" en lo que se refiere a la resolución de problemas matemáticos. Los participantes demostraron haber adquirido un "nuevo mirar" sobre la resolución de problemas matemáticos: "Me ayudó a ver con otros ojos el modo como podemos enseñar matemáticas con placer, obteniendo resultados muchas veces hasta mejores que con el método tradicional de enseñanza" (Sj11). Este investigado parece estar sorprendido de que los resultados puedan ser mejores que con el "método tradicional", citado por él. Otro participante de la investigación afirma haber descubierto "que pueda gustar enseñar y aprender matemáticas a través de la resolución de problemas" (Sj12). Estas afirmaciones demuestran que los participantes no estaban familiarizados con la Resolución de Problemas como una metodología de enseñanza (Dutra y Viana, 2013) y quedaron satisfechos con el enfoque empleado en la investigación. Los participantes destacaron la importancia de la participación efectiva del profesor en las actividades desarrolladas en el AVA: "(…) este está siendo el mejor periodo, pues tenemos apoyo" (Sj17). Además fue posible observar el deseo de compartir los conocimientos adquiridos: "En mi opinión todos los profesores de Matemáticas deberían participar de esta asignatura. Muchas veces me maravillo con ciertos temas que vemos […] y me gustaría pasarles, a mis compañeros de trabajo, lo que algunas veces conseguí" (Sj21).

Consideraciones finales

El uso de la metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación a través de la Resolución de Problemas intensificó las interacciones. El debate aguzó la curiosidad de los participantes. El diálogo hizo posible la interacción y la colaboración ofrecidas por las herramientas disponibles en el AVA, primordiales para la construcción del conocimiento en la EAD. Los participantes pudieron exponer sus opiniones, mostrar sentimientos y dudas, y compartir experiencias, de forma que la articulación de las ideas surgidas, a partir de los problemas propuestos, hizo posible que fuesen protagonistas de su aprendizaje. Por las interacciones analizadas y por las declaraciones, se observó que la propuesta contribuyó al aprendizaje de contenidos

específicos de Matemáticas y a un nuevo mirar para los problemas. Esto les hizo ver la importancia de resolver problemas sin el uso de procesos mecánicos y memorizados, incentivándoles la postura crítica. Además, pudieron percibir que la persistencia y la autonomía son características importantes para el éxito en la resolución de un problema y para el propio aprendizaje. Los cambios que observaron como alumnos, van a reflejarse en su práctica profesional, modificando su postura en clase, como profesores.

Referencias bibliográficas

Borba, M.C., Malheiros, A. P. S.y Zulatto, R. B. A. (2007). *Educação a distância online*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Dutra, D. S. A.y Viana, M. C. V. (2013). Resolução de problemas em ambientes virtuais de aprendizagem: possibilidade na educação a distância. *Revista Eletrônica de Educação*, 7(2). 241-262.

Jonassen, D. H. (1996). O uso das Novas Tecnologias na Educação a Distância e a Aprendizagem Construtivista. *Em Aberto*, 16(70), 69-88.

Lester, F. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: The first 25 years in JRME. *Journal for Research in Mathematics Education 25* (6), 660–675.

Moran, J.M. (2000). Ensino e Aprendizagens inovadores com tecnologias audiovivuais e telemáticas. En: Moran, J.M., Masetto, M. T. y Behrens, M. A. (Org.). *Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica*. (pp.11-65), Campinas, SP: Papirus Editora.

Onuchic, L. R.; Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, 25(41), 73-98.

Onuchic, L. R. (1999) Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*. (pp.199-218), São Paulo: UNESP.

Pires, C. M. C. (2002). Reflexões sobre os Cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. *Educação Matemática em Revista,* Edição Especial. 11, 44-56.

Polya, G. (1945). *How to solve it* (2nd edition, 1957). Princeton: Princeton University Press.
Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Viana, M. C. V. (1992). *A Matemática Através de Problemas*. Texto Didático. Especialização em Educação Matemática. Ouro Preto: Departamento de Matemática, Ufop.

Viana, M. C. V. (2004). *O processo de ensino/aprendizagem de Matemática sob diferentes olhares*. Texto Didático. Ouro Preto: Departamento de Matemática, Ufop.

Viana, M., Gomes, M. and Santos, M. (2010). A educação a distância na Ufop e o Curso de Matemática. En J. Barbosa (Ed). *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*, (pp.1-11). Salvador, BA: SBEM.

EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS EN LAS PRUEBAS ANDALUZAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Mª del Mar López-Martín, Carmen Bataneo, José Miguel Contreras
Universidad de Granada (España)
mariadelmarlopez@ugr.es, batanero@ugr.es, jmcontreras@ugr.es

Resumen

Se analizan las pruebas propuestas en Andalucía en el periodo 2003/2016, caracterizando los problemas sobre contraste de hipótesis y comparando el contenido evaluado y el pretendido en el currículo. Aunque todas las pruebas incluyen problemas de inferencia estadística, destacamos que éstos han sido propuestos en los últimos siete años. El análisis semiótico ha puesto de manifiesto su complejidad; igualmente se observa que las poblaciones suelen ser binomiales o normales y el parámetro a contrastar suele ser la media o proporción poblacional. Los resultados propician una mejor preparación de los estudiantes para asegurar el éxito de la prueba.

Palabras clave: pruebas PAU, bachillerato, contraste hipótesis

Abstract

We analyze university entrance exams proposed in Andalusia in the academic courses from 2003 to2016, characterizing the problems regarding hypothesis test and comparing the content evaluated and the intended content in the curriculum. Although all the tests include statistical inference problems, we emphasize that these have been proposed in the last seven years. Semiotic analysis has revealed its complexity; it is also observed that binomial or normal populations are usually used and the parameter of contrast is usually the mean or proportion of population. The results lead to a better preparation of the students to ensure the success of the test.

Key words: EU tests, bachelor, hypothesis test

Introducción

En la actualidad, el estudio tanto de la estadística como de la inferencia estadística está teniendo una gran repercusión en un porcentaje elevado de estudios de grado e incluso en másteres. Este interés viene directamente relacionado por el impacto que estas tienen a la hora de entender ciertos fenómenos que son estudiados en diversas ramas de ciencias.

Dentro del ámbito educativo, la enseñanza de las matemáticas se ha visto fuertemente condicionada por los resultados obtenidos en las pruebas de evaluación externas como por ejemplo las pruebas PISA (Program for International Student Assessment; OCDE, 2015), la evaluación TIMSS (Third International

Mathematics and Science Study; Mullis, Martín, Foy y Arora, 2012), las pruebas de diagnóstico y las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU). En el caso de los futuros estudiantes universitarios, las pruebas de acceso a la universidad (en adelante PAU) son un elemento a tener muy presente con el fin de garantizar el éxito para poder cursar los estudios de grado deseados. Aunque la finalidad principal de dichas pruebas es la evaluación de los conocimientos y capacidades adquiridas por los futuros universitarios, es evidente que también se utilizan como filtro para seleccionar a los estudiantes que quieren ingresar en determinadas titulaciones y centros.

Centrando nuestra atención en el último curso de Bachillerato, se ha observado que el estudio de la inferencia estadística se trata únicamente en la asignatura de Matemáticas Aplicadas en las Ciencias Sociales II incluida en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales (MEC,2007; MECD, 2015). Este hecho es bastante significativo ya que gran parte de los estudiantes de último curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias, cuando continúan sus estudios universitarios, se encuentran con una o varias asignaturas donde se tratan contenidos de inferencia estadística.

El sistema educativo español desde 2003 ha sufrido varios cambios con respecto a las características y contenidos de Bachillerato. Concretamente el 27 de junio de 2003 se entra se aprueba el Real Decreto 832/2003 donde establece la ordenación general y las enseñanzas comunes del Bachillerato. Posteriormente en 2007, entra en vigor la ley orgánica 2/2006, conocida como LOE. Esta última ley fue mejorada por la actual ley orgánica de la mejora de la calidad educativa (LOMCE) aprobada en 2013 y que comenzó a implantarse, de forma paulatina, en el curso académico 2014/2015. La Tabla 1 muestra los contenidos de inferencia recogidos en la antigua ley LOE y en la actual LOMCE. Con la entrada en vigor de la LOMCE se observa que los intervalos de confianza ganan terreno a los contraste de hipótesis, los cuales han sido eliminados.

Tabla 1. Contenidos de inferencia estadística recogidos en las normativas curriculares de 2007 y 2015

MEC (2007, p. 45476)	MECD (2015, p. 389)
C.1 Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. C.2 Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. C.3 Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales. C.4 Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida. C.5 Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.	C.2 Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra. C.2 Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual. C.3 Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. C.4 Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. C.4 Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. C.4 Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

A lo largo de los últimos años, el grupo de investigación sobre Educación Estadística de la Universidad de Granada ha analizado con profundidad los ítems de intervalo de confianza que han sido propuestos en las pruebas PAU (López-Martín, Arteaga, Gea y Contreras, 2016; López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero y Gea, 2016; López-Martín, Díaz-Levicoy, Gea y Arteaga, 2016). El objetivo del estudio que aquí se presenta es completar el análisis de los ítems de inferencia estadística de las mencionadas pruebas, centrando la atención en los ítems relacionados con contraste de hipótesis. Concretamente se realiza el análisis de este tipo de problemas que han sido propuestos desde 2003 hasta 2016. Puesto que en el estudio llevado a cabo la muestra se ha seleccionado de una manera intencionada, lo que se pretende con la presentación del mismo es aportar algunas características sobre el contenido de inferencia estadística que es tratado en las PAU.

El trabajo queda estructurado como se muestra a continuación: en la Sección 2 se presenta el marco teórico sobre el que se ha basado el desarrollo de la investigación, la Sección 3 recoge las características sobre el método de investigación que se ha llevado a cabo y posteriormente, en la Sección 4 se muestran los resultados obtenidos del análisis realizado. Por último se concluye el trabajo mostrando una síntesis sobre los resultados más destacados del mismo.

Fundamentos

Nos apoyamos en herramientas teóricas propuestas por el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, sistema teórico elaborado Godino, Batanero y Font (2007). Como formación epistemológica, dicho enfoque asume que las matemáticas provienen de la actividad humana orientada a la resolución de determinados tipos de problemas, los cuales constituyen la razón de ser y significado de los objetos emergentes de la misma. Dentro del marco teórico EOS, se diferencian entre el *significado institucional* (compartido dentro de una institución) y el *significado personal* (que adquiere una persona, por ejemplo, un estudiante y puede ser diferente al aceptado dentro de la institución) (véase Figura 1).

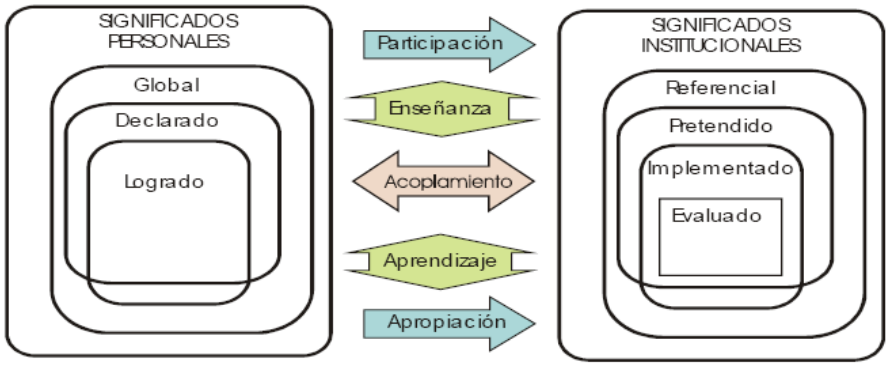


Figura 1. Tipos de significados institucionales y personales (Godino, 2002, p.141)

En el caso que nos ocupa, nos centramos en comparar los significados pretendido y evaluado del contraste de hipótesis en las PAU, diferenciando para ello el significado global, el significado pretendido (marcado por las orientaciones curriculares) y el evaluado (contenido en las pruebas de evaluación). Como

complemento al marco teórico EOS, se ha recurrido a investigaciones que analizan las pruebas PAU (Díaz, Mier, Alonso y Rodríguez-Muñiz, 2014; Espinel, Ramos y Ramos, 2006; Espinel, Ramos y Ramos, 2007; García y García, 2005 y Ruiz, Dávila, Etxeberria y Sarasua, 2013) e investigaciones sobre la comprensión del contraste de hipótesis (Batanero y Borovcnik, 2016; Batanero, Díaz y López-Martín, 2017 y Vallecillos, 1999).

Método

El trabajo desarrollado se enmarca dentro de la metodología cualitativa basada en el análisis de contenido de los ejercicios propuestos en las pruebas citadas. Con objeto de realizar la investigación se han seleccionado las pruebas PAU de la modalidad del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales en la Comunidad Autónoma andaluza, desde el curso académico 2002-2003 hasta el curso 2015-2016, en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Dicha prueba consta de dos opciones (opción A y opción B), cada una de ellas formada por cuatro ejercicios y donde un ejercicio corresponde al bloque de inferencia estadística. En cada curso académico se proponen un total de 6 pruebas (prueba de junio, prueba de septiembre y cuatro pruebas de reserva), por lo que anualmente se cuenta con 12 ejercicios. Puesto que para el estudio se ha partido de las pruebas propuestas desde 2003, en total se han analizado 168 ítems. En un primer análisis se han filtrado únicamente aquellos ítems relacionados con contraste de hipótesis. Concretamente los resultados que se muestran en la siguiente sección están restringidos en el periodo desde 2010 hasta 2016 ya que es a partir de entonces cuando es posible observar la inclusión de este tipo de ítems.

Una vez identificados los ítems de contraste de hipótesis, se ha llevado a cabo un análisis semiótico con el fin de identificar el contenido evaluado y poder así compararlo con el incluido en las normativas curriculares. Además se ha definido una serie de variables que han sido consideradas relevantes para la formación del estudiante en relación a los problemas de inferencia y que se han deducido del estudio de la investigación previa. Concretamente, las variables analizadas han sido:

- Modelo de distribución de la población de partida en el ejercicio (distribución binomial o distribución normal);
- Parámetro al que se refiere el contraste (media poblacional o proporción poblacional);
- Contexto en el que se presenta la tarea, dentro de los considerados en las pruebas PISA (personal, social, profesional, científico), (OCDE, 2009).

Para cada una de estas variables se realiza un estudio de la distribución de las diferentes categorías, globalmente y a lo largo del tiempo.

Resultados

A partir del análisis cualitativo, donde se identificaron las categorías para cada una de las variables y para cada problema, se han codificando los datos para su posterior tratamiento estadístico con el software Excel. La Tabla 2 recoge la información correspondiente a los resultados obtenidos del análisis. Desde el 2010 en adelante se analizaron 84 problemas de los cuales 32 correspondían a la temática en estudio.

Tabla 2. Resultados obtenidos en el análisis de los problemas propuestos

		2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL
Nº Problemas		5	5	5	3	4	6	4	32
Parámetro	Media	4	3	4	2	1	6	2	22
	Proporción	1	2	1	1	3	--	2	10
Distribución	Normal	4	3	4	2	1	6	2	22
	Binomial	1	2	1	1	3	--	2	10
Contexto	Personal	--	1	2	--	--	1	1	5
	Social	1	3	2	1	4	1	1	13
	Profesional	3	1	1	1	--	1	1	8
	Científico	1	--	--	1	--	2	1	5
	Sin contexto	--	--	--	--	--	1	--	1

El análisis realizado se ha llevado a cabo desde 2010 ya que es a partir de entonces donde las pruebas incluyen ejercicios relacionados con test o contrastes de hipótesis. A partir de su inclusión en las PAU, casi el 40% de los ejercicios propuestos en el bloque de inferencias estadística lo incluyen. La aparición de los contrastes de hipótesis supuso una disminución considerable de los ejercicios relacionados con el intervalo de confianza, indicando un cambio de tendencia en los contenidos de inferencia evaluados en las pruebas de acceso.

Con respecto al parámetro a estimar se observa que un alto porcentaje de ellos están centrados en dar respuesta a contrastes cuya a hipótesis a analizar se centra en la media de una población normal. Estos resultados muestran un privilegio por la media de una población normal frente a la proporción de una población binomial.
Con respecto a los contextos se observa una gran presencia de problemas formulados sobre un contexto social y una disminución significativa, en los últimos años, de los problemas sin contexto (solamente se ha propuesto uno en el año 2015).

Síntesis de los resultados

El marco teórico usado nos ha permitido analizar los conceptos y procedimientos que son empleados a la hora de afrontar la resolución de los ítems de contrastes de hipótesis. Tras el análisis realizado se ha observado el dominio de una gran variedad de conceptos y de procedimientos, como muestra la Tabla 3.

Tabla 3. Contenidos matemáticos evaluados en los ítems de contraste de hipótesis en las PAU

Conceptos y propiedades	Población y muestra
	Distribución muestral
	Relación entre los estadísticos de la población y de la distribución muestral
	Modelo teórico de distribución
	Distribución normal tipificada
	Estimador de un parámetro
	Hipótesis nula e hipótesis alternativa; diferencias
	Estadístico de contraste
	Nivel de significación
	Regiones de aceptación y rechazo
	Lógica del contraste
	Probabilidad condicional
Procedimientos	Cálculo de los estadísticos en las muestras
	Cálculo de los estadísticos de la distribución muestral
	Tipificación
	Lectura de tablas de la distribución normal
	Cálculo de probabilidades
	Cálculo de percentiles en la distribución normal
	Cálculo de regiones de aceptación y rechazo
	Toma de decisión sobre una hipótesis

De entre todos los conceptos y propiedades descritos en la Tabla 3 destacamos el de probabilidad condicional. Dicho concepto interviene tanto en la definición de las distribuciones muestrales (condicionadas al valor del parámetro), intervalos de confianza (condicionados con el valor del estadístico) y en el caso del contraste de hipótesis, aparece a la hora de describir las regiones de aceptación y rechazo, las cuales se calculan bajo la condición de ser cierta la hipótesis nula (Castro-Sotos, Vanhoof, Noortgate y Onghena, 2007). Puesto que el concepto de probabilidad condicional es difícil y se han descrito números sesgos sobre el mismo (Díaz, Contreras, Batanero y Roa, 2012; Díaz y de la Fuente, 2005; Falk, 1986), sería recomendable que los profesores tengan una especial atención a su uso en inferencia, para asegurar un aprendizaje adecuado por parte de los estudiantes y garantizar una correcta solución de los problemas.

En cuanto a los procedimientos, destacamos la importancia que tiene una correcta lectura la tabla de la distribución normal tipifica y la necesidad de realizar correctamente los cálculos estadísticos con el fin de obtener las medidas de centralización, medidas de dispersión y proporción muestral para posteriormente describir la distribución tanto de la media muestral como de la proporción muestral. Por último señalar que otro punto importante a tener en cuenta es el manejo de desigualdades en el proceso de tipificación.

Destacar que el estudio llevado a cabo sobre los problemas de las PAU junto al análisis de las normativas curriculares pone de manifiesto, en general, una adecuada relación entre los contenidos tratados en las PAU e incluidos en el currículo. Sin embargo, hemos observado un mayor énfasis en la estimación de la media, en comparación con la estimación de la proporción y por otro lado los problemas propuestos se refieren a estimación en una sola población. Por tanto no se considera la comparación de dos poblaciones que es un tema incluido en el currículo.

Por último nos gustaría señalar que, tanto el trabajo que aquí se presenta como los resultados obtenidos en investigaciones relacionadas con las pruebas PAU (Carretero, 2014; Carretero, López-Martín y Arteaga, 2015; Contreras, López-Martín, Arteaga y Carretero, 2015; López-Martín, Contreras, Batanero y Carretero, 2015; López-Martín, Contreras, Carretero y Serrano, 2016) sean considerados con el fin de contribuir en la mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los futuros universitarios en Estadística y Probabilidad.

Agradecimientos: Proyecto de investigación EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y grupo de investigación FQM126 de la Junta de Andalucía.

Referencias Bibliográficas

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Rotterdam: Sense publishers.

Batanero, C., Díaz, C. y López-Martín, M. M. (2017). Significados del contraste de hipótesis, configuraciones epistémicas asociadas y algunos conflictos semióticos. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponibles en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.htm/.

Carretero, M. (2014). *Análisis de problemas de probabilidad en las pruebas de acceso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Andalucía.* Trabajo fin de Máster. Universidad de Granada.

Carretero, M., López-Martín, M. M. y Arteaga, P. (2015). Contenido matemático de los problemas de probabilidad en las pruebas de acceso de Andalucía. *Probabilidad Condicionada. Actas de las* II *Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatori*a. Granada: SEIEM. Online: http://www.jvdiesproyco.es/.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Noortgate, W. y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review*, *2*(2), 98-113.

Díaz, C., Contreras, J. M. Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación Secundaria. *Bolema 26* (22), 1207-1226.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, *59,* 245-260.

Díaz, P., Mier, V., Alonso P. y Rodríguez-Muñiz; L. J. (2014). Probability and statistics in access exams to Spanish universities. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), Sustainability in statistics education. *Proceedings of*

the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, AR: International Statistical Institute.

Espinel, M. C., Ramos, C. E. y Ramos. R. M. (2006, Septiembre). La inferencia estadística en la PAU. Presentado en *XXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, SEIO*. Tenerife.

Espinel, M. C., Ramos, R. M. y Ramos, C. E. (2007). Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en Secundaria. *Números, 67*, 15-23.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

García, I. y García, J. A. (2005). Algunos resultados sobre la actuación de los alumnos en las cuestiones de estadística en la P. A. U. *Actas de las XI Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 733-738). La Laguna: Consejería de Educación, Cultura de Deportes Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Rotterdam: Sense publishers.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 27-135.

López-Martín, M. M., Arteaga, P., Gea, M.M. y Contreras, J. M. (2016, Julio). Los intervalos de confianza en las pruebas de selectividad andaluzas. Trabajo presentado en la 30 *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME-30*, Monterrey, México, 2016. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

López-Martín, M.M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C. y Gea, M. (2016). La inferencia estadística en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía, *Revista Paranaense de Educação Matemática 5* (8), 33-59.

López-Martín, M. M., Contreras, J. M., Batanero, C. y Carretero, M. (2015). Los problemas de probabilidad propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. *Areté*, *1*(1), 39-60.

López-Martín, M. M., Contreras, J. M., Carretero, M., Serrano, L. (2016). Análisis de los problemas de probabilidad propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. *Avances de Investigación en Educación Matemática* (AIEM*), 9,* 65-84.

López-Martín, M. M., Díaz-Levicoy, D., Gea, M. M. y Arteaga, P. (2016, Junio). Estudio empírico de los problemas sobre intervalos de confianza en las Pruebas de Acceso a la Universidad. Presentado en el *VI Encuentro Internacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (EIEPE)*. Ciudad de Puebla, Puebla, México, 2016.

MEC, Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.* Madrid: Autor.

MECD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P. y Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

OCDE. (2009). *PISA 2009 assessment framework - key competencies in reading, mathematics and science.* Paris: OCDE.

OCDE, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2015). *PISA 2015 mathematics framework.* Paris: OCDE

Ruiz, J. G., Dávila, P., Etxeberria, J. y Sarasua, J. (2013). Pruebas de selectividad en Matemáticas en la UPV-EHU. Resultados y opiniones de los profesores. *Revista de educación*, *362,* 217-246.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Proceedings of the 52 session of the International Statistical Institute* (Vol.2, pp. 201–204). Helsinki: International Statistical Institute.

EXPERIENCIA EN UN AMBIENTE VIRTUAL PARA EL AUTOAPRENDIZAJE DEL MODELO LINEAL

Lizzeth Aurora Navarro Ibarra, Omar Cuevas Salazar, Julia Xochilt Peralta García
Instituto Tecnológico de Sonora. (México)
Lizzeth.Navarro@gmail.com, omar.cuevas@itson.edu.mx, julia.peralta@itson.edu.mx

Resumen

El objetivo del estudio fue el de determinar el rendimiento académico alcanzado con el autoaprendizaje del modelo lineal en un ambiente virtual a nivel superior. El diseño fue de tipo preexperimental con pretest y postest. Participaron 68 estudiantes de Ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora, en México. Se realizó el análisis para muestras relacionadas con la prueba de rangos de Wilcoxon. Los resultados muestran una diferencia significativa indicando que el rendimiento académico se incrementó con el ambiente virtual de aprendizaje (AVA). Sin embargo, se requiere continuar con el estudio para establecer si los recursos digitales producen un mayor efecto en el aprendizaje que la enseñanza tradicional, donde un docente explica los temas frente a los estudiantes en un aula física.

Palabras clave: modelo lineal, autoaprendizaje, tecnología

Abstract

The aim of the study was to determine the academic performance reached through linear model self-learning in a virtual environment in higher education. It consisted of a pre-experimental design with pre-test and post-test. The sample involved sixty-eight engineering students from Sonora Technological Institute in Mexico. The analysis for related samples was carried out by using Wilcoxon range test. The results show a significant difference, indicating that the academic performance was improved with the Virtual Learning Environment (VLE). However, it is necessary to keep on with the study to establish if the digital resources produce a higher effect in learning compared to traditional learning, where the teacher explains the topics in front of the students in the classroom.

Key words: linear model, self-learning, technology

Antecedentes

En la sociedad actual con amplio desarrollo tecnológico, se debe revalorar el qué hacer y cómo hacer para que la Matemática pueda ser aprendida y que se constituya en el instrumento para el cual la humanidad la creó; es decir, un medio para resolver problemas del entorno optimizando los recursos que son más escasos cada vez. Debe haber una transformación del proceso enseñanza y aprendizaje del Cálculo desde la perspectiva algebrizada, descontextualizada, formalizada por la abstracción de las matemáticas a una

disciplina cuya finalidad sea la comprensión significativa de los conceptos y que prevalezcan las necesidades de la Ingeniería sobre los criterios de los matemáticos (García, 2013).

El uso de la tecnología en la enseñanza puede fomentar la comprensión significativa, sin embargo, esto depende de cómo se utilice. A su vez, se debe considerar que la tecnología debe emplearse considerando los elementos pedagógicos. Lo anterior llevará a crear actividades que sean atractivas para los estudiantes, eficientes, accesibles con diferentes dispositivos tecnológicos y centradas en la resolución de problemas que reflejen situaciones de la vida real (Fullan & Langworthy, 2013). El aprendizaje virtual es un proceso que se realiza con base en la estructura cognitiva del aprendiz. Esta estructura está integrada por las capacidades cognitivas básicas, las estrategias de aprendizaje, capacidades metacognitivas y de autorregulación, las metas y expectativas, así como los factores afectivos y motivacionales. Todos estos componentes y la forma en cómo el estudiante los aprovecha es lo que promueve un aprendizaje de calidad (Onrubia, 2016).

En un estudio realizado por Zakaria y Khalid (2016) encontraron que la tecnología puede tener grandes beneficios en la enseñanza de las matemáticas. En un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) se pueden tener diversas ventajas como: incrementar el interés de los alumnos, aumentar el rendimiento académico, estimular un aprendizaje durable, fomentar las interacciones positivas y favorecer el aprendizaje constructivista. A su vez Duval (1993) afirma que la habilidad para cambiar de registro cualquier representación semiótica es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas.

Es por ello que, al considerar los beneficios de la tecnología y su facilidad para presentar los diferentes registros de representación de un objeto matemático, es como se plantea el objetivo de esta investigación: Determinar el rendimiento académico alcanzado con el autoaprendizaje del modelo lineal en un ambiente virtual a nivel superior.

La perspectiva teórica en que se fundamenta el estudio es la propuesta de Duval (1993). En la actividad matemática para la aprehensión conceptual es necesario que un objeto matemático se reconozca en sus representaciones y que no se confunda con ellas. De esta forma la coordinación de registros de representación favorece la comprensión y a su vez las transferencias y aprendizajes posteriores. El registro de representación debe permitir formar una representación identificable, realizar una transformación dentro del mismo tipo de registro y la conversión que consiste en transformar la representación en una representación de otro registro.

Por otra parte, el autoaprendizaje es el proceso por el cual el individuo decide por sí mismo o con ayuda de otros cuáles son sus necesidades de aprendizaje, selecciona los recursos de aprendizaje tanto humanos como materiales, elige e implementa estrategias de aprendizaje, y finalmente evalúa su aprendizaje (Brookfield, 2009; Zimmerman, 2008).

Metodología

Método

El estudio es cuantitativo de tipo pre-experimental con diseño de un grupo con pretest-postest. Es decir, en un grupo intacto de estudiantes inscritos en Cálculo I se aplicó un examen de conocimientos (pretest)

sobre el modelo lineal y posteriormente iniciaron con el aprendizaje dentro del AVA. Al finalizar los contenidos del ambiente, se les aplicó de nuevo el mismo examen de conocimientos, denominado postest (Creswell, 2014). La investigación consistió en implementar un ambiente virtual para el autoaprendizaje del modelo lineal donde la razón de cambio es constante. La población a la que se dirige este trabajo son estudiantes universitarios de licenciaturas en ingeniería.

Instrumento

El instrumento utilizado como pretest y postest es un examen de conocimientos de un problema de una situación de la vida real elaborado por la academia de la asignatura de la universidad. El examen consta de cinco preguntas abiertas para evaluar la comprensión del tema.

Contexto y participantes

La investigación se realizó en el Instituto Tecnológico de Sonora ubicada en el noroeste de México. En la universidad se tienen programas de licenciatura y posgrado con 16,442 alumnos en el ciclo escolar 2015-2016 (Instituto Tecnológico de Sonora, 2016).
El grupo de estudio estuvo conformado por 68 estudiantes de ingeniería inscritos en la asignatura Cálculo I durante el semestre agosto-diciembre de 2016. Los alumnos participaron de forma voluntaria. El instrumento fue contestado en papel y en presencia del encuestador dentro de las instalaciones de la universidad.

Ambiente virtual de aprendizaje

La estructura y secciones del AVA se construyeron de acuerdo a Cabero (2013). El ambiente virtual se integró por lecciones en video donde el docente explica un problema por medio de imágenes, texto y audio. También se tuvieron actividades interactivas desarrolladas con el software matemático GeoGebra donde el alumno pudo probar diferentes situaciones. Por otra parte, las tareas y evaluaciones se realizaron con retroalimentación inmediata, la cual llegaba al correo electrónico del estudiante. Además, se proporcionó un resumen del tema, un mapa conceptual, una sección de comunicación y bibliografía de consulta. A su vez, se tuvo un apartado con ligas a videos de YouTube con material adicional relacionado al tema de estudio (Navarro, Cuevas, & Martínez, 2017).
Los problemas desarrollados en el ambiente virtual reflejan escenarios de la vida cotidiana haciendo énfasis en la predicción para resolverlos y en los registros de representación. El tema incluye cuatro lecciones, donde las primeras tres son situaciones problema y la cuarta es el contexto formal (Salinas et al, 2012).

Procedimiento

El procedimiento que se realizó en este trabajo es el que se describe a continuación:

1. Se seleccionó un grupo intacto de estudiantes inscritos a la asignatura Cálculo I. En este estudio el total de alumnos fue de 68.
2. Se aplicó el examen de conocimientos al grupo de estudiantes como pretest, antes de iniciar con la implementación del AVA. El instrumento fue contestado por los alumnos de forma individual, en papel y en presencia del docente.

3. Se asignó el tiempo para la enseñanza del tema que contempla el AVA el cual fue de 4 horas, una hora diaria en sesiones consecutivas. Sin embargo, los estudiantes tuvieron acceso al ambiente virtual desde cualquier dispositivo con internet durante las 24 horas en el periodo del estudio.
4. Los estudiantes estuvieron en un aula física con disponibilidad de computadoras con internet para cada participante y con esto verificar la navegación dentro del AVA.
5. Al finalizar el periodo de implementación del AVA se administró el examen de conocimientos como postest. Este instrumento fue respondido por los alumnos de manera individual, en papel y en presencia del docente.
6. Posteriormente, los exámenes se calificaron y se capturó la información en el software "Statistical Package for the Social Sciences", abreviado como SPSS, para realizar las pruebas estadísticas.

El rendimiento académico se examinó con un test para identificar si existen diferencias significativas, según el procedimiento de Cabero y Llorente (2006). Los datos presentaron un comportamiento no paramétrico y por ello se realizó un análisis para muestras relacionadas a través de la prueba de rangos con signo de Wilcoxon que permite comparar dos mediciones del mismo conjunto de participantes (pretest y postest).

Además, se determinó el tamaño del efecto que permite identificar cuando existe significancia estadística, si es grande la diferencia o no. Una diferencia significativa, no es necesariamente grande, para ello se debe cuantificar (Grissom & Kim, 2012). El cálculo de los tamaños del efecto también permite comparar un estudio con otros, independientemente de las variaciones de diseño o del tamaño muestral (Cárdenas & Arancibia, 2014).

Resultados

El objetivo de la investigación fue determinar el rendimiento académico alcanzado con el autoaprendizaje del modelo lineal en un ambiente virtual a nivel superior. Para ello se analizaron los datos obtenidos a través del instrumento aplicado como pretest y postest en el grupo de estudiantes que estudió el modelo lineal en el AVA.
Los datos presentaron un comportamiento no paramétrico, por ello se seleccionó un análisis estadístico para este tipo distribución. La prueba de rangos de Wilcoxon compara dos mediciones en un mismo grupo de participantes. Los resultados de este test se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. *Estadístico de contraste en la prueba de rangos con signo de Wilcoxon*

	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Sig.	r
Rangos negativos: Postest < Pretest	1	22.00	22.00	-6.174	.000	.7487
Rangos positivos: Postest > Pretest	52	27.10	1409.00			
Empates Postest = Pretest	15					
Total	68					

Como se observa en la Tabla 1, el valor p es menor a .01 lo que indica que sí hay diferencias entre el pretest y el postest. La suma de rangos y el rango promedio es mayor en los rangos positivos. Es decir, la suma de rangos positivos (1409.00) es más grande a los negativos (22.00), lo que indica que, el postest es superior al pretest. De igual forma, el rango promedio positivo es de 27.10, mientras que el rango promedio negativo es de 22.00, confirmando de esta forma que el rendimiento académico fue más alto en el postest. El obtener un rendimiento mayor en el postest expresa que el ambiente virtual si genero autoaprendizaje en el modelo lineal. A su vez, el tamaño del efecto r de 0.7487 al ser mayor a 0.5 indica que el efecto es grande según Yatani (2014). Este indicador señala que existe una diferencia importante en el rendimiento académico entre el pretest y el postest.

Reflexiones

Los resultados estadísticos indicaron que si se produce autoaprendizaje a través del ambiente virtual para el tema matemático desarrollado. Sin embargo, se requiere continuar con el estudio para determinar si los recursos digitales producen un mayor efecto en el aprendizaje que la enseñanza tradicional, donde un docente explica los temas frente a los estudiantes en un aula física.

Por otra parte, surge la posibilidad de ampliar la propuesta didáctica. El desarrollo de un AVA con las características del presente estudio y que abarque todos los temas de una asignatura de matemáticas es una futura línea de investigación. El diseño instruccional y los recursos digitales que se deberán diseñar, requerirá conformar un equipo de trabajo de varias disciplinas.

Además, se propone implementar el AVA en más grupos para obtener información que sea representativa de la población en estudio. Esto permitirá identificar oportunidades de mejora y con ello fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en un ambiente virtual.

Por otro lado, la actitud de los estudiantes ante el uso de la tecnología para el autoaprendizaje de las matemáticas puede estar influyendo en el rendimiento académico. Está línea de investigación aportaría información para mejorar la aceptación del AVA o bien, definir el perfil del alumno idóneo para este tipo de estrategias de enseñanza-aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Brookfield, S. (2009). Chapter XV.7 Self-Directed Learning. En R. Maclean y D. Wilson (Eds.), *International Handbook of Education for the Changing World of Work* (pp. 2615-2627). Montreal, Canadá: Springer.

Cabero, J. (2013). El aprendizaje autorregulado como marco teórico para la aplicación educativa de las comunidades virtuales y los entornos personales de aprendizaje. *Revista Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 14*(2), 133-156.

Cárdenas, M., & Arancibia, H. (2014). Potencia estadística y cálculo del tamaño del efecto en G*Power: Complementos a las pruebas de significación estadística y su aplicación en psicología. *Salud & Sociedad, 5*(2), 210-224.

Creswell, J. (2014). *Research design. Qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. USA: Sage

publications.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65. IREM de Strasbourg. Traducción para fines educativos (Hitt F., Ojeda A.). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, 1997, México.

Fullan, M., & Langworthy, M. (2013). *Towards a New End: New Pedagogies for Deep Learning*. Seattle: Collaborative Impact.

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación, 37*(1), 29-42. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/educacion/article/view/10627/10295

Grissom, R.J., & Kim, J.J. (2012). *Effect sizes for research: Univariate and Multivariate Applications*. New York: Routledge.

Instituto Tecnológico de Sonora (2016). *1er. Informe General de Actividades 2015-2016*. Recuperado el 3 de septiembre de 2017 de: http://www.itson.mx/rector/Documents/informe-2015-2016.pdf

Navarro, L. A., Cuevas, O. y Martínez, J. (2017). Autoaprendizaje del modelo lineal en un ambiente virtual. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1428-1437.

Onrubia, J. (2016). Aprender y enseñar en entornos virtuales: actividad conjunta, ayuda pedagógica y construcción del conocimiento. *RED Revista de Educación a Distancia, 50*(3), 1-14.

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. y Garza, J. (2012). *Cálculo Aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo I*. D.F., México: Cengage Learning Editores.

Yatani, K. (2014). *Statistical Methods for HCI Research*. Recuperado el 28 de enero de 2017 de: http://yatani.jp/teaching/doku.php?id=hcistats:start

Zakaria, N. A., & Khalid, F. (2016). The Benefits and Constraints of the Use of Information and Communication Technology (ICT) in Teaching Mathematics. *Creative Education, 7*, 1537-1544.

Zimmerman, B. (2008). Investigating Self-Regulation and Motivation: Historical Background, Methodological Developments, and Future Prospects. *American Educational Research Journal, 45*(1), 166-183.

ESTUDIO DE PROPIEDADES DE LOS SOLIDOS DE REVOLUCIÓN UTILIZANDO GEOMETRÍA DINÁMICA

Maritza Luna Valenzuela, José Carlos León Ríos.
Pontificia Universidad Católica del Perú. Universidad de Lima. Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas. IREM.(Perú)
luna.m@pucp.edu.pe, jleonr@ulima.edu.pe

Resumen

Las actividades que presentamos en este taller se han diseñado teniendo en cuenta la influencia de la tecnología en la educación matemática y la visualización de los contenidos, por tal motivo nos hemos basado en el enfoque instrumental de Rabardel. Nuestras actividades incluyen la rotación de los polígonos alrededor de un eje, cambio de los puntos de vista de los objetos tridimensionales, reconocimiento de sus propiedades invariantes de dichos objetos, rotación mental de las figuras planas, identificación de las caras del poliedro en el desarrollo de su superficie. Nuestra pregunta de investigación es ¿Una secuencia de actividades permite enriquecer las propiedades de las componentes de los sólidos de revolución, con un programa de geometría dinámica?
Nuestro objetivo es identificar las acciones que realizan los participantes cuando exploran las propiedades de las componentes de los sólidos de revolución, con un programa de geometría dinámica.

Palabras clave: enfoque Instrumental, instrumentalización, pensamiento variacional, génesis instrumental

Abstract

The activities we present in this workshop were designed taking into account the influence of technology when teaching mathematics and the visualization of contents; therefore, we have based this workshop on the Rabadel's instrumental approach. Our activities include: rotation of polygons around an axis; change of the viewpoints of three-dimensional (3D) objects; recognition of their invariant properties; mental rotation of plane figures, and identification of polyhedron sides in the development of its surface. Our research is based on the following question: Will a sequence of activities enrich the properties of the solids of revolution components, with a dynamic geometry program? This research intended to identify the actions that participants perform when they explore the properties of the solids of revolution components, by using a dynamic geometry program.

Key words: instrumental approach, instrumentalization, variational thinking, instrumental genesis

Introducción

El taller que presentamos se dividió en dos sesiones, cada una de las cuales contiene cuatro actividades. En la primera sesión, construimos sólidos de revolución a partir de la rotación de un polígono alrededor de un eje, específicamente un rectángulo y un triángulo. Incluimos también la rotación de una figura formada por polígonos y un cuarto de círculo. En la segunda sesión, determinamos el área de la superficie

generada por la revolución de un segmento de recta alrededor de un eje y el volumen de un sólido generado por el giro de una región comprendida entre dos gráficas definidas en un intervalo. Los participantes encontraron el volumen de dichos sólidos haciendo uso del CAS (cálculo simbólico) del Geogebra.

En este artículo presentaremos la descripción de dos actividades correspondientes a las sesiones uno y dos del taller. En la descripción incluimos la descripción de las acciones de uno de los participantes basados en aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel, específicamente el proceso de génesis instrumental del objeto y la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Durante la secuencia de actividades se observó que el GeoGebra 3D propició en algunos participantes, el descubrimiento y la identificación de las propiedades particulares para luego dar solución a dichos problemas.

Aspectos del Enfoque Instrumental

Con el fin de analizar en este artículo las actividades descritas, hemos considerado presentar el enfoque instrumental de Rabardel (1995). En dicho enfoque tomaremos los términos que haremos uso en el presente artículo, y que consideramos pertinentes para su descripción.

El autor considera que todo objeto material fabricado no debiera denominarse objeto tecnológico, debido a que esta denominación está muy centrada en el enfoque tecnocéntrico que sitúa a la tecnología como elemento principal del sistema y no contiene ninguna referencia a lo humano. En este enfoque tecnocéntrico el hombre ocupa una posición residual, el hombre es ineficiente, costoso e inoperante. Su función es atender a aquellas necesidades que no pudieron ser sistematizadas. En contraposición, agrega el autor, los productos que provienen de la tecnología no son puramente técnicos, y deben ser atendidos desde el punto de vista antropotécnico. Es decir, los objetos y los sistemas de los que estamos rodeados no deben solo ser aprehendidos a partir de las tecnologías que los han hecho nacer.

Estamos de acuerdo con Castro (2012) cuando indica que el hombre es un ser orgánicamente desvalido, es decir que su constitución biológica no le permite estar dotado con órganos que se adecuen al medio ambiente natural, mantiene una ausencia de especialización orgánica, no puede volar, su pelaje no está revestido para enfrentarse a la intemperie, tampoco órganos que le permitan enfrentarse a una pelea o a un ataque. Todas estas circunstancias obligan a que el hombre cree un ambiente independiente de su estatus orgánico. En ese sentido la técnica cumple una labor muy importante en su ciclo biológico que le ha posibilitado sobrevivir en una naturaleza muy hostil. Sin embargo, no es la tecnología lo que ha conservado a la especie humana, no son las herramientas fabricadas por el hombre lo que ha permitido se sostenga durante su evolución, sino un conjunto de acciones y conductas organizadas con un objetivo preciso. Como lo indica el autor:

> La técnica, en este caso, no son las herramientas que el hombre fabrica, sino el conjunto de acciones coordinadas, estratégicas, reglamentadas y orientadas al logro de una finalidad precisa. Podríamos decir que la técnica es producto de la inteligencia práctica del hombre, aquella que le permite "disponer" del entorno y someterlo a sus necesidades vitales. No es, entonces, que el hombre haga "uso" de la técnica, sino que el hombre es, en sí mismo, un animal técnico. (p.65)

Este reportorio de habilidades es trasmitido a las nuevas generaciones sobre la base de antiguas y nuevas destrezas que van acumulando e incrementando para continuar produciendo culturas superiores.

Para Rabardel (1995), un objeto tecnológico debiera ser llamado artefacto, por tratarse de un término neutral, el cual se enriquece con las situaciones de acción donde ha sido insertado de manera circunstancial o intencional como medio de su acción. Según el autor, el artefacto, material o simbólico, no tiene ninguna relación con el objeto al que se dirige, pero ha sido elaborado con alguna intención para transformar a un determinado objeto al cual va dirigida la acción por medio del artefacto y concreta una solución a un problema dado o a un problema social. Además, indica que el sujeto lleva consigo ciertos esquemas de uso, destrezas o habilidades que su medio le ha consignado y con los cuales se dirige al artefacto. Entonces con este conjunto de acciones se inicia el proceso de instrumentalización, en el cual el sujeto se dirige al artefacto al cual quiere conocer, movilizando sus esquemas de uso (EU).

Rabardel (1995), lo describe como un proceso de instrumentalización, referido al surgimiento, evolución y atribución de las propiedades del artefacto. Simultáneamente, mientras va manipulando el objeto, emergen los esquemas de acción instrumentada (EAI) que son aquellas acciones orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto. En nuestro caso, consideramos que los participantes llevan consigo una serie de recursos o destrezas, como propiedades de la circunferencia, cálculo de áreas de superficies poligonales, cálculo de regiones encerradas por curvas, rotaciones de objetos con cierto ángulo de rotación, usos de funciones básicos del Geogebra, los cuales corresponden a los EU. Dichos esquemas serán coordinados en conjunto para redescubrir las propiedades de las componentes de los sólidos de revolución en un ambiente de geometría dinámica, que corresponde al EAI. Ambos esquemas de utilización tienen orientaciones específicas, en un caso los EU, orientados a verificar que las propiedades de los sólidos de revolución pueden ser redescubiertas con el Geogebra, convirtiendo dichas propiedades en medios y, por otra parte, los sólidos de revolución como EAI, aplicado en otros objetos sobre los cuales este objeto le permite actuar. Por lo tanto, el instrumento no existe en sí, es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, dirigida por sus esquemas que elabora.

Metodología

Nuestra investigación es netamente cualitativa, de orden descriptivo y las actividades están dirigidas todo estudiante de nivel superior. La información que se describirá está basada en la observación de las respuestas y procedimientos de los alumnos. El taller está programado para dos sesiones de hora y media cada uno. Debido a que se hizo un análisis *a priori* de los saberes previos de los participantes, esperamos algunas destrezas en el uso del Geogebra y conocimientos de las propiedades elementales de la geometría espacial.

Descripción de la actividad

En este artículo mostraremos dos de las cinco actividades propuestas. Nos referimos en un caso, a la construcción de un cilindro haciendo girar un rectángulo sobre su propio lado y la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de los ejes cartesianos.
Tener en cuenta que, de acuerdo con Larson, R., & Edwards, B. (2010), los sólidos de revolución son sólidos que se generan al girar una región plana alrededor de un eje.

Actividad 1

Se pidió que se construya un cilindro de revolución girando un rectángulo de dimensiones 3 y 4 unidades sobre el eje X. Luego, identifique sus principales elementos como el radio de la base, la longitud de su generatriz y su volumen.

Paso1. Identificar la barra de entrada para 2D y 3D vea figura 1.
Se observa que el participante moviliza su EU de la barra de herramienta del Geogebra.

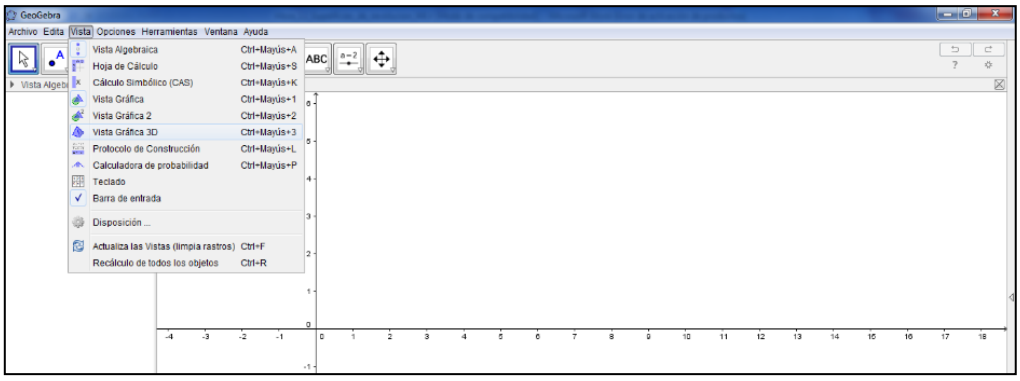


Figura1. Explorado el GeoGebra.

Luego debe movilizar otros EU que trae consigo de dicho programa, y que se muestran en la figura 2. Por ejemplo, la ubicación de los puntos en el sistema coordenado cartesiano, el ingreso de datos en la barra de entrada A (0,0), B (0,3), el trazo del polígono considerando que uno de los lados del rectángulo, es el segmento *BC* de longitud 4.
Paso 2. Dibuje en la Vista 2D un rectángulo ABCD con vértices A(0,0), B(0,3) y BC de longitud 4, además considere como eje de giro el eje X como podemos ver en figura 2.

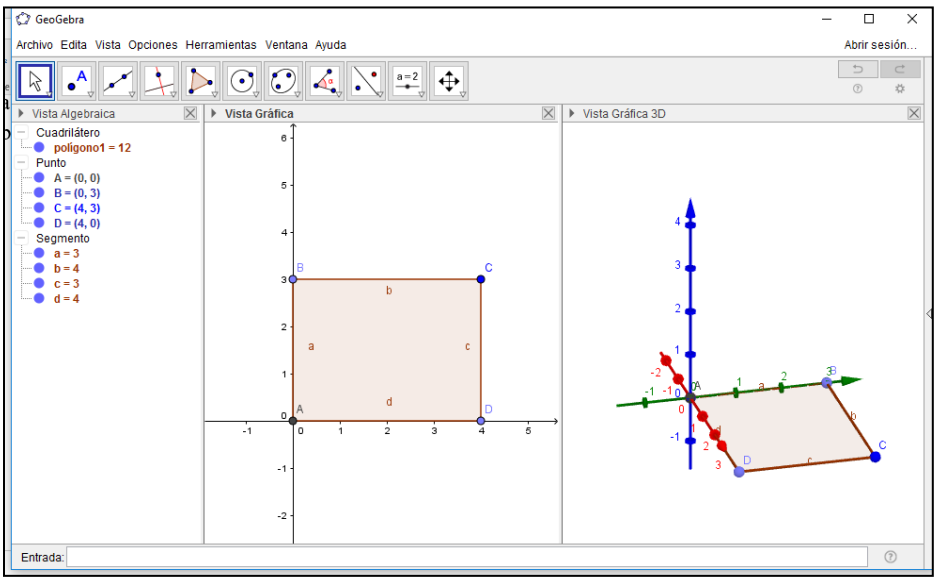


Figura 2. Rectángulo en vista 2D y 3D en el GeoGebra.

Paso 3. En 2D genere un deslizador de nombre α, con ángulo de giro hasta de 360°.
Para ello, se le indica como generar el comando deslizador, Se les explica sus funciones, como se aprecia en la figura 3 y el participante debe movilizarlo como instrumento, es decir aplicado al objeto de la actividad.

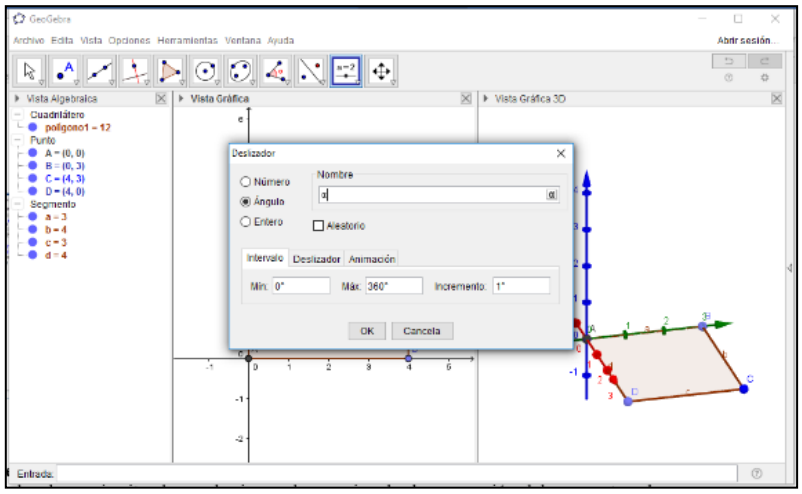


Figura 3. Insertando ángulo de giro en el GeoGebra.

Se observó, que los participantes tuvieron dificultad para internalizar el deslizador de un ángulo. Se tuvo que instrumentar dicho comando en clase. Luego los participantes, movilizaron dicho comando el cual actuó como EAI, pues fue dirigido para la rotación de un polígono, como se muestra en la figura 4 y figura 5

El deslizador es una de las herramientas que permiten la manipulación dinámica del objeto. Por ese motivo, las actividades se diseñaron teniendo en cuenta no solo el uso de esta herramienta, sino también propiciando la visualización de los contenidos.
Paso 4. En 3D genere la rotación con el comando rotación axial y modifique el ángulo a α, de animación y la figura deje rastro.

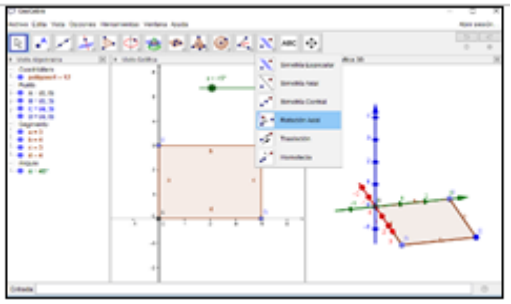


Figura 4. Rotación axial del cilindro

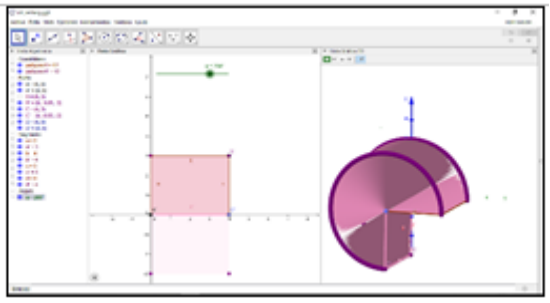


Figura 5. Generando el cilindro

Existen otros EU que los participantes movilizaron. Detallamos algunos de estos esquemas como propiedades de la circunferencia, cálculo de áreas de superficies poligonales, y volúmenes, los cuales anticipado. Por ejemplo, el volumen del cilindro se portó como un EAI pues los participantes mostraron un similar comportamiento de acciones estructuradas para determinarlo.

Los participantes midieron el radio y la altura con el uso del Geogebra y luego las relacionaron para obtener el volumen solicitado. De manera análoga, el volumen actuó como EU, cuando se le calculó haciendo uso de otro EU como el de la vista CAS (Cálculo simbólico).
Nuestro EAI, el volumen de un sólido de rotación fue movilizado en otros objetos, tal como mostramos a continuación, en la figura 6. De esta forma podremos decir que nuestro EAI evolucionó como EU, el cual junto a otros esquemas de uso EU, determinaron el sólido de revolución al rotar la región alrededor de la recta $x = 2$.

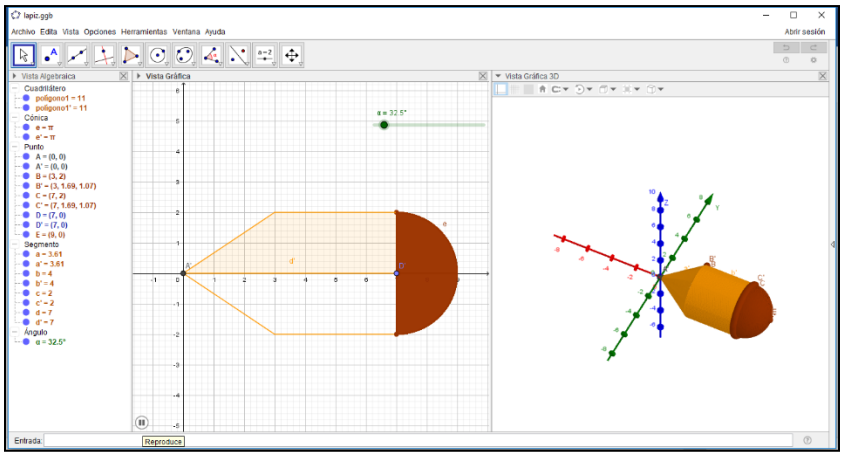


Figura 6. Rotación Axial de una región poligonal y curvo

Se inicia graficando la región. Para la simulación se procede con los pasos 4 y 5 haciendo uso de la rotación axial y de modo que se tiene el sólido de revolución que se muestra en la figura

Actividad 2

En un triángulo rectángulo de vértices A (1,1) y B (2,1) y C (2,2) se les pidió determinar el sólido que genera al rotar el triángulo rectángulo de lado AB sobre el eje X y el volumen del sólido obtenido.

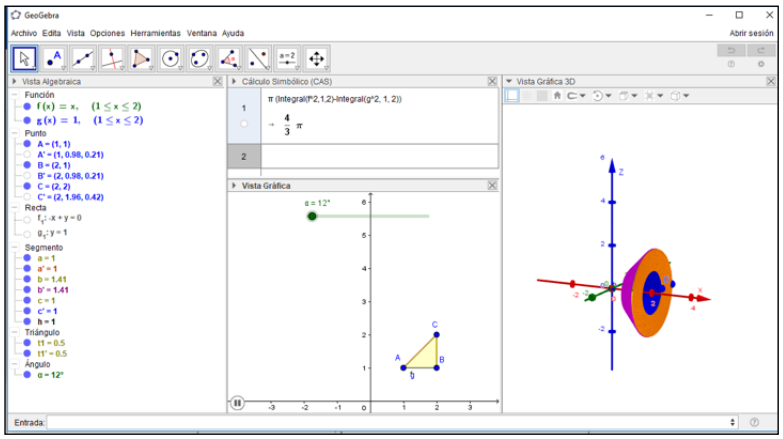


Figura 7 Sólido de revolución.

Esta actividad tiene como objetivo movilizar el EAI volumen de los sólidos de rotación como instrumento en un ambiente de geometría dinámica. Se movilizaron EU del Geogebra: ubicación de los puntos en el sistema coordenado cartesiano, el ingreso de datos en la barra de entrada A (1,1) y B (2,1) y C(2,2), el trazo del polígono y la rotación sobe el eje de abscisas. En esta oportunidad, instrumentaron la barra del deslizador, pues lograron movilizarla para generar la rotación del polígono. También se habilitó la vista CAS para determinar el volumen que es igual a $\frac{4}{3}\pi\, u^3$ como se muestra en la figura 8. Observamos que el volumen actuó como EU, pues junto a otros EU como como el de la vista CAS (Cálculo simbólico), lograron determinar el volumen del salido de rotación. Además, existen otros EU como propiedades de la circunferencia, cálculo de áreas de superficies poligonales, y volúmenes.

Reflexiones finales

Estas actividades, permitieron llevar los sólidos de rotación, a un pensamiento y lenguaje matemático, pero desde un entorno de geometría dinámica. Durante la aplicación de las actividades, se observó que el GeoGebra 3D permitió que los estudiantes descubran e identifiquen las propiedades particulares de los sólidos, los cuales formaban parte de sus EU. Cuando construyeron el sólido de revolución, lo esquematizaron como un EAI, y luego dicho esquema evolucionó a un EU que, en combinación con otros esquemas como el CAS, se movilizaron para un determinado objetivo. Se recomienda, la obtención de volúmenes con objetos de formas simétricas

Referencias bibliográficas

Castro, G (2012) *Sobre el concepto de antropotécnica en Peter Sloterdijk*. Revista de Estudios Sociales,(43), pp. 63-73. Universidad de Los Andes Bogotá, Colombia.

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Calculo 2 de varias variables*. Revisión técnica Instituto tecnológico y de estudios superiores de Monterrey, México. Mc Graw Hill Interamericana editores.

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2011. Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

MODELACIÓN Y TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

José David Zaldívar Rojas, Gonzalo Medina Ramírez, Alibeit Kakes Cruz
Universidad Autónoma de Coahuila. (México)
david.zaldivar@uadec.edu.mx, gonzalov666@hotmail.com, akakes1947@yahoo.com.mx

Resumen

La Modelación Matemática y el uso de tecnología son temas que en los últimos años se convirtieron en tendencias dentro de la investigación en Matemática Educativa. Esta importancia relacionada a dichos tópicos se debe principalmente a la evidencia brindada en diversas investigaciones que hacían ver la imposibilidad de la transferencia del conocimiento aprendido en la escuela a la vida cotidiana de los estudiantes (Arrieta y Díaz, 2015) y a las potencialidades de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, también se ha reconocido que estas categorías aunque son considerada dentro de los planes curriculares como una manera de enseñar y aprender matemáticas, aún existe una brecha importante entre las reformas curriculares y las prácticas escolares que se desarrollan día a día. Por ello, en el presente documento se presenta una situación basada en la modelación como un ejemplo de cómo es posible integrar tecnología al aula de matemáticas, resaltando la funcionalidad del conocimiento y el desarrollo de significados.

Palabras clave: modelación matemática, uso de tecnología, bachillerato, situaciones de aprendizaje

Abstract

Mathematical Modeling and the use of technology are subjects that have become tendencies within the Mathematics Education research in recent years. The relevance of these topics is closely related to the evidence provided in several inquiries that showed the impossibility of transferring the knowledge already learned at school to the daily life of students (Arrieta & Diaz, 2015) and to the potentiality of technology for the learning of mathematics, as well. However, it is recognized that although these categories are considered within the curriculum as a way of teaching and learning math, there is still a major gap between innovative curricular reforms and day-to day school practices. Therefore, this paper shows a situation based on modeling as an example of how it is possible to integrate technology into the mathematics classroom, highlighting the functionality of knowledge and the development of mathematical meanings.

Key words: mathematical modeling, use of technology, high school, learning activities

Introducción

Son innegables los esfuerzo que se han hecho por ofrecer en el aula de matemáticas nuevos enfoques que permitan a los alumnos encontrar sentido a los contenidos que reciben por parte de los docentes y a su vez

asociarlos o aplicarlos en situaciones más allá de una reproducción de técnicas o algoritmos para la solución de ejercicios estereotipados.
Lo anterior va de la mano con la necesidad de reflexionar si realmente, como profesores, estamos ofreciendo dentro del aula procesos que permitan desarrollar habilidades y destrezas que le faciliten a los estudiantes la comprensión, la asimilación y posteriormente el uso del conocimiento matemático para la solución de situaciones problemáticas dentro y fuera del aula.

Es común asociar el aprendizaje de matemáticas directamente con la solución de problemas. Alsina (2006) menciona que hay dos enfoques de problemas dentro de la clase de matemáticas: a) los problemas que son un medio para aprender matemáticas y b) los problemas como medio para enseñar. Es decir, la solución de problemas se encuentra inmersa en el aprendizaje de los alumnos y dicha solución requiere de la intervención del docente como mediador entre el saber y los alumnos. Sin embargo, y aunado a lo anterior, es necesario reflexionar sobre qué problemas o situaciones promueven el desarrollo de competencias matemáticas que permitan a los alumnos asimilar y aplicar contenidos matemáticas. Por ejemplo, la OCDE (2003) establece la siguiente directriz de competencia matemática: *"El término competencia matemática se ha escogido para enfatizar el uso funcional del conocimiento matemático en numerosas y diversas situaciones y de manera variada, reflexiva y basada en una comprensión profunda"*

Como podemos notar, la anterior cita nos lleva a reflexionar si los problemas o situaciones que presentamos a los estudiantes en aula promueven y ayudan a desarrollar y consolidar esta competencia, pero sobre todo, si promueven el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. Aunado a lo anterior, Freudenthal (1983) citado por Alsina (2007) menciona la necesidad de establecer contextos donde los problemas sean significativos para los estudiantes y los conduzca a la *matematización*, es decir, al proceso de operar y vincular la realidad a partir de ideas y conceptos matemáticos por medio de modelos.

Elementos teóricos: La modelación matemática

Según Alsina (2007), la enseñanza de las matemáticas debería estar enfocada en presentar escenarios apegados a la realidad o asociados a la vida cotidiana de los alumnos, de manera que se busque lograr captar su interés y aplicar sus conocimientos en la búsqueda de solución de situaciones problemáticas. Estos escenarios pueden ser considerados desde la Modelación Matemática (MM), la cual es un proceso cíclico que inicia con la consideración de un problema en un contexto real o problema cotidiano y que permite la creación, uso e interpretación de modelos matemáticos para la resolución de dicha situación (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007, Niss, et al., 2007). Biembengut y Hein (1999) mencionan que en el mundo real se pueden apreciar situaciones que requieren de una solución a través de las matemáticas y proponen a la MM como un elemento catalizador que permitiría vincular el mundo real con el mundo de las matemáticas. Dicho proceso permite, como se mencionó, generar modelos matemáticos, es decir, representaciones de una situación real o fenómeno donde se establecen relaciones matemáticas a partir de dichas representaciones.

Por otro lado, diversas investigaciones en Matemática Educativa cada vez enfrentan el surgimiento de nuevas tecnologías con potencialidades para su integración en el aula de matemáticas, proporcionando sin duda transformaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la misma. Actualmente, una de tales transformaciones tiene que ver con la creación de ambientes de aprendizaje donde la matemática sea

funcional y sea percibida también como una ciencia experimental, pero además, se promuevan diferentes representaciones de los conceptos matemáticos.

Ahora bien, Blum y Borromeo (2009) mencionan que la *modelación matemática* es el proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones. Aunque es un tópico que se ha discutido y propagado intensamente en la última década en estudios de la Matemática Educativa y en el currículo, en el salón de clases aún no tiene un rol protagónico. Esta brecha entre los objetivos educativos y las prácticas escolares es debido a que *la modelación es difícil tanto para los estudiantes y los maestros.*

En muchas investigaciones se afirma que a través de la modelación, la matemática se vuelve más significativa, sin embargo, la modelación se enseña poco en las prácticas escolares cotidianas. La mayoría de las veces se considera que "problemas verbales" son aquellos que pueden sustituir a la modelación, puesto que se "desnuda" el contexto, sin embargo, el objetivo principal es la *ejercitación matemática.* Sin embargo, como mencionan Niss, et al. (2007), es muy complejo encontrar actividades de modelación *genuinas* dentro del salón de clases de matemáticas.

La importancia de proponer actividades que permitan a los alumnos apropiar y aplicar conocimientos en situaciones cotidianas, nos motiva a adoptar el ciclo de modelación de Blum y Borroneo para proponer una actividad aprendizaje. Dicho ciclo es un proceso en el cual el estudiante transita al momento de buscar dar solución a una problemática asociada a un contexto cotidiano o cercano a su realidad. El proceso recorre las siguientes etapas (ver figura 1):

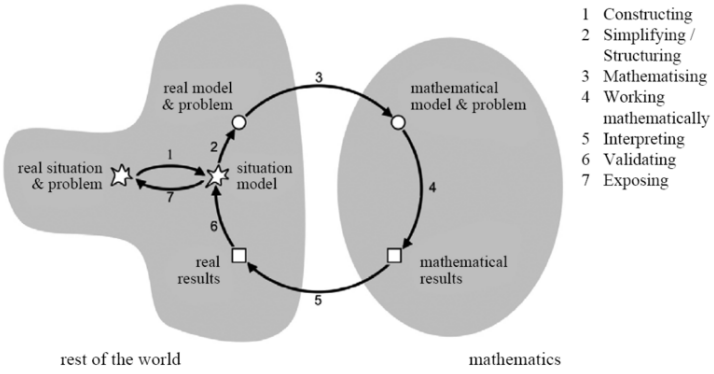


Figura 1. Ciclo de modelación (Blum y Borromeo, 2009)

En el ciclo anterior propuesto por dichos autores se pueden apreciar cinco dimensiones que son pilares del proceso de la modelación. Estas etapas inician con el planteamiento de una situación real o problema, el cual es presentado a los alumnos para que estos tomen una decisión en el marco de la problemática inicial. El segundo momento se encamina a la estructuración de una conexión con la matemática, la cual se denomina *matematización* y se utilizan diferentes representaciones, es decir se analiza la información para generar una o las diferentes relaciones entre los datos y asociación a estructuras simbólicas propiamente del orden del lenguaje matemático. El tercer elemento se enfoca en la propuesta de un modelo matemático del problema. Posteriormente se involucra en el proceso para determinar resultados matemáticos de

modelo propuesto a través de la solución de ecuaciones asociadas al modelo y en donde aparecen de manera natural resultados matemáticos. El quinto elemento está asociado al análisis e interpretación de resultados así como la validación de los mismos de acuerdo al modelo asociado a la problemática o situación real propuesta a los alumnos. En este momento es donde se requiere una reflexión y análisis propiamente del alumno en donde estos toman una decisión o proponen un juicio.

De manera particular, consideramos que la integración de una componente tecnológica beneficiaría la transformación de diferentes representaciones en los momentos 4 y 5 descritos anteriormente, lo cual creemos que permitirá una mejor comprensión de los resultados por parte de los alumnos.

Es por ello, que en el presente documento se tiene como objetivo presentar un ejemplo de situación de modelación donde se integra una componente tecnológica, y a través de su uso, discutir nociones matemáticas diversas y como un apoyo durante el proceso de modelación. Nuestra intención es proveer a los profesores de estrategias y de ejemplos plausibles para el salón de clases.

Estimando la altura de una persona: Un ejemplo de situación de modelación con tecnología

Cabe mencionar que este ejemplo que se presenta a continuación fue implementado con los asistentes a un taller durante las actividades de la RELME 30 efectuada en la Ciudad de Lima, Perú en 2017. Este ejemplo que se decidió incluir en dicho taller se basa en el proceso de MM, además de que integra una componente tecnológica que permita también construir significados y que propicia la articulación de modelos como tablas de datos, gráficas y ecuaciones. El propósito que se persiguió con el taller es que a través de situaciones de aprendizaje diseñadas con base en la Modelación, es decir, en el *uso del conocimiento matemático* como una herramienta que permita tomar decisiones, integrando además recursos tecnológicos como calculadoras, los participantes tuvieran una ventana a elementos funcionales del conocimiento matemático que en ambientes de lápiz y papel difícilmente pudiesen vivenciar (Villarreal, 2012).
El objetivo general de la Situación de modelación que se les presenta a los participantes es la de determinar la relación que existe entre la talla de una persona (altura) y la *longitud de pierna* utilizando una regla T y una escuadra. Para ello, se les plantea la siguiente situación real a los participantes:

> *El manejo nutricional de un paciente depende principalmente de un diagnóstico antropométrico, esto es, de las medidas de su cuerpo. Una de estas medidas imprescindibles al momento de una evaluación nutricional lo constituye la medida de la talla de un paciente. Por ejemplo, la altura es una de las medidas que es necesaria cuando se requiere conocer el índice de masa corporal de un paciente, que relaciona la masa con la altura e indica qué tan alejado o cercano están las personas de su peso ideal o si presentan sobrepeso.*
> *Cuando las personas no tienen ningún problema para permanecer de pie y mantener una postura derecha por un tiempo, el cálculo de la talla resulta muy sencillo; sin embargo, en condiciones de distrofia muscular o cuando la persona no puede permanecer de pie, entonces los procedimientos rutinarios no son susceptibles a continuar usándose. Es ahí cuando la medida de la altura de una persona debe ser encontrada por métodos indirectos, es decir, es recomendable que bajo ciertas condiciones, los médicos y enfermeras pudieran contar con alguna técnica que les sirva para estimar la altura de una persona cuando se presentan limitaciones físicas, clínicas o incluso de material de medición.*

Posteriormente, se les plantea la siguiente pregunta detonadora de la situación, que representa el modelo real de la situación:

> *T1. ¿Qué se te ocurre que podríamos hacer para conocer la medida de la altura de un paciente que no puede levantarse de la cama o que por cuestiones de edad, no puede mantenerse en pie?*

Las indicaciones posteriores que se le brindan a los participantes tienen por objetivo que el participante proponga un modelo matemático:

> *Intentemos contestar a la pregunta anterior utilizando un método indirecto para estimar la altura de una persona a partir de la medición de la longitud de la pierna usando para ello una regla T y una escuadra. La técnica de medición que se realizará es utilizada por enfermeras y ha sido comprobada como efectiva y la estimación conseguida es suficientemente confiable (Sierra, 2009).*
> *La longitud de pierna es una medida que se refiere a la altura talón rodilla y se basa en investigaciones de Chumlea quien propone el estudio de los huesos largos para estimar la altura, dado que dichos huesos no sufren modificaciones con la edad. El instrumento para medir la altura talón rodilla es un antropómetro, sin embargo, es un aparato muy costoso, que incluso en los hospitales y clínicas es difícil de conseguir. Sin embargo, la propuesta que realizamos consiste es medir la altura talón rodilla utilizando una regla T y una escuadra (ver figura 2).*
> *En la siguiente imagen se muestra cómo se realiza la medición de la longitud de pierna de una persona:*

Figura 2. *Medición de la longitud de pierna (tomada de Sierra, 2009; p. 16)*

Posteriormente, se les pide a los participantes que se dividan en dos equipos de trabajo, uno conformado por los varones y el otro por las mujeres, dado que el sexo determina datos diferentes. Reunidos en esos dos equipos, se pide a los participantes realizar las mediciones de la *longitud de pierna* de cada uno de los miembros de los equipos.

Posteriormente a la medición de las *longitudes de pierna* de cada uno de los miembros de los equipos, se pide calcular la altura de los mismos. Notemos que la intención es construir un modelo basado en las características de los miembros del grupo que permita predecir la altura de una persona conociendo únicamente su longitud de pierna. Para ello, con los datos obtenidos se les pide completar la siguiente tabla:

Longitud de pierna(cm)						
Altura(cm)						

Posteriormente, con ayuda de la tecnología, que en este caso se puede utilizar la calculadora Classpad400, se determina un modelo que mejor se ajusta a los datos reales obtenidos de los participantes. La intención es que los participantes encuentren que la relación que existe entre la longitud de pierna y la altura es lineal, con lo cual se crearía un primer modelo matemático de la situación basado en una tabla de valores. A manera de ejemplo, presentamos la pantalla de la calculadora Classpad 400 donde es posible analizar los datos recabados posteriormente a la medición por parte de los participantes de las longitudes de pierna y alturas. En dicha imagen, se puede apreciar la tabla que es posible generar con la calculadora y que permite trabajar en una representación tabular de la situación, con la intención de transformar dichos datos, aprovechando la integración de la tecnología, a una representación gráfica de los datos obtenidos (figura 3).

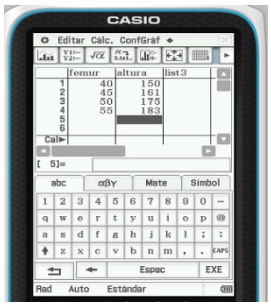


Figura 3. Ejemplos de datos recabados por los participantes y la representación en tablas

Posteriormente se les pide a los participantes qué con ayuda de la calculadora, visualicen dichos datos como parejas ordenadas en un plano cartesiano. Como podemos notar, la tecnología potencia el uso de diferentes representaciones y un diálogo entre estas. Acá conviene que los participantes reflexionen sobre las variables involucradas y el tipo de comportamiento que se establece entre las mismas. Los participantes podrán visualizar algo como lo mostrado en la siguiente figura 4.

Figura 4. Representación tabular y gráfica de los datos recabados

Por medio de un análisis de regresión lineal dado el comportamiento observado de los datos, se obtienen nuevos modelos matemáticos de la situación, involucrando ahora ecuaciones y una recta continua (ver figura 5 y 6):

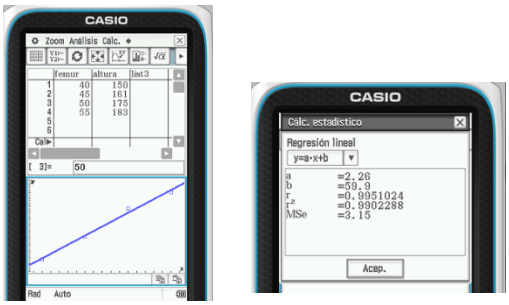


Figura 5 y 6. La recta de regresión y los parámetros de la misma

Por último se solicita a los participantes que reinterpreten el resultado obtenido en términos del problema planteado y la manera en la cual dichos resultados pueden aportar elementos para tomar una decisión sobre cómo poder estimar la altura de una persona con las condiciones planteadas en la situación problema inicial que detonó el estudio de las relaciones, cerrando de esta manera el ciclo de modelación planteado en los elementos teóricos discutido.

Comentarios finales

En los apartados anteriores se propone un ejemplo de una situación de modelación cuyo objetivo principal es que los participantes desarrollen modelos matemáticos para la discusión de una situación problema que se les plantea y que tiene que ver con estimar una medida de una manera indirecta; práctica que es muy común en diversas disciplinas científicas. La intención es que los participantes vivencien el proceso de modelación para la toma de decisiones y que por medio de la tecnología, se simplifique, se estructure, se precisen datos y relaciones y se establezcan suposiciones de entrada en el dominio extra-matemático y cómo esto se traduce a un lenguaje matemático que tendrá que ser reinterpretado y validado. De manera que dichas relaciones anteriores dentro del proceso de modelación es lo que sustenta el diseño de las situaciones de aprendizaje.

Esperamos que con este ejemplo se pueda vislumbrar la importancia de la Modelación matemática dentro de las prácticas escolares y que los docentes puedan tomar como referencia dicho ejemplo para potencializar el desarrollo del pensamiento matemático a través de la vivencia de situaciones más cercanas a los estudiantes donde la matemática es una herramienta para la toma de decisiones.

Agradecimientos

Este manuscrito presenta algunos resultados en el marco del Proyecto PRODEP "Laboratorio de Innovación y didáctica de las Matemáticas con Tecnologia". Folio: UACOAH-PTC-405, Carta de Liberación: DSA/103.5/16/10616

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2006). ¿Para qué sirven los problemas en la clase de matemáticas? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas,* 43, 113-118.

Alsina, A. (2007*).* Si enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes*. Revista iberoamericana de educación,* 43, 85-101.

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), p. 19-48.

Biembengut, M. y Hein, N (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45-58.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

OCDE (2003). *Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas.* Marcos teóricos de PISA 2003 recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/Marco_de_referencia_evaluacion_version_espanol.pdf

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Part 1. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, p. 3-32. New York: Springer.

Sierra, M. (2009). Estimación de la talla, adaptando la técnica de medición altura talón-rodilla con regla y escuadra. *Revista Enfermería Universitaria ENEO-UNAM, 6*(3), 14-20.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia, 3*(5), 73-94.

NIVELES DE RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE LA NOCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Jaime Israel García García[1]; Elizabeth Hernández Arredondo[2]
[1]Universidad Autónoma de Guerrero, [2]Universidad Latina (México)
jaime.garcia.matedu@gmail.com, ehernandeza@unila.edu.mx

Resumen

El presente trabajo analiza el desarrollo del razonamiento probabilístico que muestran estudiantes de bachillerato a través de sus respuestas a una tarea referida a una situación inscrita en el tema de distribución binomial. El problema consiste en predecir el comportamiento de sorteos de tipo binomial (n = 2, p = ½) con el fin de observar si los estudiantes perciben y consideran dos aspectos elementales: la variabilidad y la distribución de los resultados. Las respuestas se analizaron bajo la taxonomía SOLO; es decir, se organizan en cuatro categorías: preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional. En general, los jóvenes muestran un mejoramiento en su razonamiento probabilístico apoyado por el uso de la simulación física y computacional.

Palabras clave: razonamiento probabilístico, distribución binomial, taxonomía SOLO

Abstract

This work analyzes the development of the probabilistic reasoning that high-school students show through their responses to a task involving a situation of binomial distribution. The problem consists in predicting the behavior of binomial-type distribution (n = 2, p = ½) to observe whether students perceive and consider two basic aspects: variability and result distribution. The responses were analyzed according to the SOLO taxonomy; that is, they are organized in four categories: pre-structural, mono-structural, multi-structural, and relational categories. Overall, the students show improvement in their probabilistic reasoning supported by the use of physical and computational simulation

Key words: probabilistic reasoning, binomial distribution, SOLO taxonomy

Introducción

El desarrollo del razonamiento probabilístico es uno de los objetivos importantes de la educación matemática de los niveles básicos y pre-universitarios (Jones, Langrall y Mooney, 2007); mientras que la binomial es la distribución discreta más importante que se estudia en el curso de probabilidad de bachillerato. No obstante, se han hecho pocas exploraciones sobre problemas que intenten desarrollar el razonamiento probabilístico tomando como punto de partida el concepto de distribución, en particular, la binomial (García y Sánchez, 2013).

Este estudio presenta una exploración sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico que muestran estudiantes de bachillerato, que no han sido introducidos al estudio formal de la probabilidad y la estadística, tomando como punto de partida la noción de distribución binomial en su forma más simple, cuando se hacen simulaciones físicas (monedas) y computacionales (Fathom). Este interés surge de una de las once preguntas formuladas por Pfannkuch y Reading (2006) para el desarrollo de la noción de distribución: "¿Cómo se desarrolla el razonamiento acerca de distribuciones desde sus formas o aspectos más simples a unos más complejos?"

Fundamentos

La distribución binomial es una de las distribuciones discretas más importantes de probabilidad que se prescribe en los programas de estudio de bachillerato; en gran parte, por sus aplicaciones en la inferencia estadística y por su estrecha relación de convergencia con la distribución normal.
La enseñanza de esta distribución tradicionalmente se enfoca en lograr que los estudiantes sepan obtener la fórmula y aplicarla en la resolución de problemas. Sin embargo, aunque aprendan la fórmula y la apliquen de manera eficiente, se ha mostrado que éstos no son capaces de razonar con, y acerca de, esta distribución (Landín, 2014).
El razonamiento alrededor de la distribución binomial requiere articular varios conceptos de probabilidad, como espacio muestral, variable aleatoria, probabilidad, independencia, combinatoria, aleatoriedad, variabilidad y distribución; siendo estos tres últimos los que se presentan en su forma más elemental en la actividad que realizaron los estudiantes. Es muy difícil que éstos estructuren dichas nociones mediante el enfoque clásico que enfatiza sólo en el aprendizaje de la fórmula, por lo que es necesario buscar formas alternativas de introducir el tema. Desde un enfoque constructivista es importante explorar lo que los estudiantes saben y la manera en que razonan, pues a partir del conocimiento resultante se podrán observar las formas alternativas de la enseñanza del tema.

Marco Conceptual

Este estudio optó por establecer un marco conceptual apoyado en las posturas de Jabareen (2009) y Miles y Huberman (1994), quienes declaran que este explica, ya sea en forma gráfica o a través de una narración, las principales cosas que van a ser estudiadas y las supuestas relaciones entre ellas, restringiéndose sólo a los principales conceptos que permiten entender a éste; en particular, la *Distribución binomial*, como el contenido probabilístico cuyo aprendizaje se explora; el *Razonamiento probabilístico*, como la forma en que los estudiantes unen y transforman sus ideas previas sobre probabilidad para construir el concepto de distribución binomial; y finalmente, la *Taxonomía SOLO*, como un método que nos permite analizar los razonamientos de éstos mediante la jerarquización de las respuestas que dan a las tareas.

a) *Distribución binomial*. El caso más simple de una *distribución binomial* (diferente a la Bernoulli) se presenta cuando sus parámetros son n = 2 y p = ½; este es el modelo de probabilidad de un gran número de experiencias aleatorias, en especial, la de lanzar dos monedas (o equivalentemente dos veces una moneda) y observar el número de 'águilas' [nombre popular de una cara de las monedas mexicanas] que ocurren. La distribución binomial B(x, 2, ½) se representa fácilmente mediante una tabla, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Representación tabular de la distribución B(x, 2, ½)

Distribución binomial B(x, 2, ½)			
X	0	1	2
P	¼	½	¼

Cabe destacar que las tareas de este estudio no se enfocan en el manejo adecuado del algoritmo de la distribución binomial; sino en el descubrimiento de relaciones de tipo estructural que subyacen a una situación binomial por parte de los estudiantes.

b) *Razonamiento probabilístico*. Se entiende por razonamiento al proceso de formular juicios o afirmaciones a partir de otras proposiciones ya conocidas u observaciones de un fenómeno. Bakker y Derry (2011) mencionan que las personas forman conceptos como consecuencia de su participación en actividades sociales de dar y pedir razones, es decir, gracias al razonamiento se configuran y consolidan sus conceptos. En consecuencia, es conveniente proponer tareas que propicien el razonamiento matemático de los estudiantes.
En el campo de la probabilidad, es necesario proponer tareas en situaciones de incertidumbre que logren captar el interés de los estudiantes, que lo enfrenten a algunas 'grandes ideas' de la probabilidad (Gal, 2005) y que le exijan realizar razonamientos probabilísticos; tales tareas deben involucrar a los estudiantes en procesos de estimación de la propensión de ocurrencia de eventos, y de su predicción y representación, y no restringirse sólo a problemas de cálculo (García, Medina y Sánchez, 2014). Particularmente, miramos el razonamiento probabilístico sobre la noción de distribución binomial como la forma en que los estudiantes unen y transforman sus ideas previas sobre probabilidad para desarrollar dicho concepto.

c) *Taxonomía SOLO*. Una manera de describir el razonamiento acerca de la distribución binomial, desde sus formas o aspectos más simples a otras algo más complejas, es analizando y organizando en una jerarquía las respuestas de los estudiantes a una tarea. Por ejemplo, Jonas, Langrall, Thornton y Mogill (1997) generaron y validaron una jerarquía cuyo objetivo es caracterizar el razonamiento probabilístico de los estudiantes de primaria, tomando como base el modelo de Biggs y Collis.

La taxonomía SOLO (Structure of the Observed Learning Octcome) desarrollada por Biggs y Collis (1991), es un instrumento diseñado para evaluar la calidad de aprendizaje de los estudiantes en una amplia variedad de situaciones escolares, en la mayoría de áreas temáticas, que permite identificar elementos de conocimiento que éstos utilizan como recursos para formar razonamientos; también, ha sido la base para construir jerarquías de comprensión o razonamiento en probabilidad y estadística. En este estudio se utiliza la taxonomía SOLO como una herramienta para analizar y organizar las respuestas de los estudiantes en niveles estructurales; es decir, se categorizan en: preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional.

Metodología

Participantes. Treinta y siete estudiantes de un grupo de primer semestre (15-16 años) del CCH-UNAM y el profesor titular del grupo. Los estudiantes no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal de probabilidad y estadística; además, no recibieron información respecto el propósito del estudio.

Instrumento. Se diseñó una actividad con 13 tareas, llamada *"A la suerte"*. El problema consiste en predecir el comportamiento de sorteos de tipo binomial (n = 2, p = ½) con el fin de observar si los estudiantes perciben y consideran aspectos de dos elementos principales, a saber: la variabilidad y la distribución de los resultados (0, 1, 2). Para realizar dichas tareas los estudiantes contaron con el uso de objetos manipulables (monedas) y un software educativo de estadística (Fathom), con el fin de realizar simulaciones referentes al número de 'águilas' obtenidas en el lanzamiento de dos monedas. Por las limitaciones de espacio, en este informe sólo se expondrá y comentará una tarea de la actividad, cuya finalidad era predecir si Ana, Beto y Carlos podían tener la misma frecuencia de éxito a largo plazo (ver Tabla 2).

Tabla 2. Situación y tarea de estudio

Situación *A la suerte*	Tarea de predicción
Ana, Beto y Carlos juegan al lanzamiento de dos monedas para decidir qué programa de la televisión verán. Si no sale ninguna 'águila', gana Ana; si sale exactamente una 'águila', gana Beto; y si salen dos 'águilas', gana Carlos.	¿Cuántas veces crees que gana Ana, Beto, y Carlos si el juego se repitiera 1000 veces? Número de veces que gana Ana (0 águilas) = _____ Número de veces que gana Beto (1 águila) = _____ Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = _____

Procedimientos. El estudio consistió en cuatro etapas, en las que los estudiantes: 1) contestaron el cuestionario previo de la actividad para conocer su nivel de razonamiento intuitivo frente a la situación binomial, 2) desarrollaron una actividad guiada que consistía en utilizar objetos manipulables (monedas) para propiciar una familiarización con la situación, 3) desarrollaron otra actividad guiada que consistía en utilizar el software con el fin de simular 1000 veces el resultado de la variable aleatoria binomial de la situación en repetidas ocasiones, y 4) contestaron un cuestionario posterior, con las mismas tareas del previo, para conocer su nivel de razonamiento adquirido después de las actividades de simulación.

Análisis y resultados

Las respuestas de los estudiantes se organizan de acuerdo a su complejidad estructural, bajo el supuesto de que entre mayor es ésta, mejor la calidad de la respuesta. Para hacerlo se ha tenido como guía la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991). Mediante un análisis comparativo de las respuestas, se

identifican los elementos o componentes que utilizan, es decir, los diferentes conceptos y/o procedimientos que emplean en su resolución. Con base en la identificación de tales componentes, se definen niveles crecientes de complejidad estructural intentando aplicar el esquema expuesto en el marco conceptual. La Tabla 3 presenta los niveles jerárquicos de la taxonomía SOLO, y la descripción de cada uno de ellos, que se determinaron de acuerdo a las respuestas de los estudiantes a la tarea en cuestión.

Tabla 3. Niveles jerárquicos para la tarea de predecir el comportamiento de sorteos de tipo binomial

Nivel	Descripción de tipo de características que presentan las respuestas para su clasificación
Preestructural	• Proporcionan frecuencias cuya suma no corresponde al número de sorteos • Proporcionan frecuencias que no reflejan la forma de la distribución ni la variabilidad del fenómeno
Uniestructural	• Proporcionan frecuencias que corresponden a los valores esperados • Proporcionan frecuencias que reflejan la forma de la distribución: mayor frecuencia al evento de obtener un águila, y menores frecuencias a los eventos de obtener ninguna águila y dos águilas • Proporciona frecuencias que reflejan la aleatoriedad del fenómeno: frecuencias que se presentan de manera desordenada
Multiestructural	• Proporcionan frecuencias que reflejan tanto la forma de la distribución (favorece al evento más probable) como la variabilidad (al proporcionar frecuencias distintas a los valores esperados), sin relacionarlas de manera adecuada al proporcionar frecuencias algo improbables que sucedan
Relacional	• Proporcionan frecuencias que reflejan tanto la forma de la distribución (favorece al evento más probable) como la variabilidad (al proporcionar frecuencias distintas a los valores esperados), relacionarlas de manera adecuada al proporcionar frecuencias probables que sucedan, es decir, con una desviación de 50

Notas:

1) Las frecuencias esperadas son números de referencia alrededor de los cuales estarán las frecuencias reales obtenidas de la realización efectiva de un gran número de sorteos. En nuestro caso, si consideramos la B (x, 2, 1/2), 1000 sorteos, y pensamos en la frecuencia con la que ocurren cada uno de los resultados: 0, 1 y 2: la frecuencia esperada de 0 es 250; la frecuencia esperada de 1 es 500; y la frecuencia esperada de 2 es 250.
2) Mediante una simulación estadística en Fathom, se generan 1000 valores de la variable aleatoria y se cuenta la frecuencia de cada resultado (0, 1, 2) observando sus diferencia con las frecuencias esperadas. Este proceso se repite un gran número de veces (digamos 1000 otra vez) y se observa la distribución de las diferencias. Se toma un valor en el que el 95% de las veces el intervalo, con centro la frecuencia esperada y radio el valor tomado, contenga a las frecuencias reales; por lo que consideramos adecuada una desviación de 50.

En la Tabla 4 se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento, seguida de una breve justificación sobre esta clasificación.

Tabla 4. Ejemplificación de acuerdo a nivel de razonamiento

Nivel de razonamiento	Respuesta del estudiante	Descripción
Preestructural	Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 300 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 550 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 250	Proporciona frecuencias cuya suma no corresponde al número de sorteos.
Uniestructural	Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 270 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 460 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 270	Proporciona frecuencias correspondientes a los valores esperados, sin mostrar sensibilidad a la variabilidad.
	Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 250 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 500 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 250	Proporciona frecuencias destacando únicamente la forma de la distribución.
	Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 500 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 400 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 100	Proporciona frecuencias que se presentan de manera desordenada sin reflejar la forma de la distribución.
Multiestructural	Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 300 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 600 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 100	Proporciona frecuencias que reflejan tanto la distribución como la variabilidad; sin embargo, son algo improbables que sucedan.
Relacional	Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 200 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 550 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 250	Proporciona frecuencias probables que sucedan considerando la forma de la distribución y la variabilidad.

En la Tabla 5 se muestran las frecuencias de respuesta por nivel de razonamiento a la tarea en el cuestionario previo y posterior.

Tabla 5: Frecuencias de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a los niveles de razonamiento

Cuestionario	Nivel de razonamiento				Total
	Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional	
Previo	18	13	3	2	36*
Posterior	6	14	7	9	36*
* Un estudiante no responde la tarea.					

Las frecuencias de respuestas de la tarea muestran una mejoría del cuestionario posterior al previo. En el cuestionario previo, la mayoría de las respuestas de los estudiantes se ubicaron en los niveles preestructural y uniestructural, dieciocho respuestas presentan inconsistencia o aspectos irrelevantes a la tarea; mientras que en trece se considera la variabilidad o la distribución de los resultados de manera aislada. Después de las etapas de simulación, se observa una mejora, nueve respuestas se ubicaron en el nivel relacional, presentan una relación adecuada entre la distribución y la variabilidad al mostrar frecuencias probables que sucedan, con una desviación de 50; mientras que siete respuestas se clasificaron en el nivel multiestructural, consideran tanto la distribución (mayor frecuencia de ocurrencia en el valor central que en sus valores extremos) como la variabilidad (frecuencias distintas a los valores esperados), pero no logran relacionarlas de manera adecuada al proporcionar frecuencias algo improbables que sucedan.

Estos razonamientos probabilísticos informales que muestran los estudiantes en sus respuestas, se basan en ideas que generaron durante las actividades de simulación y no emanan de la aplicación de alguna definición, puesto que ninguna se introdujo o se explicó durante la intervención. No es posible afirmar esto con certeza, pero el proponer una distribución con la forma y variabilidad adecuada, ya es un indicio de que el estudiante comienza a entender, de manera informal, la noción de la binomial.

Discusión y conclusiones

Durante la realización de las actividades del estudio, los estudiantes no recibieron instrucción formal sobre el concepto de distribución binomial y no se les mencionó como responder las tareas; sólo se les proporcionaron indicaciones de cómo llevar a cabo las simulaciones, y con lo observado, se les solicitó responder nuevamente las preguntas de la situación *A la suerte*. El desarrollo del razonamiento probabilístico permitió observar la presencia de distintos elementos de la distribución binomial que influyen en los niveles jerárquicos: aleatoriedad, variabilidad, distribución.

En el cuestionario previo, la mayoría de los estudiantes espontáneamente no proporcionan de manera adecuada la gráfica de frecuencias de los sorteos de tipo binomial; pero con la ayuda de las simulaciones, en particular con la computacional, logran hacerlo aceptablemente, perciben la aleatoriedad de la situación y llegan a asociarla con su idea de frecuencia esperada, esto permite un razonamiento adecuado de la variabilidad relacionada con la distribución binomial. En consecuencia, las respuestas del cuestionario posterior fueron clasificadas en niveles más altos de razonamiento que las respuestas del previo, éstos propusieron distribuciones que cumplen con la forma de la distribución y la variabilidad, lo que indica un avance general del razonamiento probabilístico de los estudiantes. Enfatizamos este aspecto porque

consideramos que una comprensión adecuada de la noción de distribución binomial nunca debe separarse de la idea de que expresa un fenómeno de incertidumbre, en cuyas manifestaciones (repeticiones de sorteos de acuerdo a la distribución) se debe reflejar la variabilidad.

En conclusión, la noción informal de distribución binomial que logran desarrollar los estudiantes mediante el uso de la simulación, en especial con la computacional, puede considerarse como un complemento a los aspectos relacionados con el cálculo formal. Con estas actividades los estudiantes notaron la forma de la distribución y la variabilidad como rasgos característicos de esta distribución.

Referencias bibliográficas

Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben–Zvi & J. Garfield (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Gal. I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.

García, J. & Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación básica de variable aleatoria y distribución. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 417-424). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España.

García, J. I., Medina, M., & Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 5-23.

Jabareen, Y. (2009). Building a conceptual framework: Philosophy, definitions, and procedure. *International Journal of Qualitative Methods, 8*(4)*,* 49-62.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational studies in Mathematics*, *32*(2), 101-125.

Jones, G.A., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in probability. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909-955). Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.

Landín, P. (2014). *Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Miles, M. & Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis. An expanded sourcebook.* London, UK: Sage Publications.

Pfannkuch y Reading (2006). Reasoning about distribution: a complex process. *Statistical Education Research Journal, 5*(2), pp. 4-9.

LA TRAYECTORIA COMO MODELO DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

María Isabel Toribio Rodríguez, José Trinidad Ulloa Ibarra
Universidad Autónoma de Nayarit (México)
Isa 0293@hotmail.com, jtulloa@uan.edu.mx

Resumen

El presente reporte es parte de una investigación iniciada en una estancia de verano científico del programa Delfín en Acapulco, Guerrero. Reportamos evidencias de cómo estudiantes de nivel medio superior construyen herramientas gráficas, numéricas y algebraicas al modelar el movimiento a partir del análisis de un video digital del movimiento pendular, utilizando diseños de aprendizaje. El empleo de tecnologías es relevante. La perspectiva teórica que soporta nuestra investigación es la Socioepistemología. Abordando además aquella problemática que surge de la disociación entre las prácticas de la matemática escolar y las prácticas del uso de las matemáticas en las distintas comunidades (Arrieta, 2003).

Palabras clave: trayectoria, modelo, movimiento, armónico

Abstract

The present report is part of an investigation that started in a scientific summer stay of the Dolphin program in Acapulco, Guerrero. We report evidence on how senior high school students construct graphical, numerical and algebraic tools by modeling movement from the analysis of a digital video of the pendulum movement, using learning designs. The use of technologies is relevant. The theoretical perspective that supports our research is Socio-epistemology. We also focus on the problem that arises from the dissociation between the practices of school mathematics and the practices of the use of mathematics in the different communities (Arrieta, 2003).

Key words: trajectory, model, movement, harmonic

Introducción

La problemática que aborda el presente proyecto es la que se deriva de la separación de lo que se hace en la escuela, particularmente en el aula de matemáticas, de lo que se hace en su entorno (Méndez y Arrieta, 2007). Nuestro planteamiento asume que la modelación pueda establecerse como un puente que vincula estos dos escenarios. Para ello nos proponemos estudiar cómo modelan el movimiento estudiantes de nivel medio superior, que herramientas matemáticas construyen para este fin, que procesos desarrollan y que argumentos esgrimen para justificar sus acciones. Nuestra tesis principal es que los actores construyen herramientas cercanas y útiles para su quehacer no solo en la escuela sino también fuera de ella.

La problemática de investigación

Se aborda el análisis de las concepciones de los estudiantes sobre el movimiento armónico simple y la manera en la que llegan a realizar prácticas con base en la modelación matemática. Para ello nos planteamos como objetivo general del presente trabajo el analizar no únicamente en como aprende el alumno, sino en observar cómo hace para aprender; las prácticas utilizadas que lo llevan a la construcción de lo senosoidal articulando los modelos numérico, gráfico y algebraico con el fenómeno del Movimiento Armónico Simple.

Los objetivos específicos son:
1. Analizar las prácticas del movimiento pendular que se realizan en el bachillerato
2. Deconstruir las prácticas
3. Elaborar diseños de aprendizaje para modelar el movimiento armónico simple
4. Validar los diseños de aprendizaje propuestos.

Nuestra pregunta de investigación es, ¿Qué herramientas matemáticas utiliza y cómo argumenta el estudiante de bachillerato la modelación del movimiento armónico simple, al utilizar diseños de aprendizaje?

Fundamentos teóricos

La investigación se enmarca en la socioepistemología, perspectiva teórica que concibe al sistema escolar como sistema complejo inmerso en su entorno social. La socioepistemología es una perspectiva multidimensional que hace énfasis en la naturaleza social del conocimiento, con la cual podemos analizar cómo los actores sociales construyen, en contextos sociales concretos, sus conocimientos, sus realidades y por ende su identidad (Arrieta, 2003). Este énfasis en lo social trastoca el sentido tradicional otorgado a las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica, dando una visión situada del aprendizaje, los conocimientos y la didáctica. La componente cognitiva considera al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos cognitivos que se han desarrollado socialmente.

Desde la visión vigotskiana, el aprendizaje implica entendimiento e internalización de los símbolos y signos de la cultura y grupo social al que se pertenece, los principiantes se apropian de las prácticas y herramientas culturales a través de la interacción con los miembros que tienen más experiencia.

Uno de los métodos que permite describir estos mecanismos es la modelación, la cual constituye un método cognoscitivo en el que el objeto en estudio es reemplazado con otro, llamado modelo, que cumple con relación al primero unas condiciones de analogía. Después de reemplazar el original por su modelo, el modelo es estudiado y analizado.
En lo referente a la dimensión didáctica consideramos primordial la función de las interacciones en el aula, entre un sujeto experto (o más experimentado en un dominio) y otro novato (o menos experto), con el fin de que el sujeto menos experto se apropie gradualmente del saber del experto. Ello nos conduce a que el rol central del profesor es el de actuar como mediador o intermediario entre los contenidos del aprendizaje y la actividad constructiva que despliegan los alumnos para asimilarlo.

En epistemología los modelos son la forma de explicar la realidad, ejemplos de esto son: el modelo de mecánica newtoniana, el cuántico de Maxwell y el relativista de Einstein.
Cantoral y Farfán (2003a) consideran a los sistemas sociales como sistemas complejos donde los humanos aprenden al ejercer prácticas. En el sistema escolar, que es el lugar que se atiende, confluyen dimensiones que sistémicamente relacionadas conforman un todo.
Cantoral y Farfán (2003b, p. 30) en un intento de caracterizar a la Socioepistemología, escriben que es una "aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza".

En otras palabras, en la Socioepistemología encontramos cuatro dimensiones, lo epistemológico, relativo a las prácticas que dan origen a la construcción del conocimiento; lo cognitivo, al proceso de construcción del conocimiento por los alumnos; lo didáctico, que se relaciona a las formas de intervención en los sistemas escolares; y lo social, acerca de cómo se desarrollan y viven en nuestro entorno las prácticas que dan lugar a los conocimientos (Figura 1).

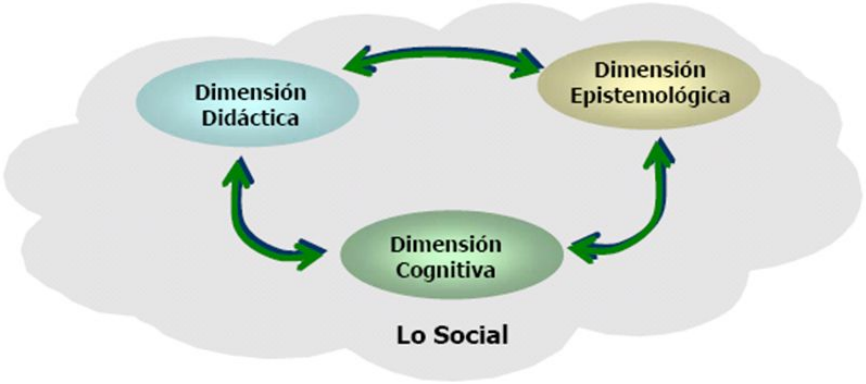


Figura 1: Ámbito social, el lugar donde se sitúan las dimensiones didáctica, cognitiva y epistemológica.

Las dimensiones que son consideradas en este todo tienen que ver con la naturaleza social del conocimiento, su formación histórico cultural, la producción y reproducción social del mismo, esto es, la dimensión epistemológica; la cognitiva, con relación a las interacciones que da lugar el proceso de aprendizaje, las interacciones entre los actores y las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, la didáctica; que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos (Arrieta, 2003).

Existen diversas concepciones de modelo y la modelación, por ejemplo: el modelo como una representación matemática y por ende la modelación como un proceso representacionista (Mochón, 1997) o bien la modelación como una forma de actividad necesaria para la reconstrucción de significados matemáticos (Cordero y Suarez, 2005).
Desde nuestra perspectiva la modelación, es una práctica social que al ser ejercida por los estudiantes son conducidos a construir modelos matemáticos como herramientas para predecir, así estos modelos son

utilizados para determinar el comportamiento del fenómeno estudiado y de esta manera, un modelo gráfico sería una herramienta para, por ejemplo, predecir comportamientos y no la representación de un fenómeno. La solución de actividades de problemas abiertos y de modelación permite a los estudiantes aprender a hacer las preguntas adecuadas, las hipótesis y las predicciones necesarias en una situación problema, así como diseñar experimentos, analizar datos y comunicar resultados.

Es por eso que, para la creación del diseño de aprendizaje en este trabajo, así como para su análisis, interpretación y valoración, se tomó como soporte teórico a la socioepistemología.

La idea es que los estudiantes a través de la modelación del movimiento armónico simple pongan en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas (aprovechando sus conocimientos en física y matemáticas) para dar solución; que a lo largo de cada actividad sugieran hipótesis, planteen modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en cuestión; que manejen términos matemáticos y mediante la revisión, la reflexión, la aplicación de sus conocimientos y la comunicación de sus resultados, los estudiantes se percaten de los alcances de su conocimiento y de sus necesidades de nuevo conocimiento en la explicación de fenómenos de interés.

Aspectos metodológicos: el diseño experimental

La metodología utilizada para el desarrollo del trabajo es la Ingeniería Didáctica descrita por Farfán (1997), con las adecuaciones necesarias para la puesta en escena de las actividades propuestas en las que se toma como base de los diseños las prácticas sociales de la comunidad en la que se aplicaron.

Por esto, el análisis de la puesta en escena de los diseños reportados aquí se hace atendiendo más a estas particularidades, es decir, no atendiendo de forma genérica si se coincidió con lo planteado en el análisis predictivo, sino las formas particulares que adquieren las confrontaciones de las participaciones de los actores con el análisis predictivo.

La metodología a emplear, comprende cinco fases:

1. Estudio de las prácticas en comunidades específicas
2. Estudio del sistema escolar donde se interviene, incluye un estudio de las prácticas escolares
3. Elaboración de diseños de aprendizaje basados en las prácticas estudiadas
4. Puesta en escena de los diseños y análisis de la actuación de los participantes
5. Elaboración de conclusiones.

La validación de los diseños está basada en la confrontación del análisis predictivo y el análisis de las producciones de los actores.

Materiales y métodos

Se experimentó con un grupo de estudiantes de nivel medio superior y se analizaron las evidencias de la puesta en escena del diseño de aprendizaje. El grupo con el que se trabajó está conformado por 25 estudiantes del IV semestre del Centro de Estudios Tecnológicos del Mar No. 26 en San Blas, Nayarit.

La actividad consiste en llevar al aula una actividad de movimiento armónico simple para inducir al estudiante a vivir la situación para que pueda construir modelos del citado movimiento en interacción con sus compañeros y con el profesor.

Las actividades planteadas a los estudiantes van encaminadas a dar significación a los objetos matemáticos de la función seno en problemas de contexto donde se relacione el movimiento armónico simple, como en el movimiento de un péndulo y el movimiento de un columpio.

La primera actividad que se pide a los estudiantes es la de dibujar la gráfica que represente el recorrido, la velocidad y aceleración que tendrá el movimiento de un columpio de manera individual. La segunda actividad es la misma pero en este caso se realiza en equipo.
Después de haber llevado a cabo dichas actividades tanto individual como en equipo, se llevaron al aula los datos obtenidos de la situación en donde el alumno crea un péndulo con lo que está a su alcance, grabando el movimiento del péndulo que el mismo creó, solo una vez. El video lo carga en el programa Tracker para trabajar con este, Tracker es un programa gratuito de análisis de video y construcción de modelos el cual le permite obtener datos sobre la posición, velocidad, aceleración, etc. La modelación en video de Tracker es una nueva y poderosa forma de combinar videos y modelación en computadora.

Luego los datos obtenidos con el Tracker son utilizados en GeoGebra con el que los alumnos pueden encontrar el modelo algebraico que representa el movimiento del péndulo.

El software GeoGebra permite hacer simulaciones y manipulaciones de las variables y parámetros que intervienen en las situaciones planteadas, lo que permite un acercamiento visual de la manera en la que influyen los diferentes parámetros con lo que se da riqueza a los significados, además de que simplifica los cálculos rutinarios.

Para finalizar, el docente facilita al estudiante un simulador (Figura 2) basado en el GeoGebra en donde se muestra de manera dinámica el movimiento de un péndulo y que está diseñado para permitir ver de manera clara la influencia de los parámetros.

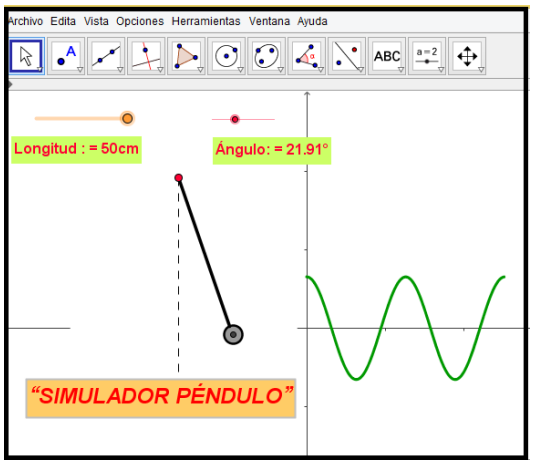


Figura 2: Simulador del péndulo creado en GeoGebra

La Figura 2, muestra el simulador y en la gráfica cartesiana se presentan longitud y ángulo del péndulo.

Con el simulador se pide a los estudiantes organizados por equipos a que ejecuten el movimiento del péndulo y analicen que pasa en cada ocasión que cambian un parámetro.

Al alumno se le cuestiona lo siguiente: ¿Qué es lo que determina el ángulo? y ¿Qué es lo que determina la longitud?

Se les pide además hacer predicciones sobre su propio péndulo, contrastando diferentes valores para la longitud y el ángulo, y se les pregunta ¿Cómo sería la gráfica del movimiento de dicho péndulo? (en el que están pensando), ¿Cómo sería su velocidad? y ¿Qué tipo de modelo representa a dicha grafica?

Resultados

Aportamos evidencias de como los estudiantes construyen la razón de cambio para modelar e interpretan gráficas cartesianas *distancia-tiempo* (*t-x*), *velocidad-tiempo* (*v-t*), *aceleración-tiempo* (*a-t*), como construyen la ecuación diferencial que modela el movimiento senosoidal y comparan los datos experimentales con los teóricos. Los estudiantes experimentan y toman video digital para posteriormente capturar los datos mediante el software Tracker, en la exploración encuentran la linealidad de la aceleración con respecto del desplazamiento, ajustando los datos con el software Geogebra y plantean la ecuación diferencial que modela el movimiento pendular (Figura 3).

Se puede establecer que con base en los diseños de aprendizaje, utilizando su propio péndulo y con apoyo del GeoGebra, los estudiantes son capaces de visualizar y modelar el movimiento del péndulo.

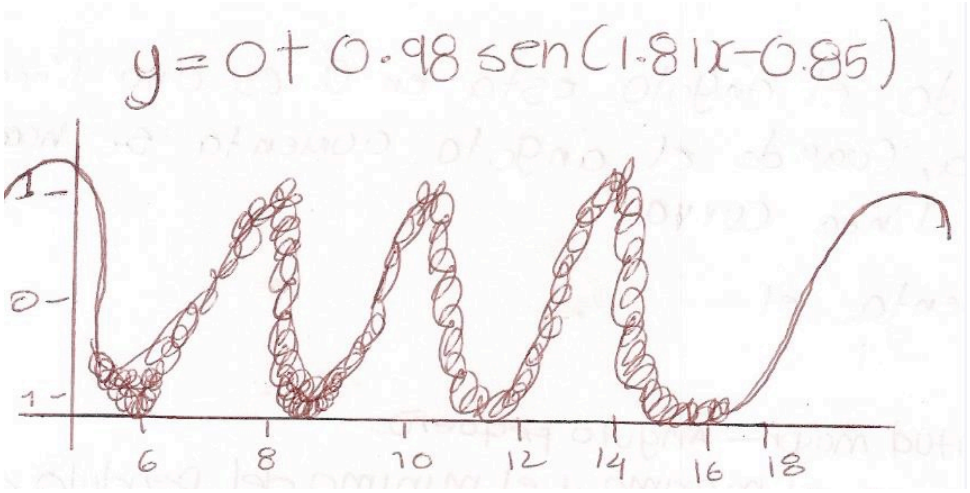


Figura 3. Modelo encontrado del movimiento pendular por un equipo.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Disertación doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2003a). Mathematics Education: A vision of its evolution. Educational Studies in Mathematics. *Kluwer Academic Publishers*, Netherthelands. Vol. 53, Issue 3, 255 – 270.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2003b). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6(1), 27-40.

Cordero, F., y Suárez, L. (2005). Modelación en matemática educativa. *XVIII Acta Latinoamericana de Matemática educativa*, pp. 639-643. México.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Méndez, M.; Arrieta, J. (2007). ¿Cómo en el ejercicio de la práctica de modelación de un sistema de resortes se construyen modelos multilineales? En Crespo, C. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 20, 444 – 449. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mochón, S. (1997). Modelos Matemáticos para Todos los Niveles. *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 42-45. México.

CREATIVIDAD, COMPETENCIA DIGITAL Y FORMACION DE DOCENTES DE MATEMATICAS EN SECUNDARIA

Silvia Carvajal, Joaquín Giménez, Vicenç Font, Adriana Breda
Universitat de Barcelona. (España), Universitat de Barcelona. (España), Universitat de Barcelona. (España), Universidad de Los Lagos. (Chile)
scarvajal@ub.edu, quimgimenez@ub.edu, vfont@ub.edu, adriana.breda@gmail.com

Resumen

Este trabajo se centra en buscar indicadores del pensamiento matemático creativo en el uso de herramientas digitales de los alumnos del Master Interuniversitario de formación de profesores de Matemáticas de Catalunya, España. Se presenta una herramienta que permite visualizar lo creativo en los trabajos finales de formación de los docentes. Para cada futuro docente se visualiza la valoración global de cada una delas dimensiones en forma gráfica. Este gráfico nos permite realizar una evaluación gráfico-numérica del potencial creativo en el uso de herramientas digitales.

Palabras clave: creatividad, competencia digital, secundaria, formación de profesores

Abstract

This report focuses on searching for indicators on the creative mathematical thinking in the use of digital tools by the students of the Master's Degree of Secondary Education Mathematics Teacher Training in Catalunya, Spain. We present tool that allows visualizing creativity in the final research works of prospective teachers. An overall assessment of each dimension is shown in a graphic way, for each prospective teacher. It allows us to carry out a graphical-numerical assessment of prospective masters' creative potential in the use of digital tools.

Key words: creativity, digital competence, secondary education, teacher training

Introducción

En la segunda década del siglo XXI los futuros docentes son usuarios de las tecnologías digitales pero las relacionan básicamente a las redes sociales y no tanto a las actividades que planifican y piensan para sus futuros estudiantes. La falta de conocimiento profundo, habilidades y experiencias propias dificultan la integración de la tecnología en sus clases de forma que les ayude a que sus propuestas sirvan parar que los estudiantes aprendan, incluso cuando saben la importancia de ello. Esto es debido a que el desarrollo de la competencia digital por medio de herramientas digitales para resolver situaciones-problema de ámbito matemático comporta un cierto tipo de pensamiento matemático creativo en el alumno. Y hay un acuerdo que los programas de formación de profesores deben proporcionar a los futuros profesores una formación amplia no sólo sobre el uso de los medios digitales, sino también de su valor para enriquecer el diseño de tareas matemáticas con sus nuevos desafíos (Polo, 2017).

La creatividad y, en particular, la creatividad matemática es un concepto complejo y polisémico que ha sido considerado en muchas investigaciones y se ha enfocado desde muchos puntos de vista. Existen investigaciones centradas en los sujetos creativos, en el proceso creativo, en el producto creativo o en el ambiente creativo. Por ejemplo, Font, Godino y Gallardo (2013) han enfatizado sobre cómo la creatividad pone en juego la emergencia de objetos y procesos matemáticos.

En el trabajo de Sequera, Giménez y Servat (2005) se indica que en un proceso de instrucción se potencia la creatividad si se fomenta la originalidad, flexibilidad, fluidez y elaboración de ideas matemáticas. Ahora bien, el interés y novedad de nuestro trabajo está en reconocer cómo los futuros docentes entienden la construcción de tareas con potencial creativo. Así, nuestro objetivo prioritario es reconocer indicadores de potencial de pensamiento matemático creativo que evocan los futuros profesores en su propuesta escolar y reconocen en su trabajo final de Master, de forma que nos permita disponer de un instrumento que permita evaluarlo.

Marco teórico

Richter, Barquero, Font y Barajas (2014) en las primeras fases de investigación en el marco del proyecto europeo MC2 proponen seis procesos que promueven la Creatividad matemática y el Pensamiento matemático creativo (PMC). Consideramos que es un referente importante porque esta noción permitió analizar propuestas creativas de actividades escolares con formatos digitales (Papadopoulos, Barquero, Richter, Daskolia, Barajas & Kynigos, 2015).

A partir de estas reflexiones, nuestra hipótesis es que para evaluar la competencia digital desarrollada, se consideran siete dimensiones (siguiendo a Sala, Font, Barquero y Giménez, 2017): 1) apertura y versatilidad (genera fluidez en respuestas posibles y abre perspectivas flexibles en la construcción de significados e ideas matemáticas, y procesos); 2) incluye problematización (potencia la propuesta de problemas matemáticos diferentes a los planteados inicialmente); 3) aporta conexionismo (fomenta conexiones representacionales entre conceptos matemáticos, con otras ciencias y el mundo real); 4) promueve exploración y conjeturación (en base a reconocer objetos y procesos originales); 5) genera elementos de validación (control, sistematización y evaluación de las propuestas elaboradas); 6) promueve aspectos emocionales (acerca del valor investigativo de la actividad matemática y el placer por conseguir resultados novedosos); y 7) desarrolla aspectos sociales y comunicativos.

Para concretar estas dimensiones en cuanto a la competencia digital, partimos del marco teórico llamado TPACK, en donde se considera que existe una intersección entre la competencia digital y la propuesta de creatividad matemática en cuanto parte de lo didáctico. TPACK es un marco para describir y comprender los fines del uso de las tecnologías que se relaciona con los componentes del conocimiento (lo didáctico, el contenido y lo tecnológico) (Koehler & Mishra, 2009).

A priori se consideran los siguientes indicadores para 1) la apertura: 1a) El uso de recursos digitales incluye problemas o cuestiones matemáticas abiertas; 1b) El uso de recursos digitales incluye construcciones que estimulan el pensamiento matemático. 1c) El uso de recursos digitales estimula al alumnado a buscar múltiples soluciones. 1d) El uso de recursos digitales promueve a que el alumnado

busque y use múltiples estrategias para resolver el problema. 1e) El uso de recursos digitales fomenta la generalización de fenómenos reales usando las matemáticas, yendo de lo concreto hacia lo general.

Para analizar 2) la problematización consideramos los indicadores siguientes: 2a) El uso de recursos digitales incluye problemas concebidos, ideados y formulados por el alumnado; 2b) El uso de recursos digitales promueve a que el alumnado genere nuevas y originales preguntas para ampliar la investigación del problema inicial. Para analizar 3) las conexiones consideramos si 3a) el uso de recursos digitales ofrece al alumnado oportunidades para establecer conexiones entre diferentes áreas de conocimiento y las matemáticas (conexiones interdisciplinares, conexiones extra-matemáticas). 3b) El uso de recursos digitales ofrece al alumnado oportunidades para establecer conexiones entre diferentes campos o conceptos. 3c) Y también si el uso de recursos digitales ofrece al alumnado oportunidades para establecer conexiones entre diferentes representaciones de un mismo concepto matemático.

Para analizar 4) la dimensión de exploración y conjeturación, observamos si 4a) el uso de recursos digitales fomenta la actividad exploratoria y de experimentación del alumnado. 4b) El uso de recursos digitales estimula a los estudiantes para que formulen y contrasten sus conjeturas matemáticas. Para reconocer 5) la dimensión de validación y evaluación, consideramos si el uso de recursos digitales fomenta a que el alumnado piense, reflexione, resuma y evalúe el trabajo matemático desarrollado.

Para identificar 6) la dimensión emocional, buscamos evocaciones que reconozcan si 6a) el uso de recursos digitales promueve un importante compromiso generando la percepción de que las matemáticas son útiles, tanto en un contexto matemático como en la vida diaria. Asimismo, si 6b) el uso de recursos digitales promueve un importante compromiso generando un sentimiento de placer, diversión, de reto (narrativas, características de los juegos, sentimientos de fluidez/inmersión en las actividades, etc.). Y también, si 6c) el uso de recursos digitales promuevo compromiso enérgicamente generando un sentimiento de placer estético a partir del contacto con conceptos matemáticos. Por último, consideramos que para analizar 7) la dimensión social, evidenciamos si 7a) el uso de recursos digitales estimula la colaboración, cooperación y la interacción entre el alumnado participante. Y si 7b) el uso de recursos digitales promueve el desarrollo de las habilidades comunicativas del alumnado.

Metodología implementada

Se usa una metodología cualitativa etnográfica que permite constatar que los indicadores a priori se encuentran en los textos del discurso de los futuros docentes de forma diferente. Para ello, se analizan 20 trabajos finales del Master Interuniversitario (TFM) de formación de profesores de Matemáticas de Catalunya. Para cada TFM se identifican alusiones del uso creativo de herramientas digitales que ponen en evidencia algunos de los indicadores de cada una de las dimensiones citadas y se visualiza la valoración global de cada una las categorías mediante un polígono de siete vértices en forma radial. Los vértices del polígono sombreado se obtienen a partir de la puntuación media de cada dimensión (con un cierto valor corrector en las que únicamente hay uno o dos indicadores). La puntuación mínima corresponde al centro del polígono y la máxima a cada uno de los vértices del polígono exterior. La proporción del polígono interior en relación con el exterior da una primera descripción gráfica-numérica del potencial creativo en el uso de herramientas digitales de los alumnos del máster. Cada vértice del polígono interior indica en qué medida cada dimensión ha sido integrada en sus TFM al hacer uso de herramientas digitales.

A partir de estas observaciones, cada uno de los futuros docentes analizados se agrupa en tres tipos de perfiles, asociándolos a las formas de los polígonos encontrados. Así, consideramos que caracterizamos tres tipos de futuros docentes: un perfil alto de la competencia asociado a un polígono cercano al convexo; un perfil medio asociado a figuras con entrantes en donde se muestra ausencia de algunas de las dimensiones y por lo tanto aparece una asimetría evidente. Por último, una categoría de perfil bajo de la competencia, que se observa en un polígono tendiente a la forma estrellada o incluso triangular, con bajos puntajes en las diversas dimensiones.

Resultados

A continuación, las figuras 1, 2 y 3 muestran tres representaciones de la evaluación del PMC en el uso de herramientas digitales de tres alumnos del máster, que se consideran característicos de cada uno de los perfiles de futuro profesor.

En la figura 1, se muestran los resultados de un futuro profesor de secundaria de matemáticas (FP1) de perfil bajo, en donde se puede observar un marcado desequilibrio en la figura, en donde se promueve únicamente tres dimensiones y con una baja puntuación en apertura, versatilidad y generalización, conexiones y exploración y conjeturación.

La propuesta de enseñanza implementada trabaja las derivadas en alumnos de 15-16 años. En su propuesta, el FP1 indica que "*las derivadas realizadas se validaban de manera gráfica con el programa GeoGebra observando intervalos de crecimiento, extremos relativos, etc.*" (evidencia 1b). Asimismo, indica que "*mediante el uso del GeoGebra los estudiantes resolvían los problemas mediante dos métodos: resolución algebraica y resolución gráfica*" (evidencias 1d y 3c). Y propone una actividad con el GeoGebra cuyo objetivo es que los alumnos dibujen diferentes funciones a "trozos" y comprueben si realmente estas funciones son continuas y derivables en los posibles puntos conflictivos susceptibles de discontinuidades (evidencia 4b).

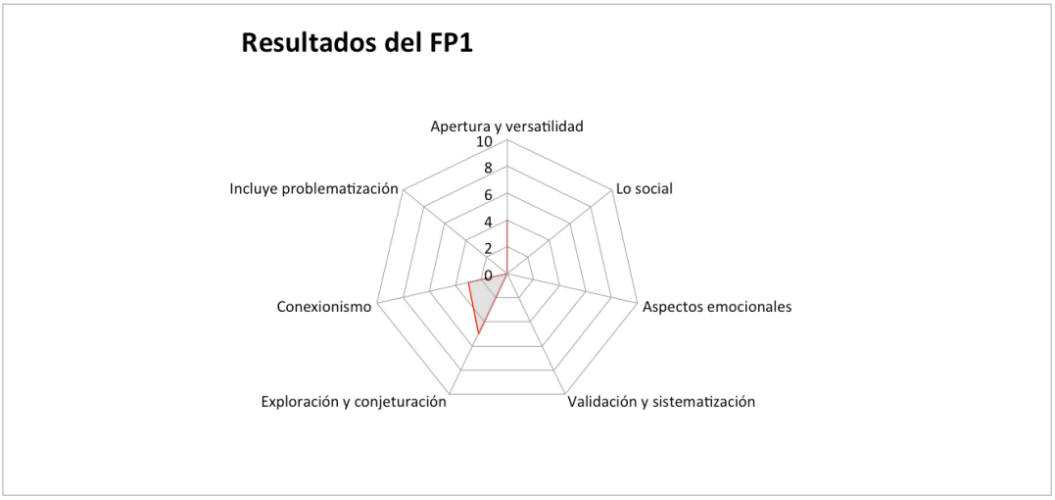


Figura 1. Resultado gráfico-cuantitativo del FP1

En la figura 2, se muestran los resultados de un futuro profesor de secundaria (FP2) que se considera de perfil medio, en donde se puede observar que hay una asimetría en cuanto al uso creativo de herramientas digitales: se promueve exploración y conjeturación y validación y evaluación con una alta puntuación, y, por otro lado, echamos en falta incluir la problematización y trabajar aspectos emocionales en actividades creativas con herramientas digitales.

La propuesta de enseñanza que implementó el FP2 se centra en las operaciones con fracciones con alumnos de 11-12 años. Las únicas evidencias de apertura encontradas son que "*El alumno, mediante dos applets*, t*rabaja las operaciones con fracciones a partir de la representación gráfica de fracciones con denominador común"* (evidencia 1b) y *"utiliza de forma conjunta el método gráfico y el algebraico"* (evidencias 1d y 3c).

En el guión que se les reparte a los alumnos se les enuncian preguntas como la siguiente que indican un cierto nivel de conjeturación y validación. "*A continuación trabajaremos el producto de fracciones. Escribe en el applet del producto de fracciones, un tercio por seis séptimos. ¿En cuántos rectángulos se ha dividido el cuadrado? ¿Por qué? ¿Cuántos hay pintados? ¿Por qué? ¿Cuál es el resultado de la operación?"* (evidencias 4a y 4b). "*Los alumnos tienen que validar si el resultado gráfico coincide con el resultado algebraico y plasmar el proceso efectuado respondiendo a las diferentes preguntas del guion"* (evidencia 5). En la explicación sobre la metodología de la actividad el futuro profesor explica: "*Primero, el profesor tendría que explicar, con la ayuda del proyector o la pantalla digital, cómo se utiliza el programa y, después, se tendría que hacer una lectura conjunta con toda la clase. Segundo, se procedería a responder las preguntas individualmente con la ayuda del applet del GeoGebra. Finalmente, se haría una puesta en común"* (evidencia 7b).

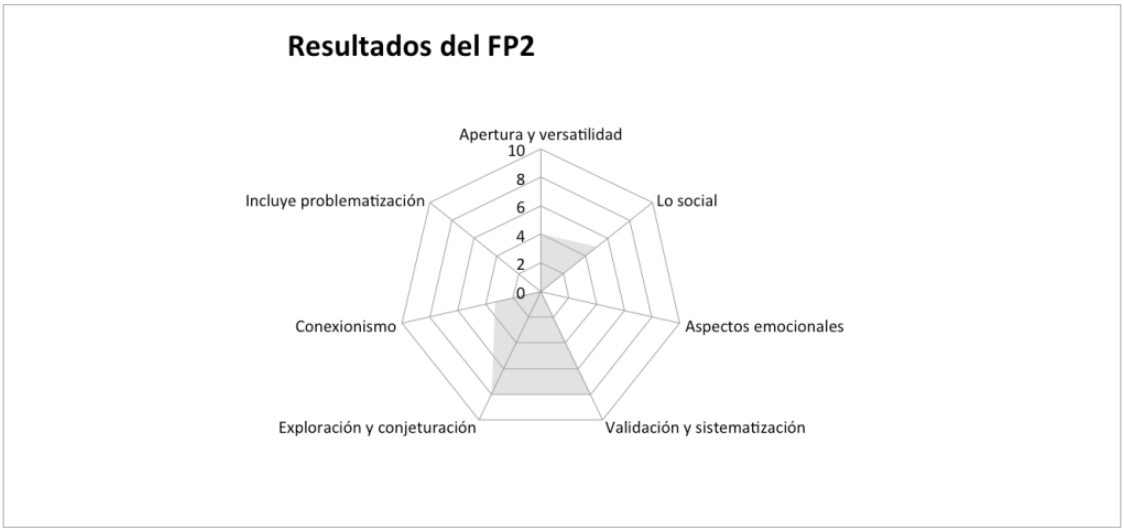


Figura 2. Resultado gráfico-cuantitativo del FP2

En la figura 3, se muestran los resultados de un futuro profesor de secundaria matemáticas (FP3) en donde se puede observar cierto equilibrio creativo. Su propuesta de enseñanza trabaja las transformaciones isométricas con alumnos de 14-15 años. Por la multitud de evidencias encontradas, añadimos únicamente algunas de ellas.

El FP3 muestra una reflexión en la que hay apertura. Indica que es importante la realización de actividades con medios audiovisuales *"Se les propone un concurso de fotografía matemática como actividad individual y voluntaria"* (evidencia 1a). "*Los alumnos realizan una actividad introductoria al concepto de vector mediante el programa interactivo GeoGebra. Parten de una hoja en blanco de GeoGebra y dibujan un vector a partir de dos puntos. Posteriormente, responden a diferentes preguntas sobre las características de sus elementos. Las preguntas las podrán responder observando, deduciendo y también experimentando"* (evidencia 1b). En otros pasajes el FP3 muestra la idea no sólo de usar un software de geometría dinámica sino reconoce la importancia de los applets para trabajar con variables problemáticas. Así, indica que "*se incluye una actividad sobre las teselaciones de Escher en donde cada grupo recibe teselaciones diferente en un archivo GeoGebra. Los alumnos responden a las preguntas que se les plantean a partir de la manipulación del applet"* (evidencias 1d y 1e).

Es consciente del valor de la problematización y la flexibilidad, como se ve en diversos pasajes. "*Se incluye como actividad un vídeo en el que se explican los movimientos en el plano aplicados al mundo real. Una de las preguntas que se les plantea a los alumnos es: ¿Cuántos mosaicos semiregulares se pueden formar a partir de polígonos regulares? Dibuja algunos"* (evidencia 2b). El FP3 explicita que en el trabajo de fotografía, permite conexiones extramatemáticas: *"... se conectan las matemáticas con otras disciplinas"* (evidencia 3a). O bien intramatemáticas *"... en esta actividad el alumno relaciona la composición de los diferentes movimientos en el plano con los movimientos estudiados en las actividades anteriores (traslaciones, simetrías y giros)*" (evidencia 3b).

En cuanto a la dimensión de conjeturación y exploración, el FP3 explicita estos aspectos en sus comentarios, mostrando su consciencia de que es importante: "*Prácticamente todas las actividades de traslaciones, simetrías y giros se realizan a través de la exploración y experimentación por parte del alumnado"* (evidencia 4a). Alude al trabajo colaborativo: "*Las preguntas las resuelven de manera individual, compartiendo las respuestas y ayudándolos, promoviendo la intervención de otros miembros del grupo para ampliarlas. Con esta actividad se trabaja en todo momento la comunicación, la exploración y la argumentación"* (evidencia 4b). El FP3 alude en diversas ocasiones a lo emocional cuando dice que "*Se incluyen diferentes ejemplos en los que las traslaciones, los giros y las simetrías aparecen en nuestra vida cotidiana: simetría del cuerpo humano, simetrías y giros en la naturaleza, elementos ornamentales en manifestaciones arquitectónicas y artísticas, etc."* (evidencia 6a). *"El hecho de que la actividad fotográfica sea voluntaria, abierta, ambientada en el mundo real y que utilice la fotografía como recurso hace que el alumnado se motive"* (evidencia 6b). "*Se introducen cualidades estéticas gracias a las matemáticas"* (evidencia 6c).

El futuro docente FP3 alude al valor matemático de lo social como la colaboración y una gestión no directiva. Así, indica que *"Todas las actividades se han pensado para que los alumnos investiguen, deduzcan, experimenten y extraigan conclusiones en grupo. Son actividades pautadas mediante diferentes preguntas cuyo objetivo es que los alumnos se cuestionen lo que están haciendo y lleguen a los conceptos de manera autónoma"*. (evidencias de indicadores 5, 7a y 7b)

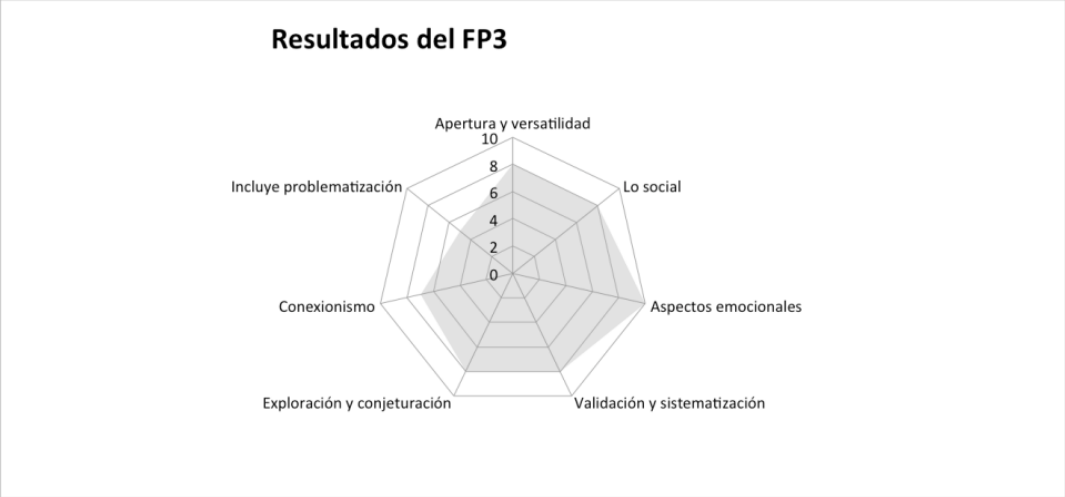


Figura 3. Resultado gráfico-cuantitativo del FP3

Después de analizar los veinte trabajos, y asignar a cada uno la categoría de perfil correspondiente, podemos ver que en el perfil bajo se encuentran 5 futuros docentes (25 %), 9 en el perfil medio (45 %) y 6 en el perfil alto (30 %).

Conclusiones

El análisis realizado nos ha permitido constatar que los indicadores definidos a priori evalúan el potencial creativo del uso de herramientas digitales en las propuestas de enseñanza de sus TFM. En definitiva, podemos caracterizar tres grupos de FP: (1) un primer grupo con casi nula consideración de lo creativo, aunque propone tareas interesantes y adecuadas, (2) un segundo grupo en el se evidencian algunas de las dimensiones y se excluyen otras, y, por consiguiente, el resultado gráfico-cuantitativo es asimétrico en cuanto al uso de lo creativo y (3) un tercer grupo en el que se observan resultados cuya representación gráfica muestra cierto equilibrio creativo.

Observamos que existen determinados contenidos matemáticos cuyas propuestas de enseñanza en sus TFM muestran cierto equilibrio creativo y estas propuestas suelen trabajar contenidos matemáticos que se han abordado profundamente a lo largo del máster y, por lo tanto, los futuros profesores optan con más material. Por el contrario, existen otras propuestas en las que los futuros profesores no han considerado información complementaria a lo largo del máster y, en estos casos, los futuros profesores obtienen una puntuación en el uso creativo de recursos digitales muy baja. Por último, también observamos que hay ciertas dificultades en explicitar el valor creativo del uso de herramientas digitales en las dimensiones de problematización y conexiones. Este aspecto es preocupante porque quizá la visión epistemológica de estos futuros profesores les puede llevar a ser repetitivos y no abiertos en su desarrollo profesional.

Agradecimientos

Este trabajo de investigación se ha llevado a cabo en el contexto del proyecto EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, EU) del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España.

Referencias bibliográficas

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97-124.

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)?.Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9(1), 60-70.

Papadopoulos, I., Barquero, B., Richter, A., Daskolia, M., Barajas, M. & Kynigos, C. (2015). Representations of creative mathematical thinking in collaborative designs of c-book units. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2381-2387).

Polo M. (2017) The Professional Development of Mathematics Teachers: Generality and Specificity. In: Aldon G., Hitt F., Bazzini L., Gellert U. (eds) *Mathematics and Technology. Advances in Mathematics Education*. Springer, Cham

Ritcher, A., Barquero, B., Font, V. & Barajas, M. (2014). ¿Cómo promover la creatividad matemática? El papel de las comunidades de interés y del diseño de c-unidades. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28,* 731 – 738.

Sala, G., Font, V., Barquero, B. & Giménez, J. (2017). Contribución del EOS en la construcción de una herramienta de evaluación del pensamiento matemático creativo. *Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: Actas.* Granada: Universidad de Granada.

Sequera, E., Giménez, J., & Servat, J. (2005). Detecting traits of creativity potential in mathematics tasks with prospective primary teachers In T Meissner (ED) .*EARCOME V*. Shangai.

PROFESSORES DE MATEMÁTICA QUE ENSINAM EM AMBIENTES VIRTUAIS NA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL: PROCESSOS DE AVALIAÇÃO FORMATIVA EM FOCO

Domício Magalhães Maciel
Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Unesp – Universidade Estadual Paulista.(Brasil)
domicio.ufma@gmail.com

Resumo

A experiência do autor deste trabalho como Coordenador/Professor/Tutor *online* em cursos no contexto da Educação a Distância (EaD), aliada aos seus estudos (Mestrado) em avaliação formativa, na modalidade presencial, o direcionaram a estudar essa temática no contexto de um curso de Licenciatura em Matemática a distância, no âmbito do Programa Universidade Aberta do Brasil (UAB), ao nível de doutorado. Seu projeto objetiva investigar evidências de possibilidades didático-pedagógicas de processos de avaliação formativa na Licenciatura em Matemática a distância. Tratar-se-á de uma pesquisa qualitativa envolvendo Professor, Tutor *online* e Alunos de uma disciplina de conteúdo matemático de um Curso de Licenciatura em Matemática da UAB, complementada com os dados obtidos em curso de formação continuada de professores, na perspectiva de uma comunidade de prática *online*, para discutir a avaliação formativa em ambientes virtuais de aprendizagem. Os dados serão analisados sob a perspectiva de alguns conceitos da Análise de Conteúdo.

Palavras-chave: educação a distância, licenciatura em matemática, avaliação formativa, ambientes virtuais de aprendizagem, comunidade de prática *online*

Abstract

The experience of this work's author as Coordinator/Teacher/online Tutor in courses by Distance Education, as well as his studies (Master's degree) in formative evaluation (in classroom mode), has motivated him to study this topic, as a Ph D degree research work, in the context of a Distance Mathematics Bachelor´s Degree Course, at the Open University of Brazil. It is aim at researching on didactic – pedagogical possibilities of formative evaluation processes in Distance Mathematics Bachelor´s Degree Course. This is a qualitative research that involves the teacher, the tutor online, and the students of Mathematics-content based discipline. The investigation is complemented with the data obtained in a teachers´ continuing education course, from a community of online practice, to discuss formative evaluation in virtual learning environments. The data will be analysed on the perspective of some concepts of content analysis.

Key words: distance education, bachelors degree in mathematics, formative evaluation, virtual learning environments, online practice community

Introdução

Na atualidade, a partir da disseminação das redes colaborativas de aprendizagem, muito se tem evidenciado sobre a potencialidade da Educação a Distância (EaD). Historicamente a EaD tem possibilitado a formação de indivíduos sem enclausurá-los entre quatro paredes, desde o final do séc. XIX, de modo institucional, através de cursos de correspondência usando a mídia/tecnologia impressa. Essa modalidade educativa foi ganhando espaço no setor educacional a partir do desenvolvimento de outras tecnologias, além da impressa, como por exemplo a TV e Vídeo, Rádio e Informática/*Internet*, denominadas por Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) (Litwin, 2000; Miskulin & Silva, 2010), atingindo, no Brasil, sua 3ª geração a partir de 1996 com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação/1996, Art. nº 80 (Brasil, 1996; Paulin, 2015). Nesta geração, pelo fato de a *Internet* ser seu fio condutor, alguns autores passaram a denominá-la por EaDonline (Borba, Malheiros, & Zullato, 2007) ou por EaD *online* (Paulin, 2015), ambas as terminologias referindo-se à Educação a Distância *online* (ou via *Internet*). Nesse trabalho, estando no contexto de sua 3ª geração, assumiremos a terminologia EaD *online*.

Dentre as vantagens atribuídas à EAD *online* citamos aquelas apontadas por Takahashi (2000 como citado em Gozzi & Mizukami, 2008): ampliação do números de participantes em um curso ou palestra, independentemente do tempo e do local em que ocorre; possibilidade de compartilhamento de recursos pedagógicos entre instituições que não ocupam o mesmo espaço geográfico; possibilidade de o discente estudar, no seu tempo e sem deslocar de casa ou local de trabalho; contribuição para a formação continuada; acompanhamento individualizado do aprendizado do estudante; possibilidade da organização do trabalho em equipe de modo intenso.

De modo complementar, Gozzi e Mizukami (2008) acrescentam outras possibilidades decorrentes da implementação da EaD *online*: aumento considerável do público atingido; diminuição dos custos que uma formação presencial, distante da sede da instituição ofertante, apresenta; estimulação da criação de comunidades virtuais de aprendizagem em que a colaboração e cooperação entre os participantes é uma característica precípua; possibilidade de atualização rápida dos conteúdos com custos menores.

Com o argumento da extensão territorial e do déficit de professores para assumir a expansão da Educação Básica em andamento nos últimos anos, o Ministério da Educação brasileiro assumiu a EaD *online* na primeira década desse século como política pública, mais precisamente voltada para a formação gratuita de professores. Logo em seguida, os efeitos dessa política se fizeram presente na crescente oferta de cursos de formação a distância de professores por instituições privadas que viram nessa modalidade uma via financeira lucrativa. Para se ter uma ideia da expansão desse mercado, de 2001 a 2009 o número de matrículas na rede privada passou de 0 (zero) para 322.571; quanto em relação a rede pública, as matrículas passaram de 5.359 para 97.523 (Gatti, Barreto, & André, 2011).
Nesse contexto, o Ministério da Educação implementou várias políticas educacionais de formação inicial e continuada a distância. Vários programas educacionais foram implementados, dentre eles o Programa Universidade Aberta do Brasil (UAB), em 2005, nas mais diversas modalidades de formação e em particular a formação inicial de professores.

A nossa opção por estudar a avaliação em um curso de formação inicial de professor de Matemática a distância advém das experiências docentes na UAB – descritas logo a seguir, além dos estudos sobre avaliação formativa, na modalidade presencial, em nível de Mestrado e da experiência como

Coordenador/Tutor em programas de formação de professores, na modalidade a distância (Maciel, Ribeiro, & Diniz, 2010; Vetter & Maciel, 2010): Professor da disciplina "Matemática Aplicada à Administração" para o curso de Administração; Professor da disciplina "Prática de Ensino I" para o curso de Licenciatura em Matemática; Professor da disciplina "Matemática Financeira e Análise de Investimento" para o Curso Bacharelado em Administração Pública.
Nos interessa, no doutoramento, centrar esforços no sentido de compreendermos teórica e metodologicamente a avaliação formativa na Ead *online*, mediada por tecnologias que tanto podem incluir e promover atualizações profissionais e pessoais, quanto excluir e segregar ainda mais, do ponto de vista do processo ensino-aprendizagem (Malanchen, 2015).

Em síntese, tendo como *objetivo geral* investigar evidências de possibilidades didático-pedagógicas de processos de avaliação formativa na Licenciatura em Matemática a distância nos propomos a dar continuidade ao estudo da avaliação formativa em Educação Matemática, agora na modalidade a distância, no ensino superior, com a *seguinte motivação problematizadora*, no contexto da UAB: *Quais as possibilidades didático–pedagógicas de processos de avaliação formativa podem ser implementadas por um professor de Matemática ao ministrar uma disciplina de conteúdo matemático, em um curso de Licenciatura em Matemática, na modalidade a distância?*

Fundamentação teórica

A EaD *online*, segundo Paulin (2015, p. 45), "se dá por meio da utilização de ambientes de interação *online*, via *chat*, webconferências, fóruns, dentre outros, em que os atores desse processo encontram-se conectados à *Internet* e têm como objetivo a construção do conhecimento em interação com os pares".

Na EaD *online*, em condições não convencionais, os docentes podem ensinar e os alunos podem aprender em espaços e tempos que não compartilham simultaneamente. Não segue um modelo rígido na sua implementação, fazendo uso de uma diversidade de recursos pedagógicos que podem propiciar a construção do conhecimento. Essa modalidade pode possibilitar a autonomia do aluno em relação à escolha do espaço e do tempo. Entretanto, autonomia não significa autodidatismo. A diferença é que o autodidata escolhe o que quer estudar sem contar com uma proposta pedagógica e didática para estudar (Litwin, 2001).

Do mesmo modo que na modalidade presencial, os alunos devem passar por processos avaliativos que devem resguardar o caráter formativo, em que o aprendente é um ser social que aprende colaborativamente, formando comunidade de aprendizagens, e é avaliado a partir de vários instrumentos, com enfoque nos processos metacognitivos que resultam em comunicações escritas do saber aprendido, a exemplo do diário e mapas conceituais (que na EaD *online* podem ser construídos, individualmente ou em grupo a distância), (Maciel, 2003; Novak & Cañas, 2010; Souza & Boruchovitch, 2010), além dos portfólios (Maciel, 2003).

Por fazer uso de um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) o processo de avaliação deve levar em conta as interações e produções dos alunos no ambiente. Para isso, estudos na área de Informática na Educação (Bassani & Behar, 2009; Nevado, 2005; Otsuka, Ferreira, Lachi, & Rocha, 2003) têm trazido as preocupações dos pesquisadores em fornecer alternativas para tornar produtiva e formativa a avaliação em um curso *online*, de modo que se dê conta da participação efetiva do aluno em sua aprendizagem.

> Assim, a EaD mediada por computador e Internet, favorece a aprendizagem e a interaprendizagem quando estimula e oferece recursos para interar alunos e professores por meio da prática da mediação pedagógica nos ambientes de interação. Essa prática é fundamental para criar as comunidades virtuais de aprendizagem mediante o estímulo do aluno para atuar como co-autor desse processo de construção do conhecimento (Gozzi & Mizukami, 2008, p. 501).

Para esse debate, Rosa e Maltempi (2006) contribuem, ao afirmar que

> a troca de ideias, com feedbacks constantes, predominantemente, vincula-se ao processo avaliativo formativo. Pois, entendemos que ao se inserir nesse processo de grande movimento de ideias, no qual há um grande número de interações entre aluno/aluno, aluno/professor e aluno/mídias, o participante torna-se agente de construção do seu próprio conhecimento e, dessa forma, não é o conhecimento que devemos avaliar, mas a qualidade de suas manifestações (p. 63).

Desse modo, sem desprezar o quantitativo, pois "quantidade e qualidade são dimensões inseparáveis de uma mesma realidade" (Dias Sobrinho, 1997, p. 83), o professor centra-se na qualidade que pode extrair do quantitativo.
Nesse contexto, considerando a importância construída historicamente do paradigma quantitativo da avaliação, Rosa e Maltempi (2006) apoiados no Construcionismo e em uma estrutura denominada Turbilhão de Aprendizagem, contribuem com as ações formativas de avaliação, quando acreditam que, desse modo:

> a formação do estudante será reconhecida como centro dos processos de ensino e aprendizagem no contexto educacional, retirando do quantitativo do saber o grande valor que a esse é atribuído. A formação é dada a partir do reconhecimento das ações de aprendizagem que emitem, cada qual, subsídios que contribuem para o processo de avaliação formativa (p. 65).

Assim, a avaliação formativa em um ambiente virtual possibilitará "documentar o que acontece e identificar as fontes de sucesso e de problemas a fim de sugerir possíveis melhorias no futuro" (Harasim, Teles, Turoff, & Hiltz, 2005). Para tanto, diversos AVAs colaborativos já foram criados para dar suporte a esse modelo de avaliação em EaD. Esses ambientes computacionais têm ferramentas de interações síncronas (que se dão em tempo real – as respostas são instantâneas: *Chat* ou Bate-Papo) e assíncronas (não se dão em tempo real: Fórum de Discussões, E-mail, Diário de Bordo). Especificamente para a área de Matemática, em função de sua linguagem própria, temos o "ROODA Exata" que é um editor científico proposto e implementado por pesquisadores da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS (Behar & Notare, 2009). Além dessas ferramentas, nas quais os discentes atuam, há ferramentas computacionais, tais como os agentes inteligentes e os agentes de interface, que dão suporte à avaliação formativa (Otsuka *et al*., 2003; Rosa & Maltempi, 2006), considerando o volume de dados produzidos naquelas ferramentas de interação. Com tal suporte, o Professor tem "mais condições de dar um feedback adequado e pertinente ao aluno, favorecendo a construção de conhecimentos por este" (Rosa & Maltempi, 2006, p. 62).

Todavia, é preciso destacar que existem AVAs criados para ensinar (mais condizente com um ensino presencial tradicional em que o papel do professor tem maior destaque) e os criados para aprender. Optamos em priorizar os criados para a aprendizagem, isto é, com as seguintes características, segundo Nevado (2005): o conhecimento é construído a partir de trocas de reflexões; o professor é o motivador da aprendizagem ao incentivar o diálogo e a reflexão; o aluno é ativo; a aprendizagem se dá em rede; ocorre a formação de comunidades virtuais; promovem a aprendizagem colaborativa; criam-se novos espaços de interação como os *blogs*, webfolio, etc; ocorrem formas distintas de comunicação: assíncrona e síncrona; onde a dúvida gera novos conhecimentos; aproxima a educação presencial da virtual. Nesses ambientes, propõe-se avaliar a participação de um aluno na EaD *online*.
Para Bassani e Behar (2009), o valor de uma proposição em um ambiente virtual de aprendizagem está relacionado ao efeito produzido no grupo, pois a quantidade de respostas é um dos indicadores avaliativos. Na utilização do Fórum de Discussão, é importante refletir que as postagens por si só não denotam uma aprendizagem e nem mesmo a autoria do conteúdo postado.

Em complementação a Bassani e Behar (2009), Assis (2008) afirma que o impacto da qualidade da postagem pode promover a aprendizagem coletiva. Assim, pode-se pensar no "diálogo didático mediado" proposto por Aretio (2001 como citado em Assis, 2008). Há quatro categorias de diálogo, segundo este autor: participação, interação, diálogo e diálogo didático. O diálogo didático constitui-se no diálogo ideal para o processo da avaliação formativa, pois é onde o debate acontece. Os problemas surgem e são discutidos apresentando ou não uma solução. Esse diálogo se dá em via dupla entre pessoas separadas no espaço e no tempo. É didático porque objetiva a aprendizagem. O Fórum de Discussão é a ferramenta por excelência para o diálogo didático. Nele se forma um espírito de comunidade de aprendizagem.

Assis (2008) destaca que é necessário que o Fórum de Discussão seja feito em um ambiente que tenha em sua edição os símbolos matemáticos. Nesse caso o "ROODA Exata" da UFRGS se aplica muito bem. A partir desses ambientes virtuais de aprendizagem, pensando na interação social, é possível pensarmos em um espaço de avaliação formativa na Educação a Distância o qual não descarta uma prova presencial para cumprir os rigores da lei. Entendemos que nesse contexto a prova presencial é mais um instrumento de avaliação formativa que tem sua importância tanto em uma modalidade como na outra. É preciso não perder de vista os aspectos sociais e cognitivos da avaliação (Maciel, 2003) que podem ser encontrados nas duas modalidades de ensino.

Metodologia

Optamos por uma pesquisa qualitativa por se tratar de um objeto que requer um olhar para o processo e não somente o produto, e, também, pelo envolvimento direto do pesquisador com as questões em estudo. Como afirmam Ludke e André (2014, p. 14), a pesquisa qualitativa "envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes"

Após uma revisão mais aprofundada da literatura sobre a temática que problematizamos, focaremos nossa atenção em um Curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância da UAB, no estado de Maranhão-Brasil, com o intuito de investigar os ideários presentes durante e depois do desenvolvimento de uma disciplina ministrada a uma turma de um polo presencial da instituição ofertante, no que se refere às possibilidades didático–pedagógicas de processos de avaliação formativa num ambiente *online*. A

escolha dessa disciplina tem relação com o fato de ser oferecida no segundo período do curso a iniciar no final do corrente ano, coincidindo com o período reservado para a coleta de dados deste projeto. Para tanto, durante o desenvolvimento da disciplina serão observados: as concepções teórico-metodológicas do processo avaliativo implementado no curso, via registros do mesmo (programa da disciplina, atividades avaliativas, critérios de avaliação etc.); as postagens realizadas nos fóruns e/ou *chats* propostos pelo professor, bem como as interações ocorridas nos diários de bordo; os resultados dessa avaliação a partir dos registros dos alunos e o modo de fornecer o *feedback* aos alunos por parte do Professor e Tutor *online*. Desse modo, os sujeitos dessa pesquisa serão basicamente o Professor, o Tutor *online* e os Alunos da disciplina observada. Além disso, aplicaremos um questionário eletrônico com questões abertas e/ou fechadas para construir um perfil do Professor e do Tutor *online*. Os dados obtidos a partir desse instrumento de coleta de dados serão complementados com uma entrevista *online* com o Professor e o Tutor *online* da disciplina, separadamente.

Após o encerramento da disciplina, proporemos ao Professor e ao Tutor *online* a participação em um curso de formação continuada a distância, a ser ofertado pelo Núcleo de Educação a Distância (NEaD) da instituição, cujo foco será a avaliação formativa em ambientes *online*. Esse curso fará parte de uma formação mais geral ofertada pelo NEaD aos Professores e Tutores *online* que fazem parte do corpo docente do Curso. No tocante à avaliação em ambiente virtuais, para o qual serei o formador, o curso será ofertado aos professores que atuam no ensino de Matemática a distância da instituição, abrindo ainda algumas vagas para outras instituições do Maranhão que atuam na UAB. Esse encontro entre o Professor e o Tutor *online*, sujeitos da pesquisa, com outros pares que atuam na formação de professores de Matemática na modalidade a distância se dará na perspectiva de uma comunidade de prática *online*.

Entendemos Comunidade de Prática, conforme Wenger (2006 como citado em Rodrigues, Silva, & Miskulin, 2015, p. 8), como "grupos de pessoas que se engajam em atividades conjuntas e discussões, ajudam-se mutuamente, compartilham informações. Eles constroem relacionamentos que os permitem aprender uns com os outros".

Adaptando o conceito para um contexto que utiliza as TIC como ferramentas de interação e aprendizagem social, na perspectiva de Wenger (2001, p. 27), que considera que "o que parece promissor são maneiras inovadoras de engajar estudantes em práticas significativas, dar acesso aos recursos para aumentar sua participação, abrir horizontes para que eles possam se colocar em uma trajetória de aprendizado com a qual possam se identificar", Richt (2015, pp. 77-78) conceitua uma Comunidade de Prática *online* (CoPOnline) como sendo "uma Comunidade de Prática que faz uso das Tecnologias Digitais e se desenvolve essencialmente por interações via *Internet*, assumindo uma natureza virtual, em que não há restrições de tempo e espaço entre os participantes". Buscar-se-á integrar o Professor e o Tutor online, sujeitos da pesquisa, nessa comunidade, com vista à reflexão sobre sua prática recente de avaliação de seus alunos, num processo de compartilhamento de práticas entre os membros da comunidade formada.

Analisaremos os dados coletados, sob a perspectiva de alguns conceitos da Análise de Conteúdo (Bardin, 1997).
Esperamos com este estudo possibilitar uma reflexão sobre os processos de avaliação da aprendizagem desenvolvidos em cursos na modalidade a distância, bem como apontar possibilidades de ações formativas, no que diz respeito à avaliação da aprendizagem, para a Licenciatura em Matemática a distância.

Referências bibliográficas

Assis, C. F. C (2008). Diálogos didáticos matemáticos em fóruns de discussão *online*. In Anais *V Congresso Brasileiro de Ensino Superior a Distância (ESUD)*, Gramado, RS, Brasil.

Bardin, L. (1997). *Análise de conteúdo*. Lisboa, Portugal: Edições 70.

Bassani, P. S., & Behar, P. A. (2009). Avaliação da aprendizagem em ambientes virtuais. In P. A. Behar. (Org.). *Modelos Pedagógicos em Educação a Distância* (pp. 93 – 113). Porto Alegre-RS: Artmed.

Behar, P. A., & Notare, M. R. A. (2009). A comunicação matemática on-line por meio do ROODA Exata. In Behar, P. A. (Org*.). Modelos Pedagógicos em Educação a Distância* (179 – 203). Porto Alegre-RS: Artmed.

Borba, M. C., Malheiros, A. P. S., & Zulatto, R. B. A. (2007). *Educação a distância online*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Brasil. (1996). LDB. *Lei no 9394, de 20/12/1996*. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional.

Dias Sobrinho, J. (1997). Avaliação quantitativa e avaliação qualitativa: interações e ênfases. In Sguissardi, V. (Org.). *Avaliação universitária em questão: reformas do estado e da educação superior*. Campinas, SP: Autores Associados (pp. 71-89).

Gatti, B. A., Barreto, E. S. S., & André, M. E. D. A. (2011). *Políticas docentes no Brasil: um estado da arte*. Brasília, DF: MEC.

Gozzi, M. P., & Mizukami, M. G. N. (2008). Metodologia para registro de processos de mediação em comunidades virtuais de aprendizagem e de prática. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 89* (223), 493-521.

Harasim, L., Teles, L., Turoff, M., & Hiltz, S. R. (2005). *Redes de aprendizagem: um guia para ensino e aprendizagem on-line*. São Paulo, SP: Editora Senac.

Litwin, E. (Org.). (2001). *Educação a distância: temas para o debate de uma nova agenda educativa.* Porto Alegre, RS: Artmed.

Ludke, M., & André, M. E. D. A. (2014). *Pesquisas em educação: abordagens qualitativas*. (2 ed.) São Paulo, SP: EPU.

Maciel, D. M. (2003). *A avaliação no processo ensino-aprendizagem de matemática, no ensino médio: uma abordagem formativa sócio-cognitivista*. (Dissertação de Mestrado), Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas, Brasil.

Maciel, D. M., Ribeiro, R. J. A., & Diniz, I. C. S. (2010). Tutoria on-line: trajetória no ciclo avançado do programa mídias na educação do núcleo de educação a distância da Universidade Federal do Maranhão. In *Anais do VII Congresso Brasileiro de Ensino Superior a Distância – ESUD*, Cuiabá, MT, Brasil, 994-998.

Vetter, S. M. J., & Maciel, D. M. (2010). Ferramentas de interação e suas potencialidades educativas na EaD: reflexões sobre o uso do diário de bordo na quarta oferta do ciclo básico do programa mídias na educação – UFMA. In *Anais do VII Congresso Brasileiro de Ensino Superior a Distância – ESUD*, Cuiabá, MT, Brasil, 771-776.

Malanchen, J. (2015). *Políticas de formação de professores a distância no Brasil: uma análise crítica*. Campinas-SP: Autores Associados.

Miskulin, R. G. S, & Silva, M. R. C. (2010). Cursos de licenciatura de matemática a distância: uma realidade ou uma utopia? In A. P. Jahn, & N. S. G. Allevato (Orgs.). *Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores* (pp. 105-124). Recife, PE: SBEM.

Nevado, R. A. (2005). Ambientes virtuais de aprendizagem: do "ensino na rede" à "aprendizagem em rede". In Brasil: Ministério da Educação. *Programa Salto para o Futuro. Boletim 15*. Recuperado de http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/blogs/NEVADO.pdf.

Novak, J., & Cañas, A. J. (2010). A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los. *Práxis Educativa, (5)*1, 9-29.

Otsuka, J. L., Ferreira, T. B., Lachi, R. L., & Rocha, H. V. (2003). Um modelo de suporte à avaliação formativa no ambiente Teleduc. *Revista Brasileira de Informática na Educação, (11)*2, 100-110. Recuperado de http://www.br-ie.org/pub/index.php/rbie/article/view/2202/1965.

Paulin, J. F. V. (2015). *Educação a distância online: potencialidades para a Formação de Professores que ensinam Matemática*. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista-UNESP-Rio Claro, Rio Claro, Brasil.

Richit, A. (2015). *Formação de professores de matemática da educação superior e as tecnologias digitais: aspectos do conhecimento revelados no contexto de uma comunidade de prática online.* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista-UNESP-Rio Claro, Rio Claro, Brasil.

Rodrigues, M. U., Silva, L. D., & Miskulin, R. G. S. (2015). Desenvolvimento do conceito de comunidade de prática e seus reflexos nas pesquisas na área da educação. In *Anais do III Simpósio de Grupos Colaborativos e de Aprendizagem do Professor que Ensina Matemática*, São Paulo, SP, Brasil.

Rosa, M., & Maltempi, M. V. (2006). A avaliação vista sob o aspecto da educação a distância. *Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, 14*(50). Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/ensaio/v14n50/30407.

Souza, N. A., & Boruchovitch, E. (2010). Mapas conceituais e avaliação formativa: tecendo aproximações. *Educação e Pesquisa, (36)*3, 795-810.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad –cognición e cesarrollo humano*. Paidós: Barcelona.

UN MOOC DE INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

Rubén-Darío Santiago-Acosta, Ma de Lourdes Quezada-Batalla, Carlos Prado-Pérez
Tecnológico de Monterrey (México)
ruben.dario@itesm.mx, lquezada@itesm.mx, cprado@itesm.mx

Resumen

Los estudiantes que ingresan a carreras profesionales en el ITESM muestran algunas deficiencias en sus habilidades matemáticas. Sólo unos cuantos ingresan directamente a cursos de cálculo y otros requieren tomar cursos de matemáticas básicas. Un nuevo examen diagnóstico permite determinar sus carencias. Para apoyar el desarrollo de sus competencias matemáticas se elaboró un curso masivo en línea (MOOC) de Introducción a las Matemáticas. El curso contiene temas de Álgebra I, Álgebra II, Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones. Cada tema se organiza en pequeñas secciones que contienen: teoría, ejemplos, ejercicios interactivos y prácticas de exploración computacional de conceptos. Para la evaluación se construyó un sistema semi-adaptativo basado en preguntas conceptuales, ejercicios y problemas. En el trabajo se presentan resultados del examen de ubicación, la metodología seguida en la elaboración del curso y los resultados obtenidos en el aprendizaje de estudiantes.

Palabras clave: openEdX, aprendizaje adaptativo, retos

Abstract

The students who start professional studies at the Technological Institute of Mathematics Higher Education (ITESM) show some deficiencies in their mathematical skills. Only a few can enter directly the calculus-based courses, others need to take courses on basic mathematics first. A new placement test allows us to diagnose the students' deficiencies. To support the development of their mathematical skills, a mass online course (MOOC) on basic Mathematics was designed. The course involves topics of Algebra I, Algebra II, Trigonometry, Analytic Geometry and Functions. Each topic is organized in small sections that contain: theory, examples, interactive exercises, and computer- practices where the students explore basic concepts. The evaluation of this course consists of a semi-adaptive system which is based on conceptual questions, exercises and problems. The results obtained by the students in the placement test, the methodology applied on the elaboration of the course, and the results on the students' learning skills are shown in this research work .

Key words: openEdX, adaptive learning, challenges

Introducción

Estudios recientes muestran que, en general, los estudiantes que ingresan a las carreras profesionales en los campus del Tecnológico de Monterrey, ubicados en la zona centro de México, tienen deficiencias en el uso de las herramientas algebraicas. Al analizar el examen de ubicación de matemáticas se encuentra

que poco más de la mitad de los sustentantes lo acreditan, y sólo tres cuartas partes tiene éxito al cursar "Introducción a las matemáticas" (Santiago, 2014). Se ha observado también que muchos estudiantes que no acreditan el examen de ubicación tienen deficiencias sólo en uno o dos temas y no existe ningún mecanismo que les permita subsanarlas y acreditar sus competencias matemáticas básicas rápidamente. Existen esfuerzos en la institución para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. El proyecto "Matemáticas y Movimiento" pretende desarrollar el pensamiento matemático mediante una línea conductora basada en el movimiento de objetos (Salinas, Quintero y Rodríguez, 2015).

En un segundo proyecto sobre "Tutoriales Inteligentes", Santiago, Quezada y Delgado (2012) y Santiago y Quezada (2013: 2014) reportan mejoras en las competencias algebraicas cuando se usan tutoriales y entrenadores computacionales en estudiantes de matemáticas. Sin embargo, estos proyectos sólo consideran a los estudiantes de ingeniería y no toman en cuenta a los alumnos de otras áreas.

Este trabajo surge con la intención de reducir las deficiencias algorítmicas y conceptuales en alumnos de nuevo ingreso de todas las carreras. Se propone utilizar un curso masivo en línea que sea flexible, auto-contenido y con un sistema de prácticas y exploraciones computacionales semi-adaptativas que permitan mejorar las competencias matemáticas de los alumnos de recién ingreso a carreras profesionales.

Marco teórico

La competencia matemática se define, de acuerdo con el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), como "la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos buscando usar conceptos, procedimientos y datos para describir, explicar y predecir fenómenos" (OCDE, 2013). En reportes recientes de PISA se muestra que la mayoría de los estudiantes mexicanos de 15 años no obtienen resultados satisfactorios en la competencia matemática. Esta situación es nacional e influye en los alumnos que recibe el ITESM en carreras profesionales. Estudios hechos por Santiago (2014) muestran que el estudiante promedio que ingresa al ITESM-CEM sólo obtiene 61 de 100 puntos posibles en el examen de ubicación de matemáticas. Análisis históricos muestran que sólo un 70% de los alumnos acreditan el curso de "Introducción a las matemáticas" y con dificultades pueden acreditar cursos superiores. Por otra parte, Stillson y Alsup (2003) han propuesto el uso del sistema adaptativo Aleks (Assessment and Learning in Knowledge Spaces) para: (1) analizar las deficiencias en procesos algebraicos básicos y (2) apoyar el aprendizaje de estudiantes que ingresan a la educación universitaria. La base de este tipo de sistemas es la capacidad de las computadoras y paquetes computacionales para analizar en tiempo real gran cantidad de información proveniente de las acciones de los estudiantes. A partir de esos datos, se intenta responder ¿qué es mejor enseñar ahora para maximizar la probabilidad de mejorar el rendimiento escolar?

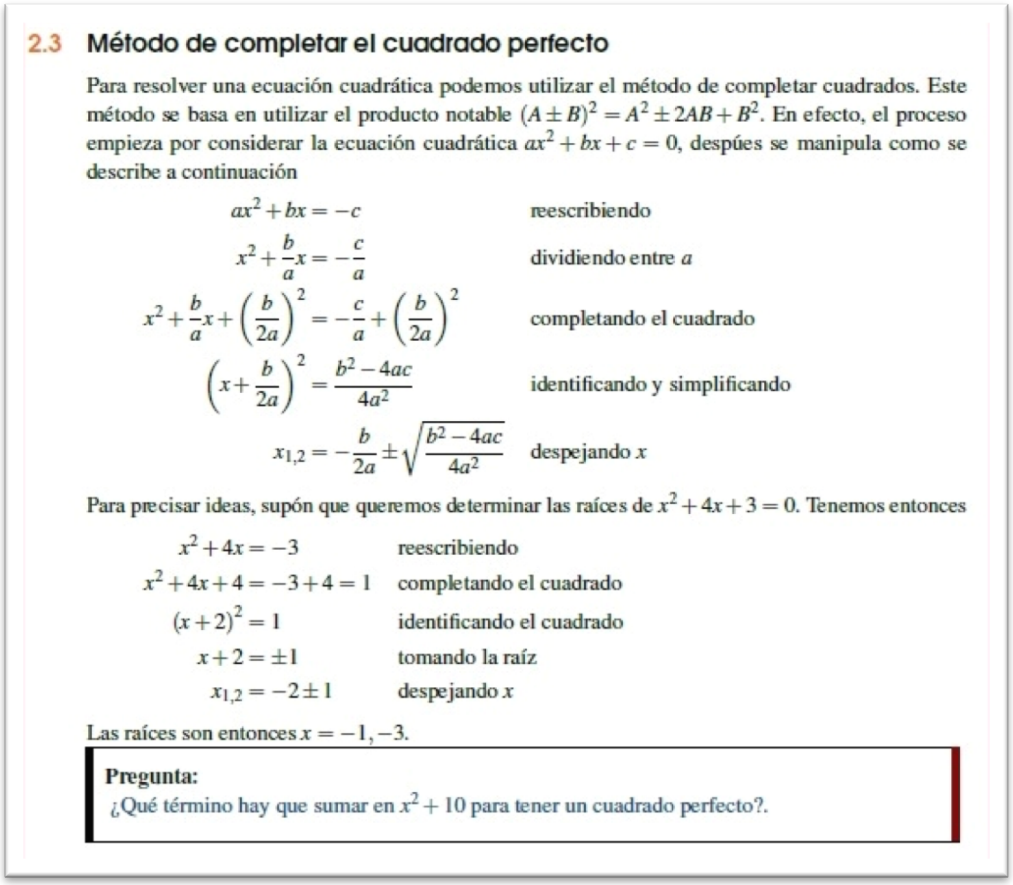
Dubinsky (1991) ha propuesto la teoría APOE (acciones, procesos, objetos, esquemas) para entender cómo se aprende matemáticas y fortalecer el proceso de enseñanza. En esta teoría, un esquema de un tema matemático determinado es el conjunto de acciones, procesos, objetos y, posiblemente esquemas de otra índole, unidos por relaciones diversas que el alumno utiliza como referente para resolver problemas ligados al tema matemático en cuestión (Dubinsky y McDonald, 2002). Si el esquema es coherente el alumno podrá reconocer sus alcances y limitaciones en la solución de problemas (Salgado y Trigueros, 2014).

En la práctica, la teoría APOE se usa mediante ciclos de aprendizaje ACE formados por actividades, discusiones en clase y ejercicios. Por ejemplo, Vizcaíno (2004) utilizó el ciclo en un curso de cálculo, y sugiere: organizar a los alumnos en equipos de trabajo y desarrollar buena parte de las actividades en un laboratorio de cómputo. En este lugar, los estudiantes deben realizar tareas diseñadas para desarrollar construcciones mentales adecuadas al tema matemático a explorar. Posteriormente, en la clase se orientaa a los alumnos para discutir y reflexionar sobre el trabajo realizado en el laboratorio. Finalmente, el ciclo se culmina mediante una actividad de solución de ejercicios individual que se realiza fuera del aula.

La técnica didáctica de aprendizaje basado en problemas (ABP) es una metodología donde se proponen problemas y/o escenarios reales. Se pretende que los estudiantes encuentren soluciones viables trabajando colaborativamente. En este ambiente los alumnos aprenden contenidos matemáticos, desarrollan habilidades sociales de comunicación, establecen estrategias, toman decisiones y encuentran sentido a lo que aprenden (ITESM, 1999). Una buena estrategia de enseñanza es considerar ciclos de aprendizaje con actividades, discusiones en clase y ejercicios, culminadas con la resolución de problemas reales.
Por otra parte, los cursos masivos abiertos en línea (MOOC) son una alternativa para apoyar el aprendizaje de contenidos matemáticos. La propuesta de este trabajo es usar un MOOC de "Introducción a las Matemáticas" que considere herramientas tecnológicas de vanguardia y utilice ciclos de aprendizaje, teniendo como soporte la Teoría APOE y los ciclos ACE.

Diseño del curso

El trabajo se estructuró en dos fases. En la primera se elaboró un examen diagnóstico de matemáticas básicas, diferente al utilizado por la institución, que permite detectar las áreas de mejora de los alumnos por cada uno de los temas del curso. El examen se validó estadísticamente mediante su aplicación a diferentes grupos de estudiantes. Posteriormente, se construyó un libro electrónico con diferentes materiales didácticos y se organizó un curso en la plataforma Open-EdX. Se seleccionó esta plataforma porque permite interactividad en todo momento y lugar con cualquier dispositivo móvil. El curso se estructuró en cinco módulos. En los dos primeros "Álgebra I y II" se revisan las herramientas algebraicas más usuales: factorización, solución de ecuaciones algebraicas, sistemas de ecuaciones entre otros temas. En el tercer módulo "Geometría Analítica" se analizan las curvas cónicas y sus propiedades. En el cuarto "Trigonometría" se presentan y exploran las propiedades de los triángulos. En el último se discuten los conceptos básicos de funciones. Por otra parte, cada módulo está estructurado en la forma usual de un MOOC y contiene: presentación de entrada, material electrónico de apoyo, teoría básica, práctica de exploración, ejemplos, ejercicios interactivos, problema y evaluación, ver figura 1.



2.3 Método de completar el cuadrado perfecto

Para resolver una ecuación cuadrática podemos utilizar el método de completar cuadrados. Este método se basa en utilizar el producto notable $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$. En efecto, el proceso empieza por considerar la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, despúes se manipula como se describe a continuación

$$ax^2 + bx = -c \qquad \text{reescribiendo}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{dividiendo entre } a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{completando el cuadrado}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{identificando y simplificando}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{despejando } x$$

Para precisar ideas, supón que queremos determinar las raíces de $x^2 + 4x + 3 = 0$. Tenemos entonces

$$x^2 + 4x = -3 \qquad \text{reescribiendo}$$

$$x^2 + 4x + 4 = -3 + 4 = 1 \qquad \text{completando el cuadrado}$$

$$(x+2)^2 = 1 \qquad \text{identificando el cuadrado}$$

$$x + 2 = \pm 1 \qquad \text{tomando la raíz}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 1 \qquad \text{despejando } x$$

Las raíces son entonces $x = -1, -3$.

Pregunta:
¿Qué término hay que sumar en $x^2 + 10$ para tener un cuadrado perfecto?.

Figura 1. Material electrónico de apoyo del curso

En el apartado de teoría se consideran los conceptos más importantes, los algoritmos necesarios y los resultados relevantes, este apartado se enlaza con un video complementario, donde se explican los conceptos fundamentales. En las prácticas de exploración se utilizan los paquetes Mathematica, Desmos y Geogebra para analizar conceptos del tema y practicar ejercicio. En la figura 2 se muestra una práctica de exploración sobre la hipérbola en Desmos.

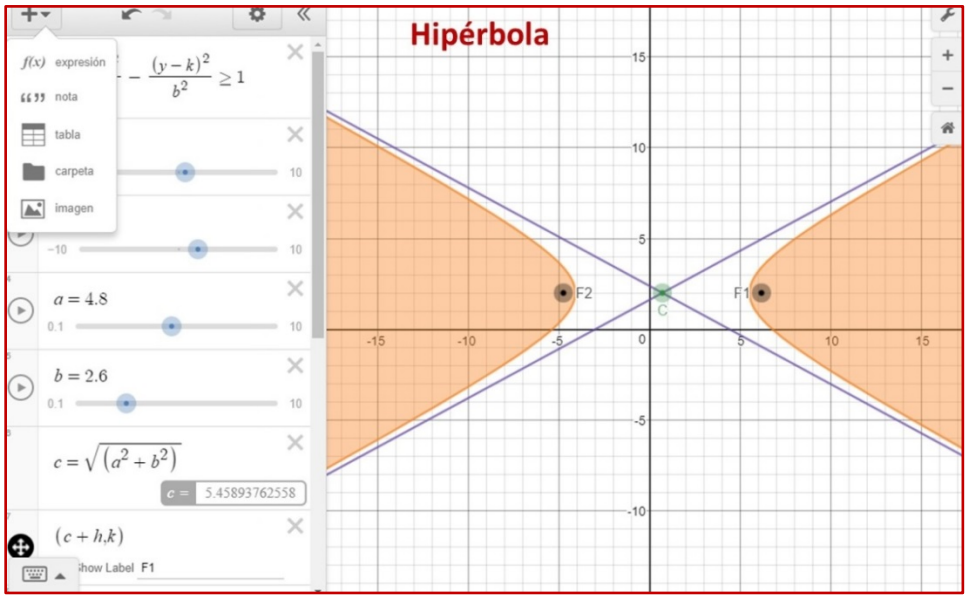


Figura 2. Actividad de exploración con el paquete Desmos.

En la sección de ejemplos y ejercicios se explican ejemplos típicos y los estudiantes resuelven ejercicios mediante el entrenador del tema, que retroalimenta inmediatamente. Este sistema se construyó mediante programas escritos en Lenguaje Phyton y se usó el lenguaje LaTeX y la librería MathJax para uniformizar la simbología matemática. En la figura 3 se muestra un ejemplo y el código de su implementación En el apartado de problemas se presentan situaciones complejas a los estudiantes. Finalmente, cada alumno es evaluado mediante ejercicios y problemas seleccionados aleatoriamente.

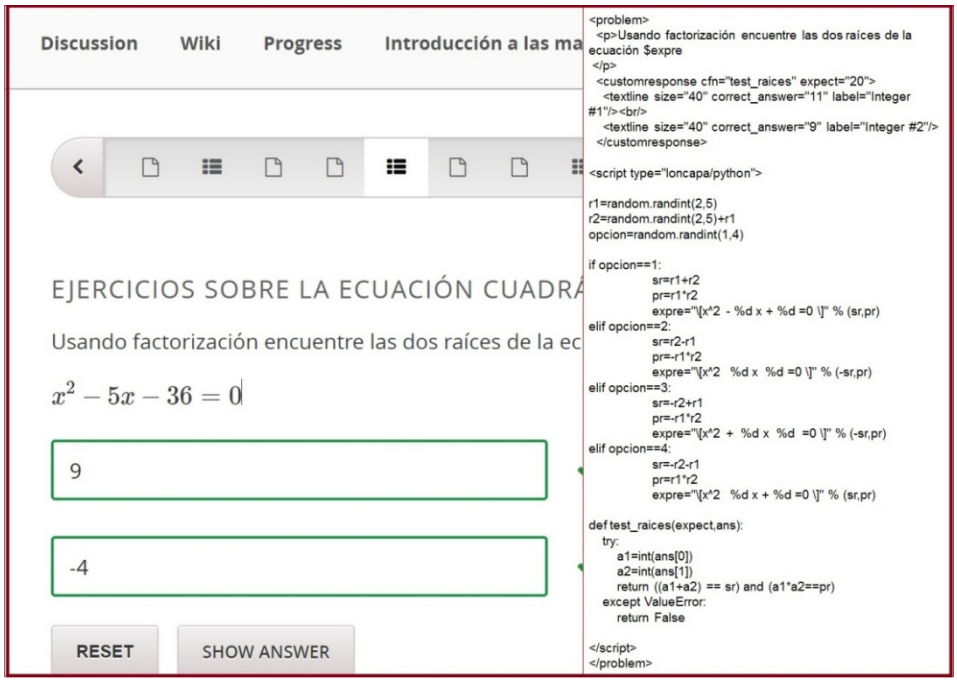


Figura 3. Entrenador de ejercicios

Investigación

El examen diagnóstico se aplicó a 343 estudiantes para validarlo estadísticamente. A ellos se les clasificó como alumnos sobresalientes, regulares y deficientes, dependiendo de su resultado. Posteriormente se aplicó, tanto el examen oficial de 25 preguntas como el de diagnóstico de 50 preguntas, a 212 alumnos de nuevo ingreso del ciclo agosto-diciembre de 2016. Finalmente, se compararon los resultados obtenidos en ambos exámenes. Por otra parte, el curso se terminó de construir en el semestre agosto-diciembre de 2017 y se han puesto en escena los módulos de Álgebra II y Geometría Analítica. Aquí se seleccionó a un grupo de 27 alumnos del curso de Introducción a las Matemáticas. Ellos resolvieron actividades y ejercicios propuestos y fueron evaluados en la plataforma. Estos alumnos contestaron una encuesta de percepción del material propuesto. Se espera hacer una más amplia investigación en el futuro.

Resultados

El examen diagnóstico consta de 50 preguntas agrupadas en módulos: 14 para álgebra básica (Alg1), 16 para álgebra II (Alg2), 7 para trigonometría (Trig), 6 para geometría analítica (GeoA) y 7 para conceptos de funciones (Func). Al aplicar este examen se obtuvieron los resultados que se muestran en la figura (4), allí se comparan con el global del examen oficial (E-O). Aun cuando los resultados globales son significativamente similares, el examen diagnóstico muestra conocimientos no detectados por el examen oficial. Un resultado interesante es que los alumnos considerados como sobresalientes resuelven satisfactoriamente las preguntas sobre "ecuación de segundo grado" y "sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3" y los alumnos deficientes no las contestan.

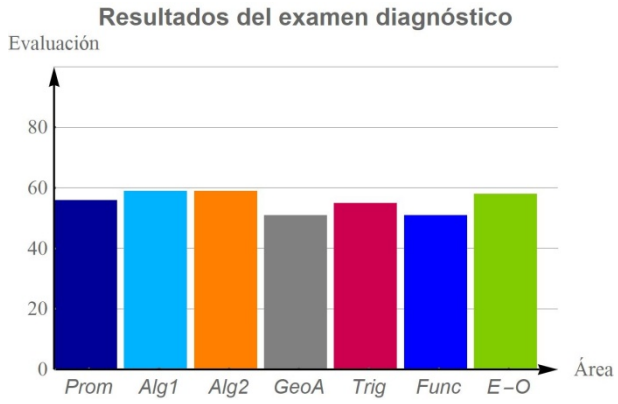


Figura 4. Resultados del examen diagnóstico.

Por otra parte, los resultados en la aplicación del módulo de geometría analítica con alumnos de "Introducción a las Matemáticas" muestran que los alumnos que se apoyan con el material en línea (M) obtienen notas ligeramente superiores a los que no lo llevan (C), ver figura (5). Este resultado no debe ser considerado definitivo y deberá analizarse a la luz de nueva información.

Los resultados de percepción del uso del material indican que los alumnos consideran que el trabajo de profesor (Prof), la organización (Org) y los objetivos (Obj) del curso fueron adecuados. Sin embargo,

sugieren dedicar más tiempo (Tiem) También y mejorar la comunicación (Com) entre el profesor y ellos. También consideran que es posible mejorar los apoyos y el entrenador interactivo (Apo), ver figura (6).

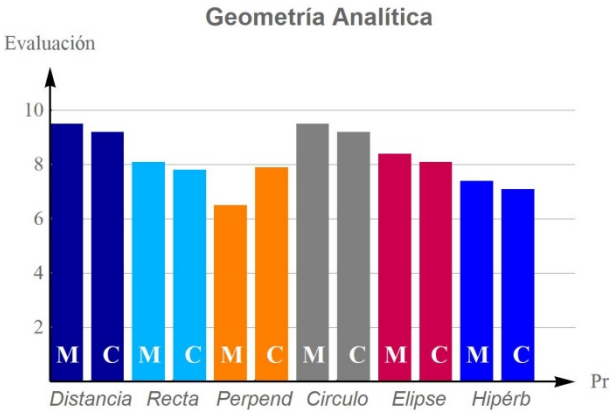


Figura 5. Resultados al aplicar el módulo de Geometría analítica.

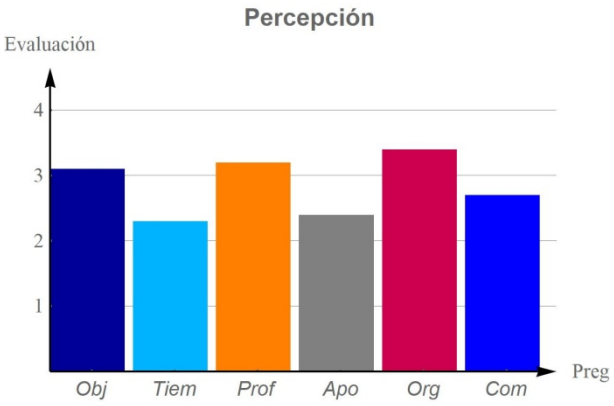


Figura 6. Resultados de la encuesta de percepción.

Discusión

En el examen diagnóstico se observa que menos del 50% de los alumnos cuenta con competencias básicas de álgebra, situación que coincide con los resultados históricos obtenidos por alumnos de nuevo ingreso al CEM y con los resultados reportados por PISA para el país. Por otra parte, existen semejanzas y diferencias con los estudios hechos por Stillson & Alsup (2003). Ellos utilizaron el sistema adaptativo Aleks y reportan que 42.6% de sus alumnos no aprueban el examen diagnóstico de álgebra básica y que mejoran hasta un 89% después de tomar el curso. Sus preguntas fueron abiertas y aleatorias. Los resultados de este trabajo son similares, pero difieren en el tipo de preguntas utilizadas. En general, los resultados de este estudio están acordes con las investigaciones realizadas en otros ámbitos hasta ahora. En cuanto a los resultados parciales del curso de "Introducción a las Matemáticas", se observa mejora en la presentación de los temas, hecho atribuible a que se siguieron las recomendaciones de Zapata (2015) para la construcción de un curso en línea o MOOC. Además, se percibe que los alumnos participan activamente

en los ejercicios interactivos propuestos lo que produce una comprensión ligeramente superior de sus procesos algorítmicos. Este resultado deberá estudiarse a fondo cuando el curso se aplique completamente.

Conclusiones

Las tendencias educativas en el aprendizaje adaptativo deben ser consideradas en la implementación de proyectos educativos. El reconocer que los estudiantes son diferentes y que cada uno de ellos requiere un plan acorde a sus necesidades abre nuevas perspectivas de investigación educativa. En este trabajo, notamos que un nuevo examen diagnóstico de matemáticas básicas permite conocer con mayor amplitud y profundidad las fortalezas y las deficiencias matemáticas de los estudiantes que ingresan a carreras profesionales en el Tecnológico de Monterrey. Este examen da información sobre los conocimientos y habilidades en Álgebra, Geometría Analítica, Trigonometría y Funciones.
Por otra parte, existen nuevas tecnologías educativas que producen mejoras sustantivas en los estudiantes. Un ejemplo es el MOOC de Introducción a las Matemáticas, cuyos primeros resultados indican que los alumnos participan mucho más que en cursos convencionales, y sus resultados son estadísticamente equiparables.

Referencias bibliográficas

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.). Advanced Mathematical Thinking, 95-123, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In The teaching and learning of mathematics at university level, 275-282, Springer, Netherlands.

ITESM (1999). El ABP como técnica didáctica. México: ITESM.
OCDE (2013). Reporte PISA 2012. Recuperado el 14 de febrero de 2017 de http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-mexico-ESP.pdf

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática*, 26(3), 75.

Salinas, P., Quintero, E. & Rodríguez, J. (2015). Curso híbrido y de aula invertida apoyado en MOOC: experiencia de autoevaluación. *Apertura*, *7*(1), 50-63.

Santiago, R. (2014). Reporte a escuelas proveedoras de nivel A. Reporte interno: ITESM.

Santiago, R., Delgado, D. & Quezada, M. (2012) Sistema de apoyo para el aprendizaje de las matemáticas basado en Web. Compendio de innovación educativa 2012. Proyectos apoyados por el Fondo NOVUS.

Santiago, R. & Quezada, L. (2013) GenTutor: un sistema generador de entrenadores adaptativo. Documento interno no publicado, ITESM, México.

Santiago, R. & Quezada, L. (2014). Laboratorio de Matemáticas. Recuperado el 14 de febrero de 2017 de http://laboratoriomatematicas.weebly.com.

Stillson, H., & Alsup, J. (2003). Smart ALEKS... or not? Teaching Basic Algebra using an online interactive learning system. *Mathematics and Computer Education*, 37(3), 329.

Vizcaino, O. (2004). Evaluación del aprendizaje del cálculo desde una perspectiva constructivista. México: IPN.

Zapata, M. (2015). El diseño instruccional de los MOOC y el de los nuevos cursos abiertos personalizados. *Revista de Educación a Distancia*, (45).

INTEGRAÇÃO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NA PRÁTICA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Fátima Aparecida da Silva Dias; Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Norte do Paraná, Brasil, Universidade Anhanguera de São Paulo. (Brasil)
fatimadias.consultoria@gmail.com, nielce.lobo@anhanguera.com

Resumo

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa de Doutorado que teve por objetivo analisar um projeto de políticas públicas educacionais, quanto à integração de tecnologia digital ao ensino de Matemática. A metodologia qualitativa do tipo *Grounded Theory* se desenvolveu em etapas: documental e campo, com coleta envolvendo dados históricos e entrevistas. A teoria para análise da formação continuada se constituiu dos estudos de Ball (2009), Almeida (2001, 2007), Schön (1992) e de Koehler e Mishra (2006) sobre conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo. Neste recorte focamos na identificação e análise das contribuições da formação continuada para favorecer a integração de tecnologia digital no currículo de Matemática. Os resultados evidenciaram aspectos relevantes da formação para auxiliar o professor quanto à integração de tecnologia digital ao currículo de Matemática da Educação Básica.

Palavras-Chave: formação, tecnologia digital, currículo de matemática

Abstract

This paper shows the outcomes of a PhD research aimed at analyzing a project of educational public policies, regarding the integration of digital technology in mathematics teaching. The Grounded- Theory qualitative methodology was applied in stages: documentary search and field research, through historical data collection and interviews. The theory that supported the analysis of continuing education was designed according to Ball (2009), Almeida (2001, 2007), Schön (1992) ,and on Koehler and Mishra (2006) studies on technological- pedagogical-content knowledge. This report focuses on the identification and analysis of the continuing education contributions to favor the integration of digital technology to the mathematics curriculum. The results showed relevant aspects of the students' education process to assist the teacher in the integration of digital technology into the Mathematics curriculum of Basic Education.

Keywords: education, digital technology, mathematics curriculum

Introdução

Em tempos de inovações e avanços tecnológicos, o Estado brasileiro vem empreendendo iniciativas por meio de políticas públicas para a implementação de projetos que utilizam Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) com finalidade educacional, de modo a auxiliar os processos de

ensino-aprendizagem. A Educação Básica brasileira vem avançando na implementação de projetos que envolvem a utilização de tais tecnologias e tem passado por constantes mudanças curriculares.

Neste artigo apresentamos um recorte dos resultados de uma pesquisa de Doutoramento que analisou a implementação de uma política pública da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (Seesp), o Projeto Aula Interativa (AI), seus pressupostos, ações e contribuições à prática docente, especialmente quanto à integração de tecnologia digital ao currículo de Matemática.
O Projeto foi implementado no âmbito de unidades escolares da Educação Básica de um município do interior do Estado de São Paulo, com duração de quatro anos. O principal objetivo da pesquisa foi o de analisar pressupostos, ações e contribuições à prática docente, especialmente quanto à integração de tecnologia digital ao currículo de Matemática do referido projeto. AI foi desenvolvido a partir dos seguintes eixos estruturantes: currículo integrado ao uso de tecnologias digitais, produção de conteúdos digitais integrados ao currículo; formação continuada de educadores; avaliação e monitoramento. Entretanto, neste artigo privilegiamos os resultados da análise do terceiro eixo, o qual objetivou identificar e analisar as contribuições da formação continuada integrante do Projeto AI para favorecer a integração de tecnologia digital para o currículo de Matemática.

Ademais, contou com um programa de formação continuada que atendeu a todos os educadores envolvidos, gestores da SEESP, assim como professores e alunos estagiários – estes contratados para auxiliar os professores em sala de aula nas atividades do Projeto – das unidades escolares, tendo por finalidade dar suporte na aplicação dos conteúdos digitais, além do uso das tecnologias digitais disponíveis nas salas de aula das unidades escolares e nos ambientes de formação docente.

Formação Continuada dos Atores

Para a revisão de literatura sobre formação continuada foram mapeadas as pesquisas e estudos que se propuseram a discutir tal formação continuada com – e para – o uso de tecnologias digitais na Educação. Para isso, foi consultado o banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e de universidades públicas e privadas, nacionais e estrangeiras.

Como descritor pesquisado, usamos a expressão formação continuada com e para o uso de tecnologias digitais. Nessa pesquisa retornaram como resultados as teses de Doutorado de Kawasaki (2008), Richit (2010) e Piorino (2012), as quais serão descritas a seguir.
Com base na teoria da atividade, a pesquisa de Kawasaki (2008) analisou um grupo de formadores e professsores de Matemática dentro de um contexto de formação continuada. Essa autora buscou compreender a relação entre resistência e mudança às inovações tecnológicas para incorporar a prática docente. Assinalou a relevância de as atividades de formação continuada estarem conectadas às realizadas em sala de aula pelo docente.

Por sua vez, Richit (2010) investigou desde aspectos políticos até motivacionais, os quais relativos à formação continuada de professores de Matemática. A autora apresentou as políticas públicas implementadas na Educação, em particular na formação continuada docente, questionando como ocorre a apropriação de conhecimentos pedagógicos e tecnológicos em Matemática e como a implementação de políticas públicas de formação continuada podem impactar no desenvolvimento profissional docente.

Já Piorino (2010) investigou como a formação continuada no âmbito de uma escola que participava do Projeto Um Computador por Aluno (UCA) possibilitou o desenvolvimento de competências pedagógico-digitais nos professores e como os avanços docentes em relação à apropriação pedagógica da tecnologia disponível nesse projeto promoveu a aproximação entre docentes e discentes.

A partir desse levantamento, percebemos a necessidade de pesquisas concernentes à formação docente para o uso de tecnologias na Educação Básica, especificamente sobre o emprego de tecnologias digitais integradas ao currículo de Matemática, utilizando conteúdos digitais em conjunto com ações de formação contínua para subsidiar gestores e professores no – e para – o uso desses recursos.
Ao analisar as pesquisas relacionadas à formação continuada docente, apuramos o olhar em direção aos pressupostos teóricos apresentados a seguir e que embasaram esta pesquisa.

Pressupostos Teóricos

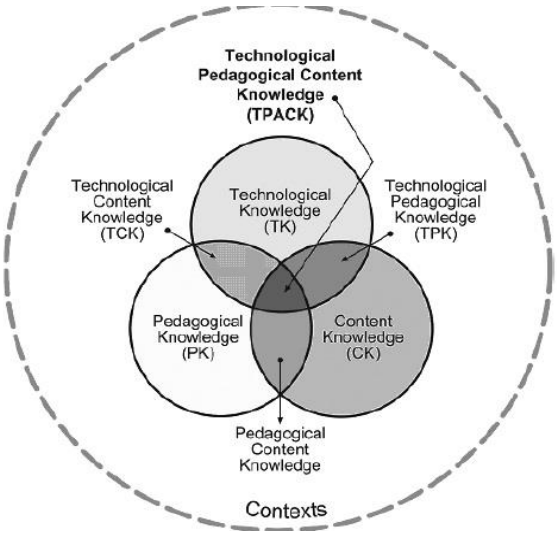
Para discutir a formação continuada que intende auxiliar o professor na inserção e integração de tecnologias ao ensino nos fundamentamos nas ideias de Almeida (2001, 2007), Imbernóm (2006) e Zeichner (1993), e nas dimensões de Schön (1992) quanto aos conhecimentos docentes, no modelo TPACK, criado por Koehler e Mishra (2006) – os quais sumarizamos a seguir.

Segundo Schön (1992), para que o professor incorpore os recursos disponíveis, torna-se necessário conceber um programa de formação com foco na "ação e na reflexão sobre a ação" e que envolva professores, gestores e demais profissionais da rede de ensino. Tal formação deve contemplar ações que integrem o uso das TDIC ao currículo, bem como a formação para incorporar o emprego das TDIC para a inovação e autonomia, de modo que os docentes elaborem novas propostas de uso dessas tecnologias.

Almeida (2002) salientou que além de conhecer os materiais didáticos para uma prática pedagógica efetiva em um ambiente no qual esses recursos são compostos por tecnologias, é necessário que o professor participe de processos de formação continuada, de maneira que possa desenvolver, além do conhecimento do currículo, saberes tecnológicos, pedagógicos e de conteúdo.

Koehler e Mishra (2006, p. 1.026) têm pesquisado os conhecimentos necessários à docência na presença da tecnologia e, segundo esses autores, a integração entre o "[...] conhecimento sobre o Conteúdo (C), Pedagogia (P), e Tecnologia (T) é central para que o professor desenvolva um bom ensino". A Figura 1 ilustra tal integração:

Figura 1. Metodologia TPACK



Fonte: Adaptado de Khoeler e Mishra (2006)

Para ambos, da integração entre conhecimentos tecnológicos, pedagógicos e de conteúdo e na interseção entre estes é gerado um tipo de saber, o qual denominaram Conhecimento Pedagógico, Tecnológico do Conteúdo (TPACK) – que o professor precisa construir para atuar na docência com tecnologia.

Imbernóm (2006) ressalta que formar o professor para as mudanças desta sociedade se faz necessário, bem como para enfrentar as alterações na própria educação. Entretanto, é relevante disponibilizar espaços de formação e subsídios que promovam discussão e reflexão para que cada profissional possa socializar as experiências e, assim, preparar-se para enfrentar e conviver com as mudanças e incertezas.

Complementando, buscamos o aparato teórico em Zeichner (1993), uma vez que este reforça a proposta de Imbernóm (2006) e defende que a formação, além de subsidiar, deve ter como foco tornar os professores reflexivos e analíticos para que desempenhem papéis ativos nos processos de inovações curriculares.

Em relação à implementação de políticas públicas na Educação para o uso de tecnologias digitais, Ball (2009) advoga que o conjunto de políticas educacionais não pode ser compreendido apenas do ponto de vista do Estado-Nação, propondo o ciclo de políticas – este constituído por três contextos principais, os quais: de influência, da produção do texto e da prática –, em um processo teórico-metodológico no qual são investigadas as relações entre diferentes contextos da política, com a finalidade de contribuir para a compreensão da história das políticas públicas educacionais.

Segundo os autores aqui mencionados, é fundamental que o professor conheça e incorpore os recursos disponíveis em sala de aula para, em seguida e por meio das ações de formação, desenvolver a autonomia necessária para a criação de novas propostas, estas embasadas nas novas tecnologias e integradas ao desenvolvimento do currículo.

Caminho Metodológico

A metodologia da pesquisa, de cunho qualitativo, seguiu os princípios da *Grounded Theory*, de Glaser e Strauss (1967). Em português é conhecida por Teoria Fundamentada nos Dados (TFD) e é um referencial metodológico que, segundo Strauss e Corbin (1990), tem por objetivo identificar, desenvolver e relacionar conceitos. Pesquisar a partir da *Grounded Theory* é traçar um caminho metodológico no qual o pesquisador sabe onde inicia o primeiro passo, mas não o último; ou seja, ao final do percurso pode se deparar com o inesperado. O pesquisador manipula e interage com os dados, de modo que, se inicialmente perceber que esses são insuficientes, poderá, ao longo da pesquisa, rever ou buscar outros dados que complementem os existentes.

Não partimos de teorias *a priori* e hipóteses que pudessem delimitar nosso olhar investigativo, mas sim das questões e objetivos definidos para auxiliar e direcionar as opções metodológicas no contexto da pesquisa, bem como de estratégias para auxiliar na organização do pensamento, de modo a atingir os objetivos. Assim, estabelecemos pressupostos teóricos relativos às TDIC na Educação, à formação continuada docente e às políticas públicas educacionais sem, contudo, limitar esse olhar.

Ademais, o processo de pesquisa se apoiou em métodos que valorizaram o envolvimento do pesquisador na busca pelas respostas às indagações da investigação empreendida.
Assim, os procedimentos metodológicos se constituíram em etapas: (i) coleta, seleção, composição e organização dos dados históricos do Projeto AI; (ii) criação e aplicação de instrumentos complementares, tais como entrevistas semiestruturadas.
Na primeira etapa, procurou-se entender o contexto do Projeto AI e de seus princípios. Para isso, o estudo foi estruturado nos dados históricos do Projeto, os quais compostos por memórias de reuniões; documento base; termos; relatórios; roteiros; planos; documentos de orientadores e informativos. Para melhor entendimento, doravante foram utilizadas abreviaturas ao mencionar cada tipo de documento histórico, como segue no Quadro 1:

Quadro 1. Relação de documentos históricos coletados.

Abreviatura	Tipo de Documento Histórico
1. **MR**	Memória da Reunião
2. **DB**	Documento Base
3. **TA**	Termo de Adesão
4. **OTP**	Orientação Técnica e Pedagógica
5. **RAE** **RAI**	Relatório de Avaliação: ▪ Externa ▪ Interna
6. **PCAC**	Procedimento de Criação e Aprovação de Conteúdo
7. **RI-ESP** **RD-DES** **RR-VAL** **RTP-PROF**	Roteiro: ▪ Inicial – Especialista ▪ Desenvolvimento – Desenvolvedor ▪ Revisão – Validador ▪ Técnico Pedagógico – Professor

8.	**PC**	Plano do Curso
9.	**RC** **RPDAI**	Regulamento de: ▪ Curso ▪ Premiação "Destaque Aula Interativa"
10.	**BI**	Boletim Informativo

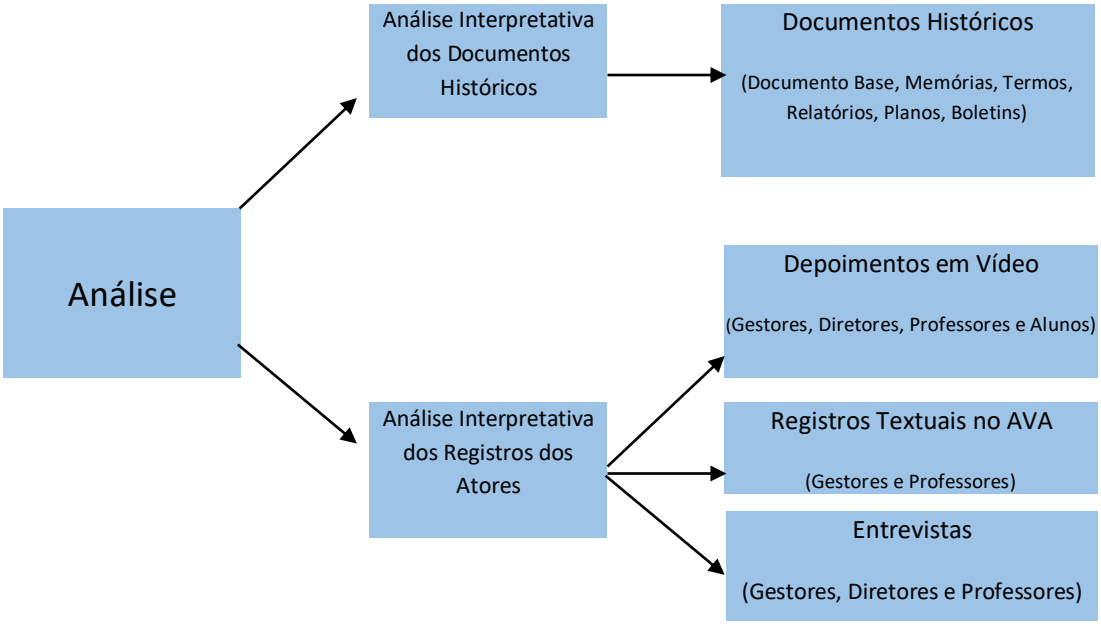
Fonte: Dias (2015).

Na segunda etapa realizamos a pesquisa de campo, onde foram elaborados quatro tipos de entrevistas com a finalidade de complementar e confrontar os dados documentais e melhor compreender o Projeto em análise. Os participantes dessa etapa foram os atores e gestores dos diversos segmentos envolvidos no Projeto AI.
Na sequência detalhamos a análise.

Análise

A análise foi estruturada em duas etapas. Na primeira foi realizada a pesquisa documental dos registros históricos do Projeto AI. Na segunda, acerca dos registros dos atores, foram extraídos depoimentos em vídeos, fóruns estocados em Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), entrevistas semiestruturadas e questionários.
As análises foram organizadas a partir da interlocução entre os pressupostos teóricos, os objetivos e o caminho metodológico trilhado para coletar e selecionar os dados. Foram, portanto, estruturadas tal qual se ilustra na Figura 2:

Figura 2. Etapas das análises



Fonte: Dias (2015)

A Figura descreve as etapas da análise: (i) análise interpretativa documental, na qual foram interpretados documentos históricos do Projeto; (ii) análise interpretativa dos registros dos atores, constituída na interpretação dos registros textuais extraídos do AVA do curso, das transcrições das entrevistas semiestruturadas e depoimentos em vídeo realizados com atores participantes.
Realizada a coleta, seleção e composição dos documentos históricos do Projeto, criamos e aplicamos os instrumentos complementares à pesquisa de campo.

Resultados

Constatamos que o Projeto apresentou características específicas de inovação, tais como as ações de formação continuada terem sido desenvolvidas no contexto das unidades escolares e da sala de aula – ambientes semelhantes aos instalados nas salas de aula, o que favoreceu o desenvolvimento do conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo, contribuindo para o desenvolvimento profissional docente.

Constatamos ainda características que se destacaram para potencializar a inserção das tecnologias em fases, assim como a preparação dos professores e gestores para receber essas novas tecnologias digitais; a ênfase à formação continuada dos gestores e professores das unidades escolares, bem como os gestores do Projeto. As reflexões vivenciadas na formação continuada provocaram mudanças profissionais e pessoais, fazendo com que os docentes percebessem que havia uma nova metodologia de ensino e aprendizagem e que poderiam unir tecnologia-pedagogia-conteúdo para inovar em suas aulas. A formação permitiu que os envolvidos percebessem também que seria possível desenvolver uma metodologia diferenciada; ou seja, que para usar as tecnologias digitais, tornava-se necessário ampliar os conhecimentos pedagógicos, saber fazer uso da tecnologia em si e conhecer os conteúdos da disciplina; em síntese, desenvolver o TPACK.

Concluímos que a formação continuada é um dos eixos fundamentais em projetos de inserção e integração de tecnologias, uma vez que os atores envolvidos devem ser preparados para – e durante – a mudança . Diante disso, destacamos a relevância das políticas públicas para o uso de tecnologias digitais na Educação, especificamente quando em tal implementação são considerados os contextos do ciclo dessas políticas públicas na esfera educacional.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e ao Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) pela bolsa de estudos concedida nos projetos n.º 99/2010 e n.º 19.366/2012 do Programa Observatório da Educação, este que auxiliou no financiamento parcial desta pesquisa.

Referências bibliográficas

Almeida, M. E. (2007). *Tecnologias digitais na educação*: o futuro é hoje. São Paulo: Universidade Estácio de Sá.

Almeida, M. E. (2002). *Incorporação da tecnologia de informação na escola: vencendo desafios, articulando saberes, tecendo a rede*. In. MORAES, M.C. (org.). Educação a distância: fundamentos e práticas. SP. NIED, Unicamp.Campinas.

Almeida, M. E. (2001). *Educação, projetos, tecnologia e conhecimento*. São Paulo: Proem.

Ball, S. (2009). *Ciclo de políticas e análise de políticas*. Entrevistadora: Lopes, A. C. Rio de Janeiro: Universidade Estadual do Rio de Janeiro. Recuperado de 15 janeiro 2014 de http://www.ustream.tv/recorded/17998808?lang=pt_BR.

Dias, F. A. S. (2015). *Integração de tecnologias digitais ao currículo de Matemática: um estudo do projeto aula interativa*. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). The discovery of grounded theory: strategies forqualitative research. *Piscataway: Aldine Transaction*.

Imbernóm, F. (2006). *Formação docente profissional: formar-se para a mudança e a incerteza* (6a ed.) (Série Questões da nossa época). São Paulo: Cortez.

Kawasaki, T. F. (2008). *Tecnologias na sala de aula de matemática: resistências e mudanças na formação continuada de professores*. 212 f. Tese de Doutorado em Conhecimento e Inclusão Social, Faculdade de Educação, Universidade Federal. de Minas Gerais. Belo Horizonte.

Koehler, M.; Mishra, P. (2006). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Contemporary issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60-70.

Schön, D. A. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In: Nóvoa, A. (Coord.). *Os professores a sua formação*. Lisboa: Publicações Dom Quixote; Instituto de Inovação Educacional. Educacional.

Strauss, A. & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. [S.l.]: Lage Publications.

Zeichner, K. (1993). *A formação reflexiva de professores: ideias e práticas*. Lisboa: Educa.

NOCIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA: UNA MIRADA DESDE EL ENFOQUE INSTRUMENTAL

Mihály Martínez Miraval, Agustín Curo Cubas
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. (Perú)
pcmammar@upc.edu.pe, agustin.curo@upc.pe

Resumen

Esta investigación presenta el análisis de cómo se generó la génesis instrumental de la noción de integral definida en estudiantes universitarios desde el Enfoque instrumental, mediada por el Geogebra. Al contrastar los resultados esperados y obtenidos por medio de la Ingeniería didáctica, se observó que los estudiantes generaron esquemas de utilización de la integral definida al emplearla en la resolución de problemas matemáticos, evidenciando la instrumentalización e instrumentación de dicha noción matemática.

Palabras clave: génesis instrumental, área, integral definida, geogebra

Abstract

This research shows the analysis of how the instrumental genesis of definite-integral notion was generated by university students from the GeoGebra-based Instrumental Approach. When contrasting the expected results to the ones obtained by using Didactic Engineering, we could observe that the students generated schemes to use the definite integral by using it in solving mathematical problems, showing the instruments used and the instrumentation of this mathematical notion.

Key words: instrumental genesis, area, definite integral, geogebra

Introducción

La integral definida es uno de los conceptos más relevantes en la enseñanza del Cálculo, pues este contenido aparece en la formación básica de varias especialidades como la de administración a nivel universitario en Perú.

Es frecuente que los libros de cálculo asocien la noción de integral definida al problema de hallar el área de una región R limitada por el eje x y una curva $y = f(x)$, en un intervalo dado, debido a que se desconoce una fórmula de geometría plana para hacerlo o con la intención de mostrar un nuevo proceso de cálculo. La solución propuesta en estos libros para resolver dicho problema, privilegia el manejo algebraico sobre el gráfico, y no permite apreciar el procedimiento dinámico que consiste en aumentar el número de rectángulos, refinándolos cada vez más, cuya suma de áreas tiende al área de la región R; asimismo, la

orientación para el cálculo de áreas de regiones apunta a la aplicación directa del teorema fundamental del cálculo (Stewart, 2011; Haeussler 2008).

> En el capítulo 2 utilizamos los problemas de la recta tangente y la velocidad para introducir el concepto de derivada, que es la idea central en el cálculo diferencial. De la misma manera, este capítulo comienza con los problemas de área y distancia y los utiliza para formular la idea de integral definida, que es el concepto básico del cálculo integral. Veremos en los capítulos 6 y 8 cómo utilizar la integral para resolver problemas relacionados con volúmenes, longitud de curvas, predicciones de una población, registro cardiaco, fuerzas sobre una presa, trabajo, excedente de consumo y el beisbol, entre muchas otras situaciones.
>
> Existe una conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con la derivada; veremos en este capítulo que este teorema simplifica en gran medida la resolución de muchos problemas.

Figura 1. Introducción al capítulo Integrales. Extraído de Stewart (2011, p. 359)

Artigue (2002) sostiene que la enseñanza del cálculo integral genera en los estudiantes un mayor dominio algebraico, donde predomina el cálculo de antiderivadas y no la comprensión de los procedimientos. Sin embargo, la autora indica que las experiencias de la ingeniería didáctica, tienden a demostrar que el uso del computador puede generar un equilibrio entre la conceptualización y la algoritmización de conceptos matemáticos, dado que ofrece diversas ventajas didácticas: ayudar a relacionar las representaciones algebraicas y geométricas por la visualización dinámica que proporciona, generar nociones de un concepto matemático a partir de simulaciones interactivas en actividades experimentales, establecer imágenes mentales del objeto matemático y sus propiedades, entre otros.

Para nuestra investigación usamos el software Geogebra que según García-Cuéllar y Salazar (2017), es un ambiente que ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos no solo de geometría sino también de álgebra, análisis y estadística. Es sencillo y fácil de utilizar, lo que facilita desarrollar actividades a través de las herramientas y/o recursos que ofrece. Permite abordar diferentes contenidos de geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, permite la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

Nuestra investigación tiene por objetivo analizar la génesis instrumental de la noción de integral definida mediada por el Geogebra. Para ello utilizamos como marco teórico aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y como marco metodológico, aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995).

Aspectos del Enfoque Instrumental

El Enfoque Instrumental aborda la dimensión tecnológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los términos de este Enfoque que consideramos importantes para nuestra investigación son los de artefacto, esquema e instrumento. Según Rabardel (1995), *un artefacto* es un objeto material o simbólico

susceptible para darle un uso; un *esquema* es el resultado de una construcción propia del sujeto cuando realiza una tarea; y *un instrumento* es el conjunto artefacto – esquema de utilización resultante de la acción propia del sujeto.

Para el autor, el instrumento es una entidad compuesta (figura 2) que incluye una componente artefactual (un artefacto, una fracción de artefacto o un conjunto de artefactos) y una componente cognitiva (el o los esquemas de utilización, a menudo relacionados con esquemas de acción más generales).

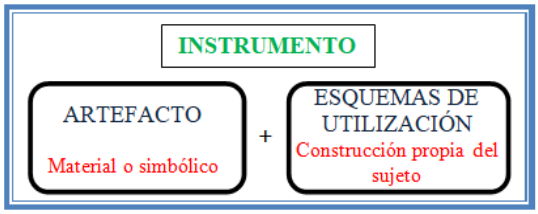


Figura 2. Componentes de un instrumento

Rabardel (1995) afirma que el Enfoque Instrumental estudia los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, a raíz de la generación de esquemas de utilización; a esta transformación la denominó proceso de Génesis Instrumental, la cual consta de:

- Proceso de instrumentalización, que se dirigen hacia el artefacto: selección, ordenamiento, producción e institución de funciones, desvíos, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc. hasta la producción integral del artefacto por parte del sujeto.

- Proceso de instrumentación, que es relativo al sujeto: a la emergencia y la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc.

Respecto a los esquemas de utilización, que son esquemas relacionados con la utilización del artefacto, el autor hace referencia a dos dimensiones de la actividad:

- Actividades relativas a las tareas "segundas", que están orientadas hacia la gestión de las propiedades y características del artefacto. Los esquemas relativos a estas tareas son los *esquemas de uso*.

- Actividades relativas a las tareas "primeras", que están orientadas hacia el objetivo de la actividad, en donde el artefacto se convierte en un medio de realización. Los esquemas relativos a estas tareas son los *esquemas de acción instrumentada*.

Aspectos de la Ingeniería Didáctica.

La Ingeniería Didáctica, en palabras de Artigue (1995), es un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

La ingeniería didáctica, como método de investigación, contempla cuatro fases: a) Análisis preliminar, b) Análisis a priori, c) Experimentación y d) Análisis a posteriori y validación. En la tabla 1, se muestra cada una de las fases de la Ingeniería didáctica que usamos en nuestra investigación.

Tabla 1. Fases de la Ingeniería didáctica

Fases	Descripción
Análisis preliminar	En la **dimensión epistémica** se realizó un estudio de la evolución epistémica de la integral. En la **dimensión cognitiva** realizamos un estudio de investigaciones cuyo objeto de estudio es la integral definida. En la **dimensión didáctica** se han analizado los libros de texto que se utilizan en las universidades de Lima - Perú.
Análisis a priori	En la investigación en esta fase realizamos una revisión de los posibles esquemas de utilización que podrían desarrollar los estudiantes en cada una de las actividades propuestas
Experimentación	Se ha realizó la aplicación de la propuesta didáctica. También se aplicó los instrumentos elaborados y se realizó el registro de observaciones de la experiencia.
Análisis a posteriori y validación	Se ha realizado el análisis de los datos recolectados durante los diferentes momentos de la experiencia.

Experimento y análisis

A partir de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), diseñamos e implementamos actividades experimentales, mediadas por el Geogebra usando *applets* en base a deslizadores y algunos comandos propios del programa, para que el estudiante los utilice como herramienta para hallar la medida del área. La parte experimental se desarrolló con 10 estudiantes de la carrera de Administración de una universidad particular de Lima – Perú, en un laboratorio con computadoras. A continuación presentamos los análisis a priori y a posteriori de dos de las actividades propuestas.

Actividad N° 1:

Abra el archivo Actividad_1.ggb. En la vista gráfica del programa aparece una región *R*, de área igual a 18,6 u^2, limitada por la gráfica de la función $f(x)=0{,}12x^2+2$ y el eje X, en el intervalo para $x\in[1;6]$; y dos deslizadores *n* y n_1.

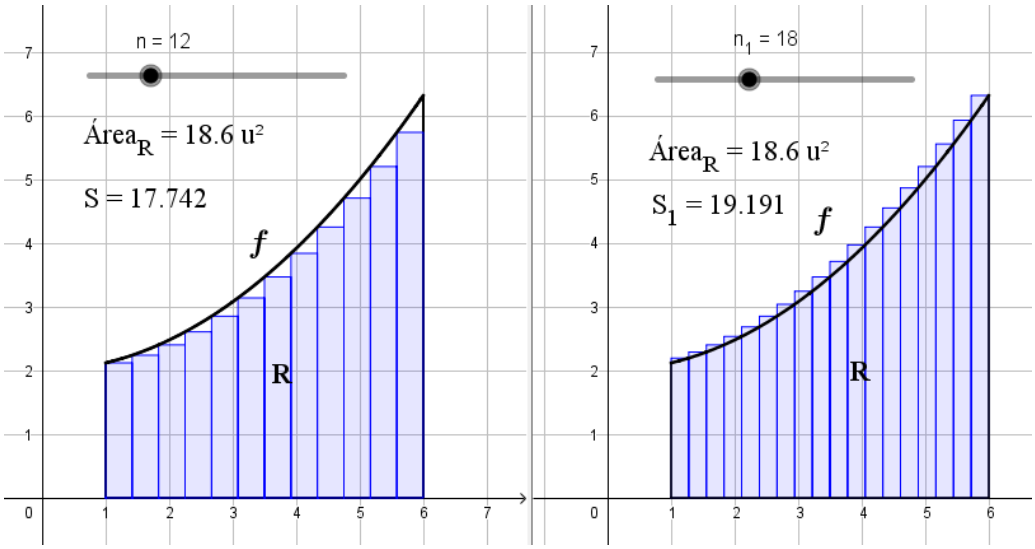


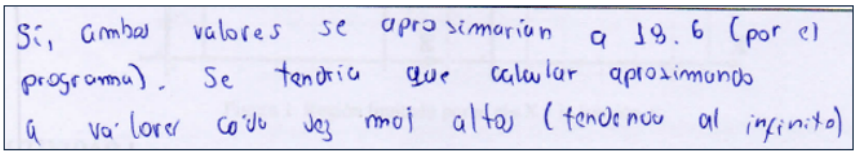
Figura 3. Región *R* limitada por el eje *x* y la función *f*, para $x\in[1;6]$.

a) Dibuje cinco rectángulos con el deslizador *n* y cinco rectángulos con el deslizador n_1. Luego, utilizando la regla de correspondencia de la función *f,* halle la suma de las áreas de los rectángulos en cada caso. A medida que *n* y n_1 aumentan de 1 a 50, ¿qué ocurre con los valores de *S* y S_1? Explique.
b) Si se le permitiera cambiar el valor máximo que toman ambos deslizadores (en ambos casos el valor máximo es 50) por otros valores, por ejemplo 100, 500, 1000, 10000, …; escriba a qué valor se aproximarían *S* y S_1, y cuántos rectángulos se necesitarían para llegar a dicho valor.
c) A partir de lo desarrollado en esta actividad, ¿explique cómo hallaría el área de la región *R*?

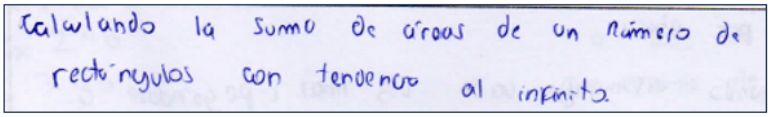
A priori, consideramos que los estudiantes no iban a presentar dificultades para reconocer que los deslizadores *n* y n_1 dibujaban, respectivamente, rectángulos inscritos y circunscritos a la región *R*, y que *S* y S_1 daban la suma de las áreas de dichos rectángulos. Asimismo, consideramos que los estudiantes movilizarían esquemas preexistentes como son las nociones de áreas de rectángulos, intervalos y funciones. Luego de la manipulación de los deslizadores dibujando cada vez más rectángulos, se esperaba que generaran esquemas de uso de la aproximación de *S* y S_1 hacia el área de la región *R*, tanto numérica como gráficamente, y que generarán esquemas de acción instrumentada de la integral definida, como suma de las áreas de rectángulos cuyo número tiende al infinito.

A continuación, mostramos el análisis a posteriori de uno de los estudiantes cuyo nombre es Andrés. Como se había previsto, al responder correctamente al ítem a), se pudo observar que el estudiante movilizó esquemas como áreas de rectángulos, intervalos y cálculo de imágenes de una función.

Del mismo modo, como se había afirmado a priori, Andrés, al manipular los deslizadores e incrementar el número de rectángulos inscritos y circunscritos a la región *R*, y responder a las preguntas b) y c), genera el esquema de acción instrumentada de la integral definida, como suma de las áreas de rectángulos cuyo número tiende al infinito, tal y como se muestra en la figura 4.



(a)



(b)

Figura 4. Esquema de acción instrumentada de la noción de integral definida. (a) Respuesta a pregunta b. (b) Respuesta a la pregunta c.

Actividad N° 2:

Pedro desea revestir la pared de la fachada lateral con madera. Todas las maderas deben tener forma rectangular con bases iguales, y ser colocadas de forma vertical. Los costos que Pedro tendría que realizar se muestran en la tabla:

Compra de madera	Servicio de corte de las maderas a medida
40 dólares por m^2	500 dólares

Pedro ha diseñado el *applet* Actividad 2.ggb que le permitirá observar de forma virtual cómo quedará la fachada con las maderas colocadas. Además le brinda el área que ocupan las maderas en la pared de la fachada.

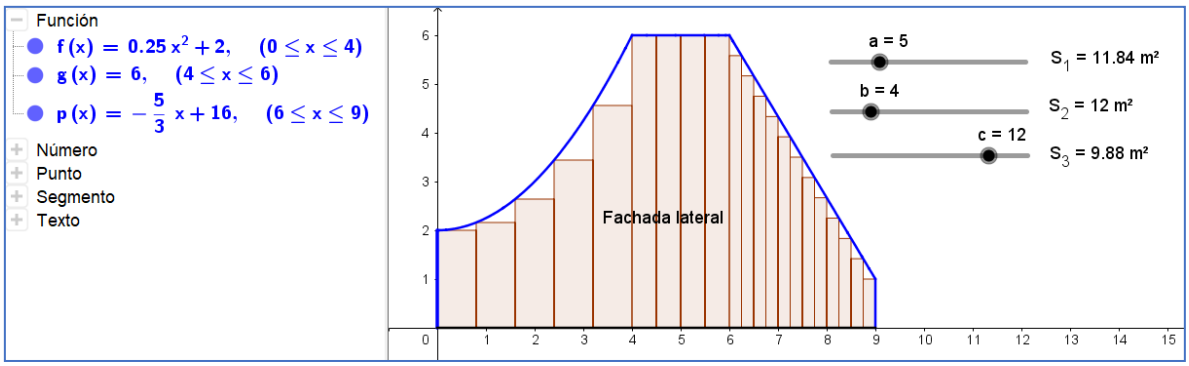


Figura 5. Vista algebraica y vista gráfica de Geogebra de la fachada lateral de una casa.

a) ¿Dé un valor aproximado de cuánto le costaría a Pedro colocar maderas de igual base en la pared de la fachada, si desea que los espacios que quedan sin cubrir se reduzcan significativamente? Justifique su respuesta indicando cuántos rectángulos colocaría y por qué eligió ese número. (Para esta pregunta puede modificar los valores de los tres deslizadores).
b) Debido a los costos elevados de revestir la pared de la fachada con madera, Pedro decidió pintarla por su cuenta. La pintura que desea comprar se vende en el supermercado a un costo de 18 dólares por m^2. ¿Exactamente, cuánto gastaría Pedro en pintura? Explique su procedimiento.

A priori, se esperaba que los estudiantes reconocieran la información dada en las vistas gráficas y la función de los deslizadores para el dibujo de rectángulos y el cálculo de la suma de sus áreas, en el contexto de la situación, movilizando los esquemas de uso, áreas de rectángulos, intervalos, función; y el esquema de acción instrumentada, integral definida. Se esperaba que los estudiantes para la pregunta a), modifiquen el valor máximo del deslizador por otro aún mayor, de modo que se dibujen más rectángulos y se aprecie, a "simple vista", toda la fachada lateral cubierta, de modo que se halle la suma de las áreas de los rectángulos y luego se calcule el costo total. Para la pregunta c), se esperaba que el estudiante halle el área de la fachada utilizando la integral definida, mediante el comando Integral del Geogebra.

A posteriori, en las acciones de Andrés, se apreció que el estudiante para el ítem b. utilizó sus esquemas de uso de aproximación para reducir los espacios de la fachada lateral y hallar un área aproximada a partir de la suma de áreas de 90 rectángulos; y utilizó la integral definida en el ítem c. para dar respuesta a la pregunta, movilizando el esquema de acción instrumentada integral definida, como se puede apreciar en la figura 6.

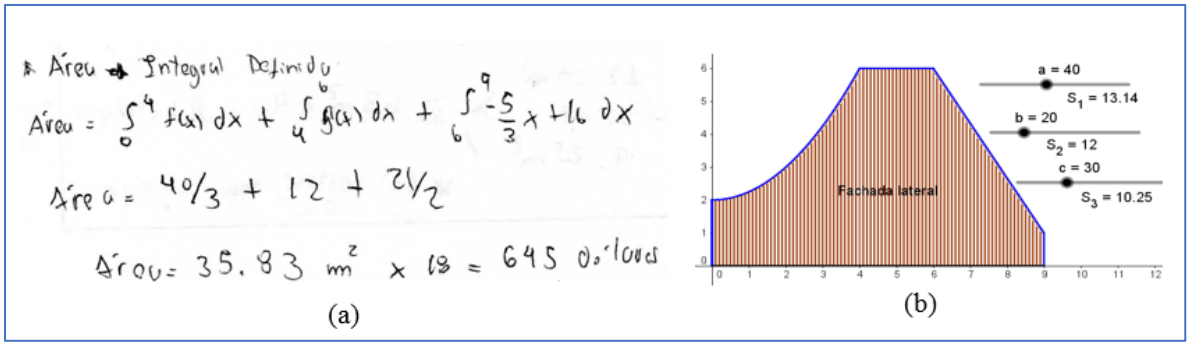


Figura 6. (a) Costo total por pintar la pared. (b) Pared cubierta por 90 maderas.

Conclusiones

Los estudiantes movilizaron esquemas preexistentes como áreas de rectángulos, intervalos, funciones y aproximaciones. Sin embargo, hubo estudiantes que presentaron dificultades para identificar la altura del rectángulo con la imagen de la función.

Se generó en el estudiante el esquema de acción instrumentada noción de integral definida, artefacto que se convirtió en instrumento, a partir de los procesos de instrumentalización e instrumentación de dicha noción, poniendo de manifiesto que el estudiante generó la génesis instrumental de la noción de integral definida.

El uso del GeoGebra permitió una mejor interpretación de los procesos seguidos en la construcción del conocimiento. Por las características de sus herramientas, especialmente del arrastre, los estudiantes pudieron observar cómo varían las gráficas y los cálculos numéricos dinámicamente, enfocando su tiempo en la observación, análisis e interpretación de resultados, en vez de destinarlo en gráficas y cálculos repetitivos.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R, Moreno, L. & Gomez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá : Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2002). Analysis. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (167-198). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

García-Cuéllar, D. y Salazar, J.V.F. (2017). *Un estudio de la instrumentación de la noción de simetría axial por medio del uso del Geogebra*. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, ISSN 2237- 9657, v.6 n.1, pp 68-82, 2017

Haeussler, E. y Paul, R. (2008). *Matemáticas para administración y economía.* México, D. F.: Prentice Hall.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: aproche cognitive des instrumentns contemporains*. Paris: Armand colin.

Stewart, J. (2011). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* México, D. F.: Thomson Editores.

Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa - ALME

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española y portuguesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.

- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.
- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.
- ✓ *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "ciega" por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (http://clame.org.mx/actas/) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:

1. Análisis del discurso matemático escolar
2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido expuesto durante la RELME del año en curso. Es por ello que se solicita **enviar el certificado de la ponencia escaneado**, junto con el escrito.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.
3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.
4. Extensión: máximo 7 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.
5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).
6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.
7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.
8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.
9. No se aceptarán trabajos con notas a pie de página.
10. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- ✓ Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- ✓ (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- ✓ Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- ✓ Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- ✓ Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.
- ✓ Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.
- ✓ Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.
- ✓ Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.
- ✓ Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.

- ✓ Consideración para citaciones:

Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: "por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes" (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba "...". Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

- ✓ Consideración para referencias:

Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

- *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

  Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

Referencias de formatos electrónicos:

- *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

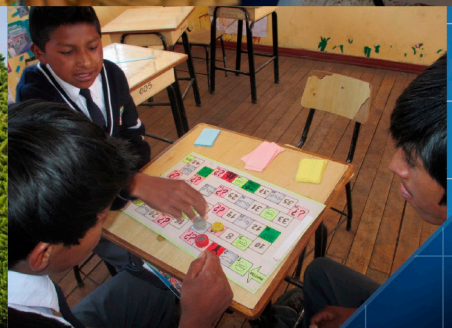
  Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

  Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Clame

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa